

ВЫЧИСЛЕНИЕ ПРОФИЛЯ СКОРОСТИ И ПОТОКОВ  
ПРИ НЕИЗОТЕРМИЧЕСКОМ ТЕЧЕНИИ РАЗРЕЖЕННОГО ГАЗА  
В ЦИЛИНДРИЧЕСКОМ КАПИЛЛЯРЕ  
МЕТОДОМ КРЫЛОВА — БОГОЛЮБОВА

Б. Т. ПОРОДНОВ, Ф. Т. ТУХВЕТОВ

(Свердловск)

Для решения интегральных уравнений переноса, полученных из кинетического уравнения с БГК-моделью оператора столкновений, использован численный метод Крылова — Боголюбова. Вычислены профили скоростей и потоки термокрипа и паузейлевского потока в различных режимах течения в условиях неполной аккомодации тангенциального импульса молекул на стенке.

Для решения широкого круга граничных задач динамики разреженного газа широкое распространение получили аналитические и полуаналитические методы решения основного кинетического уравнения (к их числу относится прежде всего метод моментов в полном пространстве или полупространстве скоростей), а также приближенные численные методы решения интегральных уравнений переноса, получаемых из кинетического уравнения с модельным оператором межмолекулярных столкновений. Большинство из этих методов подробно обсуждается в монографиях [1-3]. Однако всем этим методам присущи некоторые недостатки, основными из которых являются либо медленная сходимость в свободномолекулярном и близком к нему режимах течения (метод моментов и его модификации), например, [4, 5], либо существенные затруднения в определении пространственного распределения макропараметров поля течения газа и в оценке точности получаемых результатов (интегральные методы). Поэтому важным является отыскание такого метода решения, результаты которого могли бы служить критерием оценки сходимости приближенных методов. Таковым является метод Крылова — Боголюбова [6], который с успехом применяют при решении задач в нейтронной физике.

1. Предполагается, что газ находится в поле градиентов температуры и давления, направленных вдоль оси  $z$  неограниченно длинного капилляра. В стационарном состоянии в условиях малого отклонения состояния газа от равновесного в капилляре имеют место два потока: один  $\langle u_p \rangle$  (паузейлевский поток) пропорционален градиенту давления, а другой  $\langle u_T \rangle$  (поток термокрипа) — градиенту температуры.

Оба потока характеризуются соответствующими неравновесными функциями распределения молекул по скоростям и функциями возмущения  $\varphi_p, \tau(\mathbf{r}, c_z, \mathbf{c}_r)$ , которые удовлетворяют двум независимым кинетическим уравнениям с БГК-моделью оператора межмолекулярных столкновений в безразмерной форме [7, 8]

$$(1.1) \quad c_r \frac{\partial \varphi_p(\mathbf{r}, c_z, \mathbf{c}_r)}{\partial \mathbf{r}} + c_z v = \delta_p [2c_z u_p(\mathbf{r}) - \varphi_p(\mathbf{r}, c_z, \mathbf{c}_r)]$$

$$(1.2) \quad c_r \frac{\partial \varphi_T(\mathbf{r}, c_z, \mathbf{c}_r)}{\partial \mathbf{r}} + c_z \left( c^2 - \frac{5}{2} \right) \tau = \delta_T [2c_z u_T(\mathbf{r}) - \varphi_T(\mathbf{r}, c_z, \mathbf{c}_r)]$$

Здесь  $c_z$  и  $\mathbf{c}_r$  —  $z$ -компонента и вектор безразмерной скорости молекул в плоскости, нормальной оси  $z$ ;  $\mathbf{r}$  — радиус-вектор в плоскости, нормальной оси  $z$ ;  $v = (R/p)(dp/dz)$  и  $\tau = (R/T)(dT/dz)$  — логарифмические гради-

енты давления и температуры;  $\delta_p$  и  $\delta_T$  — параметры разреженности газа, определяемые соотношениями

$$(1.3) \quad \delta_p = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{R}{\lambda_p}, \quad \delta_T = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{R}{\lambda_T}, \quad \delta_T = \frac{2}{3} \delta_p$$

Средние длины свободного пробега  $\lambda_{p, T}$  определяются из коэффициента вязкости и коэффициента теплопроводности для твердых сферических молекул соответственно [9]. В качестве масштабов в (1.1), (1.2) выбраны радиус капилляра  $R$  и наиболее вероятная скорость  $(2kT/m)^{1/2}$ .

Следует заметить, что в отличие от [8, 10] здесь используются два параметра разреженности газа ( $\delta_p$  и  $\delta_T$ ). Это обусловлено следующими обстоятельствами. Во-первых, как отмечалось в [4], основной недостаток в использовании БГК-модели оператора межмолекулярных столкновений с единственной частотой столкновений при решении основного кинетического уравнения заключается в невозможности корректно описать явления, обусловленные одновременно вязкостью и теплопроводностью, а также получить следующее значение для числа Прандтля  $Pr = 2/3$  в разреженных газах (для БГК-модели  $Pr = 1$ ). Во-вторых, использование единственного параметра  $\delta$  при решении уравнений (1.1), (1.2) дает неправильное значение скорости теплового скольжения газа по сравнению с найденным при непосредственном решении самого уравнения Больцмана в вязкой области течения [11].

2. Поскольку в [7, 8, 10] достаточно подробно описана процедура получения интегральных уравнений переноса из модельного кинетического уравнения типа (1.1), (1.2) в случае произвольной аккомодации тангенциального импульса молекул на стенке, характеризуемой коэффициентом  $\epsilon$ , ограничимся следующим замечанием.

Уравнения (1.1) и (1.2) можно формально проинтегрировать вдоль направления скорости  $e_r$ . Затем, используя кинетическое определение макроскопических скоростей  $u_p(\mathbf{r})$  пуазейлевского потока и  $u_T(\mathbf{r})$  потока термокрипа и вводя новые функции вида

$$(2.1) \quad \psi_p(r) = 1 - \frac{2\delta_p}{v} u_p(r), \quad \psi_T(r) = 1 + \frac{2\delta_T}{\tau} u_T(r), \quad r = |\mathbf{r}|$$

уравнения (1.1) и (1.2) легко преобразовать в интегральные уравнения переноса для функций  $\psi_p(r)$  и  $\psi_T(r)$ , которые имеют вид

$$(2.2) \quad \psi_k(r) = \Phi_k(r) + \frac{\delta_k}{\pi} \int \int_{\Sigma_1} \psi_k(r') K_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \frac{d\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|} + \\ + \frac{\delta_k}{\pi} \int \int_{\Sigma_2} \psi_k(r') K_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \epsilon_k) \frac{d\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}_N|}, \quad k = p, T$$

$$(2.3) \quad \Phi_p(r) = 1, \quad \Phi_T(r) = 1 - \frac{\delta_T}{\pi} \int \int_{\Sigma_1} K_2(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \frac{d\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|} - \\ - \frac{\delta_T}{\pi} \int \int_{\Sigma_2} K_2(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \epsilon_T) \frac{d\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}_N|}$$

В (2.2) и (2.3) площади интегрирования  $\Sigma_1$  и  $\Sigma_2$  определяются следующими неравенствами для полярного угла  $\alpha$  и переменной  $s$ :  $0 \leq \alpha \leq 2\pi$ ;  $0 \leq s \leq s_0$  и  $0 \leq s \leq l$  соответственно (см. фиг. 1 в [7, 8]). Ядра интегральных уравнений  $K_n(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  и  $K_n(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \varepsilon_k)$  определяются соотношениями

$$(2.4) \quad K_n(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \int_0^{\infty} c_r^n \exp\left(-c_r^2 - \frac{\delta_k |\mathbf{r}' - \mathbf{r}|}{c_r}\right) dc_r$$

$$K_n(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \varepsilon_k) = \int_0^{\infty} \frac{(1 - \varepsilon_k) \exp(-\delta_k |\mathbf{r}_M - \mathbf{r}| / c_r)}{1 - (1 - \varepsilon_k) \exp(-\delta_k |\mathbf{r}_M - \mathbf{r}_N| / c_r)} c_r^n \exp\left(-c_r^2 - \frac{\delta_k |\mathbf{r}' - \mathbf{r}_N|}{c_r}\right) dc_r$$

В (2.2)–(2.4) величины  $\varepsilon_p$  и  $\varepsilon_T$  суть изотермический и неизотермический коэффициенты аккомодации тангенциального импульса. Необходимость использования двух коэффициентов аккомодации обусловлена тем обстоятельством, что в отличие от изотермического в условиях неизотермического течения температура отраженных от стенки молекул может отличаться от температуры стенки в силу наличия тангенциального (и, возможно, радиального) градиента температуры вблизи стенки. В этом случае из определения максвелловского ядра рассеяния молекул [2] и коэффициента аккомодации тангенциального импульса [1] следует необходимость введения неизотермического коэффициента  $\varepsilon_T$ .

Следует отметить, что в появившейся недавно работе [12] получено интегральное уравнение типа (2.2), в котором два интегральных члена в правой части представлены одним с интегрированием по  $s$  в пределах  $0 \leq s \leq l$ . Такая запись уравнения ошибочна и приводит к неправильным результатам.

Таким образом, решение задачи сводится к нахождению функций  $\psi_p(r)$  и  $\psi_T(r)$  из уравнений (2.2) и последующему определению макроскопических скоростей  $u_p(r)$  и  $u_T(r)$  согласно (2.1). Безразмерные пуазейлевский поток  $Q_p(\delta_p)$  и поток теплового крипа  $Q_T(\delta_T)$  определяются соотношениями

$$(2.5) \quad Q_p(\delta_p) = -\frac{2\langle u_p \rangle}{v} = -\frac{1}{\delta} \left[ 1 - 2 \int_0^1 \psi_p(r) r dr \right]$$

$$Q_T(\delta_T) = \frac{2\langle u_T \rangle}{\tau} = -\frac{1}{\delta_T} \left[ 1 - 2 \int_0^1 \psi_T(r) r dr \right]$$

3. Для решения уравнений (2.2) необходимо все интегралы по площади в (2.2) и (2.4) написать в полярной системе координат с переменными  $\alpha$  и  $s$ . Заметим, следуя общему правилу Крылова – Боголюбова [6], радиус  $R=1$  и интервал изменения полярного угла  $\alpha[0, \pi]$  делятся на  $n$  равных частей. При этом точки деления отрезка  $r_i$  и  $\alpha_i$  ( $i=0, 1, \dots, n-1$ ) выбираются с условием, что  $r_0 = a_0 = 0$ ,  $r_n = 1$  и  $\alpha_n = \pi$ . Тогда середина произвольного отрезка радиуса равна  $r_{i+1/2} = (r_i + r_{i+1}) / 2$ .

В этом случае уравнение (2.2) можно записать как

$$\psi_k(r_{i+1/2}) = \Phi_k(r_{i+1/2}) + \frac{\delta_k}{\pi} \sum_{m=0}^{n-1} \int_{\alpha_m}^{\alpha_{m+1}} da \int_{s_m^i}^{s_{m+1}^i} \psi_k(s) ds \times$$

$$(3.1) \quad \times \int_0^{\infty} \exp\left(-c_r^2 - \frac{\delta_k}{c_r} s\right) dC_r + \frac{\delta_k}{\pi} \sum_{m=0}^{n-1} \int_{\alpha'_m}^{\alpha'_{m+1}} da \int_{s_m^i}^{s_{m+1}^i} \psi_k(s) ds \times \\ \times \int_0^{\infty} \frac{(1 - \varepsilon_k) \exp[-c_r^2 - \delta_k(s + s_0)/c_r]}{1 - (1 - \varepsilon_k) \exp(-\delta_k l / c_r)} dc_r$$

Здесь  $s_0$  и  $l$  — отрезок и длина хорды  $MN$ , определяемой углом  $\alpha$  (см. ф.л.г. 1 в [7, 8]).

В силу положительности ядер (2.3) и непрерывности решений уравнений (2.2) каждый из тройных интегралов в (3.1) может быть приближенно представлен в виде

$$(3.2) \quad \int_{\alpha_m}^{\alpha_{m+1}} da \int_{s_m^i}^{s_{m+1}^i} \psi_k(s) ds \int_0^{\infty} \exp\left(-c_r^2 - \frac{\delta_k}{c_r} s\right) dc_r \approx A_{im} \psi_k(r_{m+1/2}) \\ \int_{\alpha'_m}^{\alpha'_{m+1}} da \int_{s_m^i}^{s_{m+1}^i} \psi_k(s) ds \int_0^{\infty} \frac{(1 - \varepsilon_k) \exp[-c_r^2 - \delta_k(s + s_0)/c_r]}{1 - (1 - \varepsilon_k) \exp(-\delta_k l / c_r)} \times \\ \times dc_r \approx B_{im} \psi_k(r_{m+1/2})$$

Таким образом, уравнения (3.1) преобразуются в две независимые системы алгебраических уравнений с постоянными коэффициентами

$$(3.3) \quad \frac{\delta_k}{\pi} \sum_{m=0}^{n-1} (A_{im} + B_{im}) \psi_k(r_{m+1/2}) - \psi_k(r_{i+1/2}) + \Phi_k(r_{i+1/2}) = 0$$

Трудности, возникающие при вычислении тройных интегралов в коэффициентах  $A_{im}$  и  $B_{im}$ , были существенно уменьшены посредством удачного выбора зон интегрирования и применения рекуррентных соотношений для интегралов типа интегралов Абрамовича [13]. Три зоны интегрирования выбирались в зависимости от соотношения между  $r_{i+1/2}$  и  $r_{m+1/2}$ , а именно:  $r_{i+1/2} \geq r_{m+1/2}$ . Переменная интегрирования  $s$  в  $A_{im}$  и  $B_{im}$  изменялась на интервале, определяемом точками пересечения луча  $\alpha_{m+1/2}$  с окружностями радиусами  $r_m$  и  $r_{m+1}$ . При этом если в коэффициентах  $A_{im}$  значение  $s$  отсчитывается по лучу  $\alpha$  от точки наблюдения, то в  $B_{im}$  — от точки пересечения луча  $\alpha + \pi$  со стенкой капилляра.

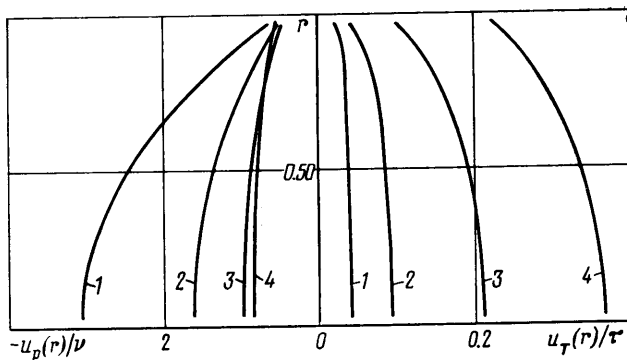
Профили скоростей  $u_p(r)$  и  $u_T(r)$  определяются согласно (2.1) по найденным значениям функций  $\psi_p(r_{i+1/2})$  и  $\psi_T(r_{i+1/2})$ , а безразмерные потоки  $Q_p(\delta_p)$  и  $Q_T(\delta_T)$  — путем численного подсчета по формулам (2.5).

После исследования сходимости метода и оценки требуемых затрат машинного времени для решения в различных режимах течения было выбрано число разбиений интервалов интегрирования  $n=20$  в случае  $\varepsilon_p, \tau=1$  и  $n=10$  в случае  $\varepsilon_p, \tau < 1$ . В первом случае точность результатов составила меньше 0.1%, во втором — 1%. Выбор малого числа разбиений был обусловлен малым быстродействием имевшейся в распоряжении ЭВМ М-222. Следует отметить, что в области  $\delta_p, \tau < 0.5$  точность результатов определяется точностью вычисления в  $A_{im}$  и  $B_{im}$  интегралов по  $c_r$ , а в области  $\delta_p, \tau > 3$  точность зависит от числа разбиений интервалов интегрирования.

4. Профили макроскопических скоростей  $u_p(r) / \nu$  и  $u_T(r) / \tau$  для случая полностью диффузного рассеяния молекул стенкой ( $\varepsilon_p, \tau=1$ ) в раз-

личных режимах течения изображены на фиг. 1. Кривым 1—4 соответствуют значения  $\delta_p = 10, 4, 1, 0.1$ .

Как и следовало ожидать, пуазейлевский поток имеет направление, противоположное направлению градиента давления, а поток термокрипа

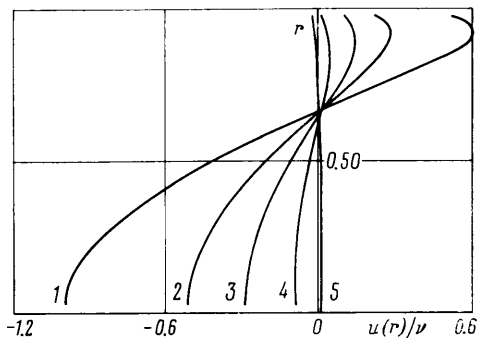


Фиг. 1

направлен по градиенту температуры, это объясняется неоднородным распределением плотности газа вдоль стенки капилляра.

Как видно из фиг. 1, профиль скорости  $u_p(r) / \nu$  быстро изменяется от параболического при  $\delta_p = 10$  до описываемого гиперболическим косинусом при  $\delta_p = 1$ . С дальнейшим уменьшением  $\delta_p$  форма профиля скорости стремится к прямой линии. Профиль же скорости термокрипа  $u_T(r) / \tau$  как функция  $\delta_T$  изменяется во всех режимах течения слабо по сравнению с  $u_p(r) / \nu$ .

Профили полной скорости  $u(r) / \nu = u_p(r) / \nu + (Q_p / Q_T) u_T(r) / \tau$  для случая  $\epsilon_p, \tau = 1$  и значений параметра  $\delta_p$ , равных 10, 6, 4, 2, 0.1, представлены на фиг. 2 (кривые 1—5 соответственно). Как видно, направление полной скорости  $u(r) / \nu$  в каждой точке сечения



Фиг. 2

канала зависит от режима течения газа. Так, вблизи стенки скорость  $u(r) / \nu$  изменяет направление на противоположное при изменении  $\delta_p$  от 10 до 0.1. Этот эффект, по-видимому, объясняется быстрым уменьшением пуазейлевского потока  $Q_p$  при изменении  $\delta_p$  в этом интервале, в то время как поток термокрипа  $Q_T$  изменяется значительно медленнее. Аналогичный эффект имеет место в плоском канале [14]. Вычисления показывают, что суммарный поток газа через капилляр в стационарном режиме равен нулю.

Анализ результатов, полученных для случая  $\epsilon_p, \tau < 1$ , показывает, что с увеличением доли зеркально отраженных молекул профили скоростей сглаживаются. Это особенно заметно на профилях пуазейлевского потока.

В табл. 1 и 2 представлены результаты вычислений безразмерного пуазейлевского потока  $Q_p$  и потока термокрипа  $Q_T$  для различных коэффициентов аккомодации тангенциального импульса  $\epsilon_p, \tau$  в широком диапазоне изменений параметров разреженности  $\delta_p$  и  $\delta_T$  соответственно. Как вид-

Таблица 1

$\sigma_p$	$\epsilon_p$			
	1	0.9	0.8	0.6
0.01	1.476	1.791	2.187	3.374
0.02	1.461	1.765	2.144	3.255
0.04	1.439	1.729	2.085	3.140
0.06	1.425	1.705	2.046	3.047
0.1	1.405	1.674	1.992	2.950
0.2	1.383	1.630	1.937	2.479
0.4	1.380	1.619	1.898	2.727
0.6	1.400	1.626	1.896	2.731
1	1.461	1.677	1.937	2.689
2	1.658	1.874	2.124	2.904
3	1.873	2.106	2.365	3.161
4	2.113	2.328	2.588	3.347
5	2.349	2.565	2.824	3.583
6	2.590	2.801	3.065	3.826
7	2.835	3.052	3.325	4.087
8	3.081	3.303	3.581	4.349
9	3.328	3.553	3.834	4.613
10	3.579	3.804	4.092	4.878

Таблица 2

$\sigma_T$	$\epsilon_T$			
	1	0.9	0.8	0.6
0.01	0.7179	0.8642	1.051	1.602
0.02	0.6960	0.8303	0.9974	1.469
0.04	0.6630	0.7807	0.9231	1.324
0.06	0.6374	0.7430	0.8693	1.210
0.1	0.5976	0.5854	0.7864	1.066
0.2	0.5296	0.5918	0.6629	0.8308
0.4	0.4467	0.4839	0.5237	0.6245
0.6	0.3930	0.4173	0.4442	0.5066
1.0	0.3223	0.3338	0.3472	0.3753
2	0.2272	0.2294	0.2313	0.2356
3	0.1765	0.1761	0.1756	0.1742
4	0.1445	0.1434	0.1426	0.1411
5	0.1223	0.1212	0.1201	0.1176
6	0.1060	0.1050	0.1041	0.1021
7	0.0934	0.0927	0.0915	0.0901
8	0.0836	0.0830	0.0818	0.0805
9	0.0757	0.0752	0.0740	0.0725
10	0.0691	0.0688	0.0685	0.0677

но из табл. 1, пуазейлевский поток  $Q_p(\delta_p)$  с уменьшением  $\epsilon_p$  монотонно возрастает в любом режиме течения.

Однако что касается потока термокрипа  $Q_T$  (табл. 2), то уменьшение неизотермического коэффициента аккомодации  $\epsilon_T$  приводит к увеличению  $Q_T$  при малых значениях  $\delta_T$  и к его уменьшению в режиме течения со скольжением. Вычисления показывают, что в промежуточном режиме течения при  $\delta_T \sim 2.5$  безразмерный поток термокрипа  $Q_T$  не зависит от коэффициента аккомодации  $\epsilon_T$ .

На первый взгляд не совсем очевидно, что существует такой режим течения газа, в котором увеличение доли зеркально отраженных молекул (уменьшение  $\epsilon_T$ ) приводит к уменьшению потока  $Q_T$ . Однако эту своеобраз-

разную зависимость теплового крипа от  $\varepsilon_T$  можно понять, если учесть, что поток  $Q_T$  (при постоянном среднем давлении в системе) является суперпозицией двух противоположно направленных потоков, один из которых  $Q_{TT}$  обусловлен неоднородным распределением температуры, а другой  $Q_{Tn}$  — градиентом числовой плотности, т. е.

$$(4.1) \quad Q_T(\delta_T) = Q_{Tn} - Q_{TT}$$

Справедливость соотношения (4.1) нетрудно доказать, используя уравнение (1.2) и соотношение между логарифмическими градиентами числовой плотности и температуры в изобарических условиях.

Действительно, для термокрипа после подстановки функции распределения вида  $f = f_0(z) [1 + \Phi_T(r, c_z, c_r)]$ , где  $f_0(z)$  — максвелловская функция распределения молекул по скоростям, в уравнении Больцмана с БГК-моделью оператора межмолекулярных столкновений получается следующее уравнение для функции возмущения:

$$(4.2) \quad c_r \frac{\partial \Phi_T(r, c_z, c_r)}{\partial r} + c_z \left( c^2 - \frac{3}{2} \right) \tau + c_z v = \delta_T [2c_z u_T(r) - \Phi_T(r, c_z, c_r)]$$

Здесь  $v = d \ln n / dz$  и  $\tau = d \ln T / dz$  — логарифмические градиенты числовой плотности и температуры газа соответственно. Если воспользоваться очевидным для термокрипа равенством  $v = -\tau$ , то из (4.2) следует уравнение (1.2).

В линейном приближении естественно предположить ввиду наличия второго и третьего слагаемых в левой части (4.2), что поток термокрипа, характеризуемый макроскопической скоростью  $u_T(r)$ , есть результат суперпозиции двух потоков, обусловленных наличием градиентов числовой плотности и температуры, т. е. можно записать

$$(4.3) \quad \begin{aligned} \Phi_T(r, c_z, c_r) &= \Phi_{Tn}(r, c_z, c_r) + \Phi_{TT}(r, c_z, c_r) \\ u_T(r) &= u_{Tn}(r) + u_{TT}(r) \end{aligned}$$

В этом случае уравнение (4.2) распадается на два независимых уравнения для функций  $\Phi_{Tn}(r, c_z, c_r)$  и  $\Phi_{TT}(r, c_z, c_r)$ . Одно из этих уравнений аналогично (1.1) и отличается только параметром разреженности ( $\delta_T$  вместо  $\delta_p$ ). Уравнение для функции  $\Phi_{TT}$  отличается от (1.2) только коэффициентом ( $3/2$  вместо  $5/2$ ) во втором слагаемом левой части уравнения. Решение этих уравнений полностью аналогично описанному выше.

Таким образом, функции возмущения  $\Phi_{Tn}$  и  $\Phi_{TT}$  позволяют вычислить безразмерные потоки  $Q_{Tn}(\delta_T)$  и  $Q_{TT}(\delta_T)$ . Вычисления показывают, что каждый из потоков  $Q_{Tn}$  и  $Q_{TT}$  с уменьшением  $\varepsilon_T$  увеличивается, однако их зависимость от  $\varepsilon_T$  такова, что результат их суперпозиции, т. е. поток теплового крипа  $Q_T$ , по-разному зависит от аккомодирующих свойств поверхности в различных режимах течения.

Из сопоставления вычисленных значений  $Q_p$  и  $Q_T$  с данными в [8] следует, что при решении уравнений (2.2) приближенным методом Бубнова — Галеркина во втором приближении [8] значения  $Q_p$  отличаются от точных не более чем на 0.7%, а  $Q_T$  — не более чем на 1.5%.

Сравнение полученных результатов с данными, приведенными в [12], показывает их совпадение в пределах точности вычислений только для случая полностью диффузного отражения молекул стенкой ( $\varepsilon_{p, \tau} = 1$ ), и систематическое расхождение (до 20–30%) в случае  $\varepsilon_{p, \tau} < 1$ . Такое расхождение результатов, как отмечалось выше, обусловлено некорректным преобразованием интегральных уравнений переноса в [12].

Как показывают результаты вычислений, зависимость потока термокрипа  $Q_T$  от неизотермического коэффициента аккомодации тангенциаль-

ного импульса не настолько слаба, чтобы ею можно было пренебречь при сравнении с экспериментальными данными, как это рекомендуется в [12].

Следует заметить, что аналогичные результаты, полученные методом Монте-Карло, представлены в [15] в виде графиков в масштабе, затрудняющем корректное сравнение с нашими данными.

Таким образом, метод Крылова — Боголюбова является достаточно эффективным методом решения интегральных уравнений переноса. При умеренных затратах машинного времени он позволяет с заданной точностью вычислить потоки газа в произвольном режиме течения и определить пространственное распределение макрохарактеристик поля течения. Этот метод может быть с успехом применен к решению широкого круга задач в динамике разреженных газов.

Поступила 23 XI 1977

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Коган М. Н. Динамика разреженного газа. М., «Наука», 1967.
2. Черчиньяни К. Математические методы в кинетической теории газов. М., «Мир», 1973.
3. Ферцигер Дж., Капер Г. Математическая теория процессов переноса в газах. М., «Мир», 1976.
4. Породнов Б. Т., Суетин П. Е. Течение разреженного газа между двумя параллельными плоскостями. Изв. АН СССР, МЖГ, 1967, № 6.
5. Породнов Б. Т., Суетин П. Е. Плоское течение максвелловского газа. Ж. техн. физ., 1969, т. 39, вып. 4.
6. Марчук Г. П. Методы расчета ядерных реакторов. М., Атомиздат, 1961.
7. Suetin P. E., Porodnov B. T., Chernjak V. G., Borisov S. F. Poiseuille flow at arbitrary Knudsen numbers and tangential momentum accommodation. J. Fluid Mech., 1973, vol. 60, No. 3.
8. Черняк В. Г., Породнов Б. Т., Суетин П. Е. Термомолекулярная разность давлений при произвольной аккомодации на поверхности. Инж.-физ. ж., 1973, т. 24, № 2.
9. Чепмен С., Каулинг Т. Математическая теория неоднородных газов. М., Изд-во иностр. лит., 1960.
10. Черняк В. Г., Породнов Б. Т., Суетин П. Е. Применение вариационного метода к задаче о термомолекулярной разности давлений в цилиндрическом канале. Инж.-физ. ж., 1974, т. 26, № 3.
11. Loyalka S. K. Thermal transpiration in a cylindrical tube. J. Phys. Fluids, 1969, vol. 12, No. 11.
12. Loyalka S. K. Kinetic theory of thermal transpiration and mechanocaloric effect. J. Chem. Phys., 1975, vol. 63, No. 9.
13. Abramowitz M. Evaluation of the integral  $\int_0^{\infty} e^{-u^2-x/u} du$ . J. Math. and Phys., 1953, vol. 32, No. 2-3.
14. Коган М. Н., Макашев Н. К. О течении газа в плоском канале, вызванном продольным градиентом температуры при произвольном числе Кнудсена. Уч. зап. ЦАГИ, 1970, т. 1, № 2.
15. Горелов С. Л. Течение разреженного газа в цилиндрической трубе. Уч. зап. ЦАГИ, 1975, т. 6, № 6.