

ВЛИЯНИЕ ВНУТРЕННИХ СТЕПЕНЕЙ СВОБОДЫ НА ОБТЕКАНИЕ ПЛАСТИНЫ ГИПЕРЗВУКОВЫМ ПОТОКОМ РАЗРЕЖЕННОГО ГАЗА

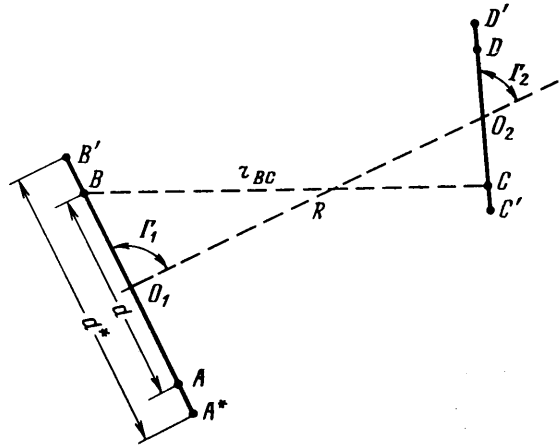
С. Л. ГОРЕЛОВ, А. И. ЕРОФЕЕВ

(Москва)

Задача об обтекании пластины разреженным газом исследовалась численно рядом авторов как на основе модельных кинетических уравнений (например, [1, 2]), так и на основе уравнения Больцмана [3-6]. В большинстве работ решение проводилось для одноатомного газа. Существенное влияние структуры молекул на локальные и суммарные аэродинамические характеристики и поле течения при обтекании пластины под малыми углами атаки было отмечено в [1, 5, 7], в которых рассматривались различные модели учета вращательных степеней свободы молекул. В данной работе на основе модели двухточечных центров отталкивания с постоянным сечением столкновения также исследуется влияние внутренних степеней свободы молекул на картину обтекания пластины, расположенной вдоль (угол атаки $\alpha=0$) и поперек ($\alpha=90^\circ$) потока разреженного газа. Проводится сравнение с данными расчетов для одноатомного газа и с экспериментальными результатами.

1. Модель межмолекулярного взаимодействия. В качестве модели взаимодействия между молекулами газа выбрана модель двухточечных центров отталкивания в предположении, что взаимодействие между частицами происходит в момент сближения их центров на расстоянии $r=R$, т. е. взаимодействие предполагается импульсным, а сечение столкновения $\sigma=\pi R^2=\text{const}$ — не зависящим от относительной скорости молекул. Такая модель достаточно просто может быть реализована в методе прямого моделирования (метод Монте-Карло), которым решается задача. Пусть массы атомов m сосредоточены в точках A', B', C', D' , а центры отталкивания — в точках A, B, C, D (фиг. 1). Расстояние между центрами масс молекул обозначим d^* , а между центрами отталкивания — d . В момент сближения центров молекул O_1 и O_2 на расстоянии $r=R$ импульсно «включаются» силы, действующие только между молекулами, но не внутри молекул. Зависимость величины и направления силы от расстояний между центрами r_{ij} запишем в виде

$$(1.1) \quad \mathbf{f}_{ij} = A v \exp(-v r_{ij}) \frac{\mathbf{r}_{ij}}{r_{ij}}$$



Фиг. 1

где A, v — параметры. Учитывая импульсный характер действия сил, запишем уравнения движения молекулы

$$(1.2) \quad \frac{dV_{1,2}}{dt} = \frac{1}{2m} F_{1,2} C \delta(t), \quad \frac{d\omega_{1,2}}{dt} = \frac{1}{I} \Phi_{1,2} C \delta(t)$$

Здесь $V_{1,2}, \omega_{1,2}$ — поступательные и угловые скорости молекул, $F_{1,2}$ — сумма сил, $\Phi_{1,2}$ — момент сил, действующих на молекулу, C — константа, определяющая импульс сил, I — момент инерции молекулы, индексы 1, 2 относятся к первой и второй молекулам, $\delta(t)$ — дельта-функция. Для скоростей молекул после столкновения, учитывая, что $F_1 = -F_2$, получим из (1.2)

$$(1.3) \quad V'_{1,2} = V_{1,2} \pm (2m)^{-1} FC, \quad \omega'_{1,2} = \omega_{1,2} + I^{-1} \Phi_{1,2} C$$

Константа C , входящая в уравнения (1.2) и (1.3), может быть определена из закона сохранения энергии. В результате получим

$$(1.4) \quad C = 2[V_2 - V_1, F - (\omega_1, \Phi_1) - (\omega_2, \Phi_2)] [m^{-1}F^2 + I^{-1}(\Phi_1^2 + \Phi_2^2)]^{-1/2}$$

В модель взаимодействия входят параметры $v, R, \epsilon = d/2R, \epsilon^* = d^*/2R$. Параметр A , как это видно из (1.4) и (1.3), не влияет на определение скоростей молекул после столкновения. Параметры выберем из данных для потенциала Морзе для молекулы азота [8] и по данным газокINETических размеров молекул: $v = 4.03 \text{ \AA}^{-1}, d^* = 1.094 \text{ \AA}, R = 3.6 \text{ \AA}$. Оставшийся параметр d определим из отношения времен релаксации вращательных и поступательных степеней свободы τ_R . Время вращательной релаксации τ_R определяется из соотношения (см. [9])

$$(1.5) \quad \frac{1}{p\tau_R} = \left(\frac{2\pi k}{mT}\right)^{1/2} \frac{2}{C_R Q_R^2} \int \langle \Delta E_R^2 \rangle dN$$

Здесь p — давление газа, C_R — удельная теплоемкость, обусловленная вращательными степенями свободы, k — постоянная Больцмана, $\langle \Delta E_R^2 \rangle$ — квадрат изменения вращательной энергии молекул при столкновении, усредненный по ориентациям молекул, Q_R — нормировочный множитель

$$Q_R = \frac{4\pi^2 kT}{I}$$

$$dN = 16 \left(\frac{\pi}{I}\right)^{1/2} \left(\frac{m}{2kT}\right)^{3/2} nR^2 \exp\left(-\frac{mg^2}{2kT}\right) g^3 \cos \theta d\theta dg$$

n — концентрация молекул, $g = |V_2 - V_1|$ — модуль относительной скорости молекул, θ — угол между вектором относительной скорости g и вектором g .

Изменение вращательной энергии молекул при столкновении определяется из уравнений (1.3), однако без упрощающих предположений интегрирование в (1.5) может быть проведено только численно. Следуя [9] и полагая $\epsilon = d/2R \ll 1$, выражения для расстояний между центрами отталкивания можно разложить в ряд по ϵ . Ограничиваясь первым приближением по ϵ , выражение для сил можно выразить через гиперболические функции. Воспользовавшись далее разложением гиперболических функций в ряд Фурье и вводя малый параметр $\epsilon_1 = 2I_2(x)/I_0(x)$ ($x = vd/2$, $I_k(x)$ — функции Бесселя мнимого аргумента k -го порядка), интеграл в (1.5) вычисляем в явном виде. В результате для τ_R получаем

$$(1.6) \quad \frac{1}{p\tau_R} = \frac{256}{15} \frac{\pi R^2 \epsilon_1^2}{(2\pi m kT)^{1/2}} \left(\frac{vd^*}{2}\right)^{-2}$$

Время релаксации поступательных степеней свободы определяется из соотношения

$$(1.7) \quad \tau_{\Pi} = \frac{\pi\mu}{4p}, \quad \mu = \frac{5}{16R^2} \left(\frac{2kmT}{\pi} \right)^{1/2}$$

где μ — коэффициент вязкости, вычисленный в нулевом приближении по ϵ_1 , что точно соответствует значению для молекул — твердых сфер.

Из (1.6), (1.7) окончательно получаем для отношения времени вращательной релаксации к времени релаксации поступательных степеней свободы

$$z_R = \frac{3}{4\pi} \left(\frac{vd^*}{2\epsilon_1} \right)^2$$

Задавая параметр z_R , определяем параметр ϵ_1 , а затем и d для конкретных условий расчета. Отметим, что для описанной модели параметр z_R не зависит от температуры, молекула газа обладает двумя вращательными степенями свободы и поэтому, при равновесных условиях отношение удельных теплоемкостей $\gamma=1.4$.

2. Метод расчета. Задачи обтекания бесконечно тонкой пластины решались на основе уравнения Больцмана одним из вариантов метода Монте-Карло — методом прямого моделирования [3, 5]. Отметим только, что в этом методе прослеживается движение ансамбля молекул, моделирующих реальный газ. Около обтекаемого тела выделяется прямоугольная область, которая разбивается на ячейки, линейный размер которых должен быть меньше местной длины свободного пробега молекул. Процессы движения молекул и столкновения между ними рассматриваются последовательно. Столкновения молекул проводятся статистически, причем сталкиваться могут только молекулы, находящиеся в одной геометрической ячейке. Скорости после столкновения определяются по формулам (1.3), (1.4). Вектор R/R между центрами сталкивающихся молекул предполагается равномерно распределенным по сфере. Направление оси сталкивающейся молекулы также предполагается случайным, равномерно распределенным в плоскости, перпендикулярной вектору угловой скорости ω .

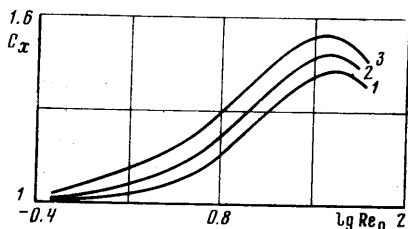
На границе области вверх по потоку ($x=0$, фиг. 3) задается невозмущенная функция распределения

$$f(V, \omega) = n_{\infty} \left(\frac{m}{\pi k T_{\infty}} \right)^{3/2} \frac{I}{\pi 4 k T_{\infty}} \exp \left[-\frac{m(V-U_{\infty})^2}{k T_{\infty}} - \frac{I \omega^2}{2 k T_{\infty}} \right]$$

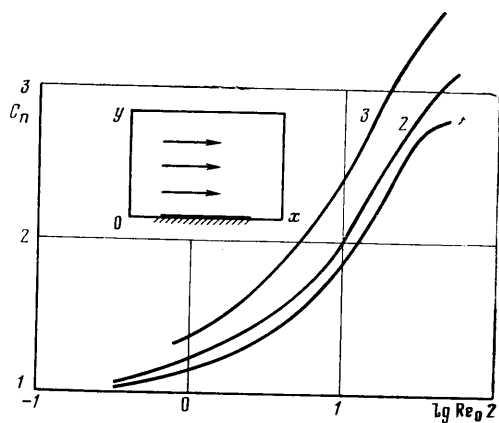
где U_{∞} , T_{∞} — скорость потока и температура газа. На границе $y=0$ (не занятой пластиной при $\alpha=0$) задается условие зеркального отражения. От поверхности пластины молекулы отражаются диффузно с коэффициентом accommodation, равным единице (как для поступательных, так и для вращательных степеней свободы). На остальных границах области граничным условием выбирается отсутствие градиента функции распределения.

3. Результаты расчета. Расчеты обтекания пластины проводились при $S_{\infty} = U_{\infty} (k T_{\infty} / m)^{1/2} = 9.13$. Температура поверхности T_w задавалась равной температуре торможения T_0 для одноатомного газа $T_0 = T_{\infty} [1 + S_{\infty}^2 (\gamma - 1) / \gamma]$, что позволяло провести сравнение с результатами расчетов [10] для одноатомного газа при одинаковых условиях на поверхности пластины. Результаты расчетов аэродинамических характеристик представлены на фиг. 2—4 в виде зависимости от $Re_0 = \rho_{\infty} U_{\infty} L / \mu(T_0)$ (ρ_{∞} — плотность газа в невозмущенном потоке, L — длина пластины, $\mu(T_0)$ — коэффициент вязкости, вычисленный по температуре торможения для одноатомного газа). Параметр z_R выбирался равным 5, 10 и 100. Первый случай соответствует условиям при температурах $T=300^{\circ} \text{K}$, второй — при $T=1000^{\circ} \text{K}$ [°], $z_R = 100$ соответствует условиям течения с «замороженными» внутренними степенями свободы, когда обмен энергией между поступательными и вращательными степенями практически отсутствует.

На фиг. 2, 3 приведены результаты расчетов коэффициентов сопротивления C_x и нормальной силы C_n , отнесенных к соответствующим коэффициентам в свободномолекулярном режиме обтекания, для пластины, расположенной под нулевым углом атаки: кривая 1— $z_R=5$, кривая 2— $z_R=10$, 3— результаты расчетов для одноатомного газа [10]. В свободномолекулярном пределе величины C_x^* и C_n^*



Фиг. 2



Фиг. 3

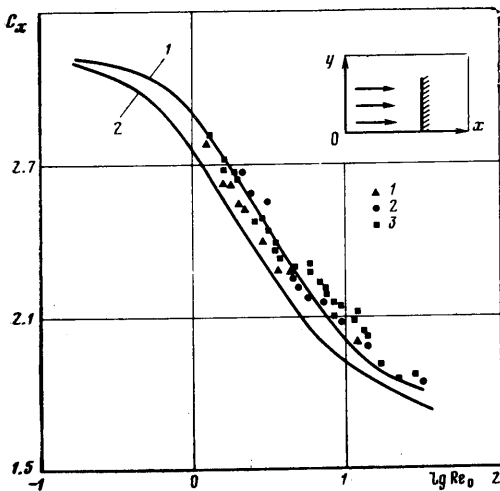
для газа с внутренними степенями свободы и одноатомного газа в расчетах были одинаковыми, поскольку одинаковыми были параметры S_∞ и T_w . Качественное влияние внутренних степеней свободы совпадает с описанным ранее [5] для модели с тремя вращательными степенями свободы, а именно: при одних и тех же числах Re_0 величины аэродинамических коэффициентов для газа с внутренними степенями свободы меньше значений для одноатомного газа. При этом эффект от наличия внутренних степеней свободы молекул проявляется в давлении на пластину в большей степени, чем на трение. С увеличением параметра z_R , т. е. по мере затруднения обмена энергией между поступательными и вращательными степенями свободы, силы, действующие на пластину, увеличиваются, приближаясь к значениям, соответствующим обтеканию одноатомным газом.

Уменьшение сил, действующих на пластину, при учете вращательных степеней свободы связано с перекачиванием энергии поступательного движения во внутреннюю энергию молекул, что приводит к уменьшению температуры и давления в возмущенной области (по сравнению с обтеканием пластины одноатомным газом). Следует отметить также изменение индикатрисы рассеяния при столкновении молекул. Основываясь на законах сохранения, можно показать, что если столкновение сопровождается увеличением внутренней энергии молекул, то угол разлета сталкивающихся частиц уменьшается по сравнению с упругим ударом. Это обстоятельство является одной из причин уменьшения размеров возмущенной зоны около пластины при обтекании с учетом внутренних степеней свободы молекул.

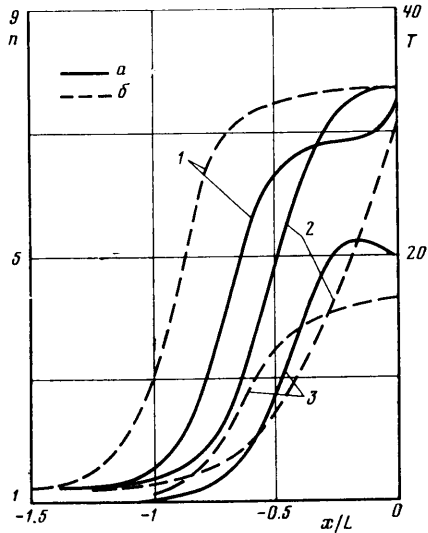
На фиг. 4 представлены результаты расчетов коэффициента сопротивления C_x для пластины, перпендикулярной потоку. Расчеты проведены для случая $S_\infty=9.13$, $T_w=T_0$ ($\gamma=5/3$), $z_R=5$ — кривая 1. На этой же фигуре приведены результаты расчетов для одноатомного газа при тех же значениях S_∞ , T_w и $\mu \sim T^{1/2}$ — кривая 2, а также экспериментальные данные [10]: данные 1—3 соответствуют рабочим газам — гелию, аргону, воздуху. Как результаты эксперимента, так и результаты расчетов указывают на слабую зависимость коэффициента сопротивления от струк-

туры молекул. Аналогичный вывод был сделан в [11] при расчете обтекания сферы двухатомным разреженным газом на основе модельного кинетического уравнения.

На фиг. 5 представлены распределения поступательной (кривые 1), вращательной (кривые 2) температур и плотности (кривые 3) на линии торможения перед пластиной, полученные при следующих значениях параметров: $S_\infty=9.13$, $T_w=T_0$ ($\gamma=5/3$), $Re_0=20$, $z_R=5$ — кривые а, $z_R=100$ — кривые б. Температура и плотность отнесены к своим значениям в невозмущенном потоке. В поведении кривых хорошо прослеживается образование ударной волны, хотя ее фронт еще сильно размыт. С увеличением z_R ударная волна дальше отходит от пластины. Этот эффект согласуется



Фиг. 4



Фиг. 5

с данными по обтеканию плоского затупления в режиме сплошной среды [12]. При больших значениях z_R картина полей течения близка к полученной для одноатомного газа. С уменьшением z_R фронт вращательной температуры приближается к фронту поступательной температуры, но состояние газа еще далеко от равновесия.

Поступила 31 X 1977

ЛИТЕРАТУРА

1. Huang A. B., Hwang P. E., Giddens D. P., Srinivasan R. High-speed leading edge problem. *Phys. Fluids*, 1973, vol. 16, No. 6.
2. Шапов Е. М. Обтекание пластины потоком разреженного газа. В сб. «Численные методы в динамике разреженных газов», вып. 1, М., 1973.
3. Vogenitz F. W., Broadwell J. E., Bird G. A. Leading edge flow by Monte-Carlo direct simulation technique. *AIAA Journal*, 1970, vol. 8, No. 3.
4. Власов В. И. Расчет течения разреженного газа около пластины под углом атаки. Уч. зап. ЦАГИ, 1975, т. 6, № 2.
5. Ерофеев А. И., Перепухов В. А. Расчет обтекания пластины бесконечного размаха потоком разреженного газа. Уч. зап. ЦАГИ, 1976, т. 7, № 1.
6. Ерофеев А. И., Перепухов В. А. Расчет поперечного обтекания пластины потоком разреженного газа. Изв. АН СССР, МЖГ, 1976, № 4.
7. Pullin D. I., Harvey J. K. A numerical solution of the rarefied hypersonic flat-plate problem. *J. Fluid Mech.*, 1976, vol 78, No. 4.
8. Konowalow D. D., Hirschfelder J. O. Intermolecular potential functions for nonpolar molecules. *Phys. Fluids*, 1961, vol. 4, No. 5.

9. *Lordi J. A., Mates R. E.* Rotational relaxation in nonpolar diatomic gases. *Phys. Fluids*, 1970, vol. 13, No. 2.
 10. *Гусев В. Н., Ерофеев А. И., Климова Т. В., Перепухов В. А., Рябов В. В., Толстых А. И.* Теоретические и экспериментальные исследования обтекания тел простой формы гиперзвуковым потоком разреженного газа. Тр. ЦАГИ, 1977, вып. 1855.
 11. *Ларина И. Н., Рыжов В. А.* Обтекание сферы двухатомным газом на основе кинетических уравнений. Докл. АН СССР, 1976, т. 227, № 1.
 12. *Лунев В. В.* Гиперзвуковая аэродинамика. М., «Машиностроение», 1975.
-