

**УСТОЙЧИВОСТЬ ИОНИЗУЮЩЕЙ УДАРНОЙ ВОЛНЫ
В ЭЛЕКТРОМАГНИТНОМ ПОЛЕ**

А. А. БАРМИН, Н. В. ГОЛУБИН

(Москва)

Рассматривается устойчивость плоской ударной волны, ионизирующей газ, при наличии однородного электромагнитного поля относительно малых двумерных возмущений. Приложенное электрическое поле предполагается нормальным к фронту волны, а магнитное — параллельным фронту и перпендикулярным плоскости, в которой распространяются возмущения. Среда считается двухпараметрическим газом. Подробно рассмотрен случай совершенного газа. Наличие нормальной к фронту составляющей электрического поля приводит к образованию поверхностного заряда на фронте, взаимодействие которого с электромагнитным полем существенно влияет на устойчивость.

Настоящая работа является развитием и завершением [1] и методически следует [2, 3], где рассмотрена устойчивость газодинамической ударной волны. Устойчивость ударных волн, ионизирующих газ, при наличии одного магнитного поля, параллельного фронту, рассматривалась в [4, 5]. Было показано, что влияние магнитного поля только изменяет границы устойчивости, установленные для газодинамических волн. В [6] исследована устойчивость ударной волны, когда за волной проводимость мала, а магнитное поле перпендикулярно фронту волны. В этом случае из-за наличия диссипации отсутствует область параметров, соответствующая нейтральной устойчивости. Ударные волны рассматриваемого типа возникают как в электромагнитных ударных трубах [7], так и при обтекании тел сверхзвуковым электрогазодинамическим потоком [8].

1. Рассмотрим плоскую ударную волну, ионизирующую газ. Выберем систему координат, связанную с волной, так что ось x направлена по нормали к невозмущенному фронту волны, а оси y и z лежат в плоскости фронта, причем ось z параллельна приложенному магнитному полю. Заданные электрическое $E = E_0 e_x$ и магнитное $H = H_0 e_z$ поля считаем однородными, а индуцированным электрическим полем будем пренебрегать, т. е. считать $E_0 \gg (U/c)H_0$. Это возможно, если скорость волны $U \ll c$ (c — скорость света), а $E_0/H_0 \leq O(1)$. При этом невозмущенное течение с обеих сторон от волны будет одномерным и стационарным ($v_{v0}/U \sim (U/c)^2$, $E_0^2 / (4\pi\rho U^2) \ll 1$).

Начальные возмущения вектора скорости и напряженности электрического поля будем задавать в плоскости xy , и все возмущенные величины считать функциями только x, y, t . Если возмущения магнитного поля параллельны оси z , то возмущенное движение является плоским и для него верен интеграл вмороженности: $HV = b(S)$, где V — удельный объем, а S — энтропия. В такой постановке начальное возмущение магнитного поля можно и не рассматривать, так как оно не влияет на устойчивость.

Возмущенное движение за волной описывается линеаризованными уравнениями МГД, которые запишем в матричном виде

$$(1.1) \quad I \frac{\partial q}{\partial t} + A_x \frac{\partial q}{\partial x} + A_z \frac{\partial q}{\partial y} = 0, \quad q = \begin{pmatrix} V' \\ u \\ v \\ s \\ b \end{pmatrix}$$

где $A_x = UI + A_2$, I — единичная матрица, а у матриц A_i ($i=2, 3$) отличны от нуля только следующие элементы:

$$(A_i)_{i1} = -V, \quad (A_i)_{i4} = -Vp_s', \quad (A_i)_{i5} = -\frac{a_0^2}{V} + \frac{H_0^2}{4\pi}$$

$$(A_i)_{i5} = \frac{H_0}{4\pi}, \quad p_s' = \left(\frac{\partial p}{\partial s} \right)_v, \quad b = H_0 V' + V H'$$

Здесь s , V' , u , v — возмущения энтропии, удельного объема и компонент скорости; a_0 — газодинамическая скорость звука, U , V — невозмущенные скорость и удельный объем.

Так как газ набегаает на ударную волну со сверхзвуковой скоростью, то все газодинамические возмущения являются приходящими на волну. Поэтому решение уравнений газовой динамики перед волной можно не рассматривать, а считать газодинамические величины на волне заданными функциями времени.

Если $L^2/(cT)^2 \sim U_0^2/c^2 \ll 1$, где L , T , U_0 — характерная длина, время и скорость, то магнитное и электрическое поля перед волной будут удовлетворять уравнениям

$$\Delta H = 0, \quad \Delta \phi = 0, \quad E = \text{grad } \phi$$

Не нарушая общности, возмущение магнитного поля на волне можно считать равным нулю, тогда ограниченным решением для H' будет $H=0$, т. е. возмущения магнитного поля перед волной отсутствуют.

Пусть $x = \Psi(y, t)$ — уравнение возмущенного фронта волны. Для возмущенного электрического потенциала имеют место следующие условия: $\text{grad } \phi \rightarrow E_0(x \rightarrow -\infty)$, $\phi = \phi_0(x = \Psi(y, t))$.

Полагая $\Psi = \Psi_0(t) e^{iky}$, получаем для ϕ следующее решение с точностью до линейных членов, удовлетворяющее условию на волне: $\phi = \phi_0 - E_0 \Psi e^{ikx} + E_0 x$. На ударной волне при $x=0$ имеем

$$(1.2) \quad E_x = -kE_0 \Psi, \quad E_y = -ikE_0 \Psi$$

Таким образом, все величины перед волной при $x=0$ являются известными функциями времени.

Рассмотрим теперь соотношения на ударной волне. Будем считать, что магнитное поле на волне непрерывно. Это условие следует из структуры волны, когда главный диссипативный механизм определяется магнитной вязкостью [9]. Тогда соотношение на волне можно записать в виде

$$(1.3) \quad \frac{v-D}{V} n = \frac{v_1-D}{V_1} n = m, \quad D = \frac{\Psi_1'}{\sqrt{1+(\Psi_1')^2}}$$

$$p-p_1 = m^2(V_1-V) - \frac{E_n^2}{8\pi} + \frac{E_\tau^2}{8\pi}, \quad v_\tau = v_{\tau 1} - \frac{E_\tau E_n}{4\pi m}$$

$$\varepsilon + pV + \frac{m^2}{2} V^2 + \frac{v_\tau^2}{2} = \varepsilon_1 + p_1 V_1 + \frac{m^2}{2} V_1^2 + \frac{v_{\tau 1}^2}{2}$$

Здесь D , v — скорости волны и газа в выбранной системе координат, n и τ — векторы нормали и касательной к волне (a_n и a_τ — соответствующие проекции), ε — внутренняя энергия газа, индекс 1 соответствует состоянию перед волной. Линеаризуем эти соотношения с использованием выражений (1.2) для компонент электрического поля и разложения около стационарного состояния давления и внутренней энергии как функ-

ций V' и s

$$p = p_0 - \frac{a_0^2}{V^2} V' + p_s' s + \dots, \quad \varepsilon = \varepsilon_0 - p_0 V' + T s + \dots$$

Здесь p_0 , T — стационарные значения давления и абсолютной температуры, a_0 — квадрат газодинамической скорости звука. Разрешив полученные соотношения относительно q за волной, получим граничные условия на скачке в виде

$$(1.4) \quad q = B_1 q_1 + B_t \frac{\partial \Psi}{\partial t} + B_v \frac{\partial \Psi}{\partial y} - B \Psi$$

$$B_t = \frac{V_1 - V}{V_1 T m (M^{-2} - 1)} b_t, \quad B_v = m (V_1 - V) b_v, \quad B = \frac{k E_0^2 (1 + P)}{4 \pi m^2 (M^{-2} - 1)}$$

$$b_t = \begin{pmatrix} 1 \\ T(M^2 - 1) + 2g \\ 0 \\ -(V_1 - V) m^3 / 2M^2 \\ H_0 \end{pmatrix}, \quad b_v = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ m \\ 0 \\ N \\ H_0 \end{pmatrix}$$

$$P = \frac{p_s' V}{T}, \quad M^{-2} = \frac{a_0^2}{U^2}, \quad g = 1 - P(V_1 - V), \quad N = V m^2 (M^{-2} - 1) (1 + P) T$$

Матрица B_1 зависит от значений параметров в стационарном состоянии и, поскольку ее конкретный вид в дальнейшем не существует, выписываться не будет.

Таким образом, уравнение (1.1) с граничными условиями (1.4) и требованием ограниченности при $x \rightarrow \infty$ описывает развитие начальных возмущений $q(x, y, 0) = q_0(x, y)$ за волной и форму самой волны $x = \Psi(x, t)$.

2. Для анализа устойчивости сделаем преобразование Фурье по координате y и преобразование Лапласа по времени. Тогда из (1.1) и (1.4) получим следующую задачу для изображения q^* и Ψ^* :

$$\frac{dq^*}{dx} = A(\tau) q^* + f(x)$$

$$(2.1) \quad q^*(0_+, \tau) = B_1 q_1^*(0_-, \tau) + \Psi^*(\tau) [B_t \tau + i k B_v - B]$$

$$A(\tau) = -A_x^{-1} [i k A_s + I \tau], \quad f(x) = A_x^{-1} q_0(x), \quad A_x^{-1} A_x = 1$$

При этом предполагается, что q и Ψ растут по времени не быстрее, чем экспонента, а $q_0(x, t)$ ограничены. Используя эти ограничения, можно показать [2], что $q^*(x, \tau) = O(1)$ при $x \rightarrow \infty$ для $\text{Re } \tau > 0$.

Найдем собственные значения μ ; матрицы $A(\tau)$

$$\frac{\mu_{1,2}}{k} = \frac{M_m^2 \pm \sqrt{1 + M_m^2 (\Omega^2 - 1)}}{1 - M_m^2} = \frac{S(\Omega)}{1 - M_m^2} \quad \frac{\mu_{3,4,5}}{k} = -\Omega$$

$$\Omega = \frac{\tau}{kU}, \quad M_m^2 = \frac{U^2}{a_0^2 + a_A^2} = \frac{U^2}{a^2}$$

Легко видеть, что для эволюционных волн, когда $M_m^2 < 1$, только одно собственное значение μ_1 имеет положительную действительную часть при $\text{Re } \tau > 0$. Это соответствует тому, что только одна волна малых возмущений является приходящей.

Согласно [2] решение системы (2.1) $q(x, \tau)$ будет ограничено тогда и только тогда, когда

$$(2.2) \quad \theta(0)q(0_+, \tau) = -b_0 = - \int_0^{\infty} \theta(x, \tau)f(x)dx$$

где $\theta(x, \tau)$ – фундаментальное решение однородной системы

$$\frac{d\theta}{dx} = -A'(\tau)\theta(x, \tau)$$

соответствующее μ_1 ($\text{Re } \mu_1 > 0$ при $\text{Re } \tau > 0$).

Здесь $A'(\tau)$ – транспонированная матрица $A(\tau)$. При этом $\theta(x, \tau) \sim e^{-\mu_1 x}$, т. е. при $\text{Re } \tau > 0$ экспоненциально стремится к нулю при $x \rightarrow \infty$.

Используя условие (2.2) и выражения (1.4) для $q(0_+, \tau)$, получим для изображения от возмущения фронта волны

$$(2.3) \quad \Psi^*(\tau) = -[b_0(\tau) + \theta(0, \tau)Bq^*(0_-, \tau)] (\Phi(\tau))^{-1}$$

$$\Phi(\tau) = \theta(0, \tau) [\tau B_x + ikB_y - B]$$

Для исследования устойчивости изучим особенности правой части (2.3). Здесь $q^*(0_-, \tau)$ – лапласовское изображение граничной функции $q_0(t)$ и поэтому регулярно во всей правой полуплоскости. Аналогично, $b_0(\tau)$ регулярна для всех $\text{Re } \tau > 0$, так как q_0 ограничена, а $\theta(x, \tau)$ экспоненциально приближается к нулю при $x \rightarrow \infty$. Таким образом, для $\text{Re } \tau > 0$ $\Psi^*(\tau)$ имеет полюс в правой части тогда и только тогда, когда $\Phi(\tau) = 0$. Поэтому вопрос об устойчивости зависит от знака действительной части корня $\Phi(\tau) = 0$. Положительная действительная часть корня дает экспоненциальное возрастание возмущения.

Определим теперь выражение $\Phi(\tau)$. Величина $\theta(0, \tau)$ является собственным вектором для $A'(\tau)$, соответствующим собственному значению μ_1

$$\theta(0, \tau) = k(1 + N^2) \begin{pmatrix} m(1 + N^2)S(\Omega) \\ \Omega \\ -i \\ -p'_s S(\Omega)/m \\ a_A^2 m S(\Omega) / H_0 M_A^2 \end{pmatrix}, \quad \begin{aligned} N^2 &= \frac{a_A^2}{a_0^2} \\ M_A^2 &= \frac{U^2}{a_A^2} \end{aligned}$$

Используя выражения (1.4) для векторов B_x, B_y, B с точностью до множителя, получим

$$(2.4) \quad \Phi(\Omega) = \Delta r [l - (1 - M^2)r] \Omega^2 + \Omega S(\Omega) [l + 1 - M^2] + \varepsilon [S(\Omega)(N^2 - N_1) - \Omega M_m^2] (1 + P)$$

$$r = \frac{V}{V_1}, \quad \Delta r = 1 - r, \quad l = 2r - M^2 P \Delta r, \quad \varepsilon = \frac{E_0^2}{4\pi m^2 V_1}, \quad N_1 = 1 + \frac{M^2 P}{(1 + P)}$$

Будем определять число корней $\Phi(\Omega)$, лежащих в правой полуплоскости Ω , с помощью принципа аргумента. Рассмотрим обход на плоскости Ω по полукругу большого радиуса R и мнимой оси. Легко показать, что обход по полуокружности в положительном направлении дает приращение аргумента $\Phi(\Omega)$, равного 2π . Поэтому для отсутствия корней в правой полуплоскости необходимо и достаточно, чтобы изменение аргумента $\Phi(\Omega)$ вдоль мнимой оси в отрицательном направлении было бы -2π . Для этого необходимо проследить за числом и взаимным расположением корней $\text{Re } \Phi(iy) = 0$ и $\text{Im } \Phi(iy) = 0$. Последнее было сведено к исследованию взаимного расположения корней многочленов второй и первой степеней на конечном отрезке. При этом многочлены имеют различное аналитическое представление на двух частях рассматриваемого отрезка, что связано с наличием точки ветвления $\Phi(\Omega)$ на мнимой оси.

Из проведенного анализа следует, что ударная волна устойчива при выполнении неравенства (2.5) и одной из следующих систем неравенств (2.6) – (2.12):

$$(2.5) \quad F(l, r, M_m^2) \cdot R_0(M_m^2, e, M^2, N_1) > 0$$

$$(2.6) \quad F\lambda < 0, L > 0$$

$$(2.7) \quad \lambda > 0, F < 0, L < 0$$

$$(2.8) \quad \lambda > 0, F > 0, L > 0, Q > 0, R_1 R_2 > 0$$

$$(2.9) \quad \lambda > 0, F > 0, L > 0, Q < 0, R_1 < 0$$

$$(2.10) \quad \lambda > 0, F > 0, L < 0, Q > 0, R_2 > 0$$

$$(2.11) \quad \lambda < 0, F < 0, Q > 0, R_2 > 0$$

$$(2.12) \quad \lambda < 0, F < 0, Q < 0$$

$$(2.13) \quad \lambda = (1 - M^2) M_m^2 - (1 - M_m^2) [l - r(1 - M^2)]$$

$$F = l - r(1 - M^2) / (1 + M_m), \quad R_0 = M_m^2 (1 - M^2) e (N^2 - N_1) \sqrt{1 - M_m^2}$$

$$L = e \sqrt{1 - M_m^2} - e, \quad e = \varepsilon (1 + P) \frac{M_m^2}{\Delta r}, \quad Q = N^2 - N_1 - M_m$$

$$R_1 = [l - r(1 - M^2)] e^2 + e^2 l (N^2 - N_1) + \lambda l^2 = \\ = [e^2 - (1 - M_m^2) l^2] [l - r(1 - M^2) + (1 - M^2) M_m^2 l^2 - e^2 l (Q + M_m)]$$

$$R_2 = \lambda (N^2 - N_1)^2 - (1 - M^2) M_m^4 - (1 - M_m^2) M_m^2 l (N^2 - N_1) = \\ = (1 - M^2) Q (N^2 - N_1 + M_m) - (1 - M_m^2) (Q + M_m) [l - r(1 - \\ - M^2)] (Q + M_m) - l M_m^2$$

Полученные соотношения содержат пять независимых параметров $(P, \Delta r, M^2, e, N^2)$, характеризующих свойства среды, интенсивность волны и электромагнитное поле.

Функции F и λ явно не зависят от электрического поля и при отсутствии магнитного поля переходят в соответствующие функции для газодинамических волн [2]. При этом для $F > 0, \lambda < 0$ ударная волна устойчива, для $F > 0, \lambda > 0$ — квазистойчива, для $F < 0, \lambda > 0$ — неустойчива. Построим на плоскости lM^2 линии $F=0$ и $\lambda=0$ и выпишем для каждой из областей критерии устойчивости, которые являются дополнением к условиям в газовой динамике. Для определенности будем рассматривать только волны сжатия и считать $P+1 > 0$. Можно показать, что приводимые критерии непротиворечивы, хотя бы в части рассматриваемых областей.

В области I ($F < 0, \lambda > 0$) на фиг. 1 критерии можно свести к следующим неравенствам: в Ia ($l > 0$) $R_0 < 0, L > 0, R_1 < 0$ или $R_0 < 0, L < 0$; в Ib ($l < 0$) $R_0 < 0$. При этом в области Ib при $M^2 < 1$ неравенство $N^2 > N_1$ является достаточным условием устойчивости, а при $M^2 > 1$ неравенство $N^2 < N_1$ — достаточным условием неустойчивости.

В области II ($F > 0, \lambda > 0$) критериями устойчивости будут $Q > 0, R_2 > 0$ или $Q < 0, R_1 < 0, L > 0, R_0 > 0$. В подобласти $l < r(1 - M^2)$ условие $N^2 < N_1$ — достаточное условие неустойчивости.

В области III ($F > 0, \lambda < 0$) имеем $R_0 > 0, L > 0, R_1 < 0$. В подобласти $l < 0$ имеет место неустойчивость, а условие $N^2 < N_1$ — достаточное условие неустойчивости.

В области IV ($F < 0, \lambda < 0$) критериями устойчивости являются $R_0 < 0$ и $Q > 0, R_2 > 0$ или $Q < 0$. Кроме того, неравенство $N^2 < N_1$ — достаточное условие устойчивости.

Таким образом, во всех областях может иметь место как устойчивость, так и неустойчивость в зависимости от характеристик электромагнитного поля.

Заметим, что при конкретизации уравнения состояния, электрическое поле через условия на скачке войдет и в выражение для Δr , т. е. приве-

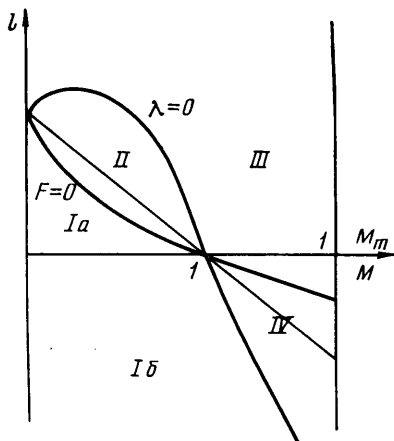
денные неравенства не являются разрешенными относительно электрического поля.

3. Рассмотрим подробнее случай совершенного газа, когда внутренняя энергия $\varepsilon = pV/(\gamma-1)$, а $P = p_s V/T = \gamma-1$, где γ — отношение удельных теплоемкостей. Соотношения на скачке можно представить в виде [9]

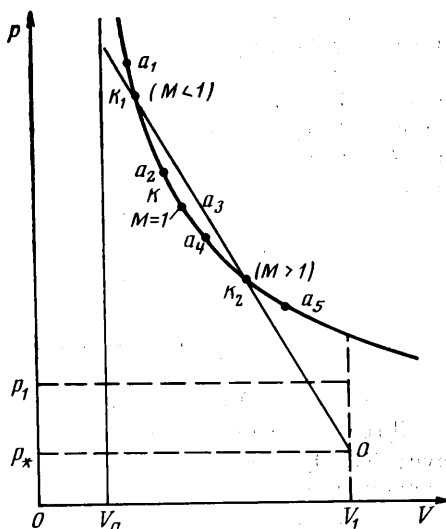
$$(3.1) \quad \left(p + \frac{\gamma-1}{\gamma+1} p_* \right) \left(\frac{V}{V_1} - \frac{\gamma-1}{\gamma+1} \right) = \frac{2\gamma}{\gamma+1} \left[p_1 - \frac{\gamma-1}{\gamma+1} p_* \right]$$

$$(3.2) \quad p - p_* + m^2(V - V_1) = 0, \quad p_* = p_1 - \frac{E_0^2}{8\pi}$$

Здесь p , V , m — давление, удельный объем и поток массы через разрыв. Соотношение (3.1) задает на плоскости V , p гиперболу (фиг. 2). Со-



Фиг. 1



Фиг. 2

отношение (3.2) выражает закон сохранения импульса и задает на V , p пучок прямых, проходящих через точку V_1 , p_* и соответствующих различным значениям потока массы через разрыв. Точки пересечения этих линий задают состояния за разрывом.

Можно показать, что начальная точка (V_1, p_1) всегда лежит ниже верхней ветви гиперболы и выше части нижней ветви, лежащей при $V > 0$. Очевидно, что и точка (V_1, p_*) всегда лежит ниже верхней ветви, поэтому существуют значения m^2 , при которых прямая и верхняя ветви гиперболы пересекаются при $V < V_1$ в двух точках (K_1, K_2). Можно показать, что, как и в случае фронтов с тепловыделением в газовой динамике, в точке касания число Маха за волной $M=1$, а выше точки касания $M < 1$, ниже — $M > 1$. При этом $M_1 > 1$, т. е. оба решения всегда представляют собой сверхзвуковые волны. При учете магнитного поля границей эволюционности для ударной волны будет не $M=1$, а $M_m^2=1$. Поэтому при одном и том же значении m или M_1 могут существовать две эволюционные понижающие ударные волны.

Из (3.1) и (3.2) получим уравнение для определения Δr через M_2 и безразмерную напряженность электрического поля ε , а также связь между ε и числами Маха перед и за волной

$$(3.3) \quad [2 + (\gamma-1)M^2] \Delta r^2 - 2\Delta r(1-M^2) - \gamma\varepsilon M^2 = 1$$

$$(3.4) \quad M_1^2(\gamma\varepsilon)^2 - 4(\gamma\varepsilon)(1 + \gamma M_1^2) + \\ + 4\left(1 - \frac{M_1^2}{M^2}\right)\left(\frac{1}{M_1^2} - \frac{2\gamma M^2 - (\gamma - 1)}{2 + (\gamma - 1)M^2}\right) = 0 \\ \varepsilon = \frac{E_0^2}{4\pi m^2 V_1} = \frac{E_0^2}{4\pi p_1} \frac{1}{\gamma M_1^2}$$

Из последнего соотношения можно получить, что в физической области значений параметров для каждого M^2 величина ε ограничена сверху

$$(3.5) \quad \varepsilon \leq \varepsilon_m = 2\left[1 - \left(1 + \frac{1}{\gamma M^2}\right) \sqrt{\frac{(\gamma + 1)M^2}{2 + (\gamma - 1)M^2}}\right]$$

Здесь знак равенства достигается при $M_1^2 \rightarrow \infty$.

С помощью (3.3) исключим из критериев устойчивости (2.5) – (2.12) величину $\Delta\tau$ и проведем сопоставление полученных неравенств.

В силу неравенства (3.5) путем численного расчета было показано, что $F > 0$ во всей области допустимых значений M^2 , N^2 и γ . Поэтому критерий (2.7), (2.11), (2.12) не выполняется, а (2.5) сводится к неравенству $R_0 > 0$, которое можно заменить одной из следующих систем соотношений:

$$M^2 < 1, \gamma N^2 > 1 + (\gamma - 1)M^2; \quad M^2 < 1, \gamma N^2 < 1 + (\gamma - 1)M^2, \\ \varepsilon < \varepsilon_1(M^2, N^2) \\ M^2 > 1, \gamma N^2 > 1 + (\gamma - 1)M^2, \quad \varepsilon > \varepsilon_1(M^2, N^2)$$

$$\varepsilon_1 = \frac{(1 - M^2)[M^2 + 2(N_1 - N^2)\sqrt{1 - M_m^2}]}{\gamma(1 - M_m^2)(N_1 - N^2)^2[2 + (\gamma - 1)M^2]}$$

Далее численный анализ показал, что при $Q > 0$ из условия $\lambda > 0$ следует $R_2 < 0$, т. е. неравенства (2.10) не имеют места. Во всех оставшихся соотношениях содержатся неравенства $R_1 < 0$, $L > 0$. Эти два неравенства можно свести к условию $\varepsilon < \varepsilon_2(M^2, N^2, \gamma)$, где ε_2 – определенный корень уравнения третьей степени, определяемый, в дальнейшем численно. При этом выполняется неравенство $\lambda < 0$, т. е. условия (2.8) не имеют места.

Таким образом, критериями устойчивости ионизирующей ударной волны в совершенном газе являются

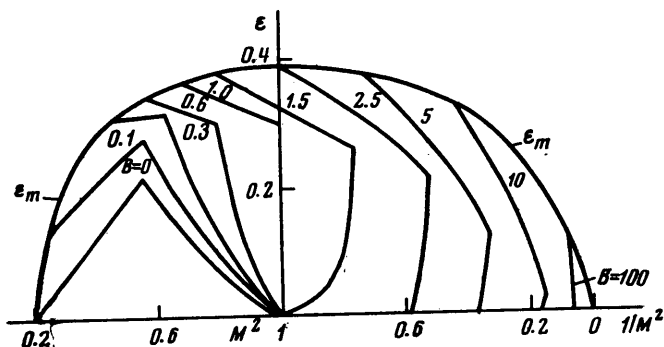
$$M^2 < 1, N^2 < 1 + (\gamma - 1)M^2, \quad \varepsilon < \min(\varepsilon_1, \varepsilon_2); \quad M^2 < 1, N^2 > 1 + (\gamma - 1)M^2, \quad \varepsilon < \varepsilon_2 \\ M^2 > 1, N^2 > 1 + (\gamma - 1)M^2, \quad \max(0, \varepsilon_1) < \varepsilon < \varepsilon_2$$

Нейтральные кривые на плоскости $M^2\varepsilon$, рассчитанные по этим критериям для различных значений магнитного поля и $\gamma = 5/3$, представлены на фиг. 3. Здесь для удобства построения по оси абсцисс при $M^2 > 1$ отложена величина M^{-2} .

Из анализа кривых следует, что при отсутствии магнитного поля ионизирующая ударная волна становится неустойчивой для электрических полей, больших критического. Можно показать, что для малых чисел Маха набегающего потока критическим значениям поля соответствуют несобственная устойчивость, а большим – нейтральные колебания. При фиксированном значении электрического поля волны, близкие к волнам Жуге ($M^2 = 1$), являются неустойчивыми.

Включение магнитного поля оказывает стабилизирующее действие на волну: критические значения электрического поля растут. При этом с ростом магнитного поля граница устойчивости приближается к волне

Жуге по газодинамической скорости звука и при $H_0^2/4\pi p_1 = 1 + (\gamma - 1)M^2$ совпадает с отрезком прямой $M=1$. Заметим, что рассмотрение случая $M=1$ невозможно, так как при этом в (1.3) матрица A становится несобственной. При скоростях Альфвена, больших скорости звука ($N^2 > 1$), устойчивыми могут быть волны и при $M^2 > 1$, т. е. второе решение для фиксированных M_1^2 и ϵ . При этом для фиксированного $1 < M_1^2$ и $1 < N^2 < 1.635$ такая волна неустойчива, если электрическое поле мало ($\epsilon < \epsilon_1$). При больших магнитных полях $N^2 > 1.635$ и $1 < M < M_*$, где $\epsilon_1(N^2, M_*^2) = 0$, волна устойчива при сколь угодно малом электрическом поле, допускаемом постановкой задачи. (Напомним, что пренебрегалось индуцированным электрическим полем по сравнению с заданным.) Изменение грани-



Фиг. 3

цы устойчивости при увеличении N^2 и фиксированных p_1 , $\epsilon^* = E_0^2/4\pi p_1$, показано на адиабате на фиг. 2 точками a_i (i растет с ростом магнитного поля при $N=1$, $i=3$). Из критерия устойчивости (3.9), выражения для ϵ_1 (3.6) и ограничения (3.5) следует, что ударные волны, близкие к волнам Жуге $M_m^2=1$, всегда неустойчивы. Для сильной ударной волны, когда $M_1^2 \gg 1$, критерием устойчивости является неравенство $\lambda < 0$, так как остальные неравенства с точностью до членов порядка M_1^{-2} по сравнению с единицей выполняются автоматически. При этом надо учитывать, что

$$\gamma \epsilon = \frac{E_0^2}{4\pi p_1} \frac{1}{M_1^2}, \quad \gamma N^2 = \frac{H_0^2}{4\pi p_1} \frac{p_1}{p_2} \sim \frac{H_0^2}{4\pi p_1} M_1^{-1}$$

Разлагая λ в ряд до членов порядка M_1^{-2} , получим

$$\gamma E < \gamma + H, \quad E = E_0/8\pi p_1, \quad H = H_0^2/4\pi p_1$$

Таким образом, сильная ударная волна при $H_0=0$ устойчива, если электрическое напряжение не превышает газодинамического перед волной. Магнитное поле стабилизирует волну.

В заключение авторы благодарят А. Г. Куликовского за полезные обсуждения настоящей работы.

Поступила 29 XII 1977

ЛИТЕРАТУРА

1. Бармин А. А., Магидман П. П. Устойчивость ударной волны, ионизирующей газ, в однородном электромагнитном поле. Отчет Ин-та механ. МГУ, 1972, № 1421.
2. Erpenbeck J. J. The stability of steady-state equilibrium detonations. Phys. Fluids, 1962, vol. 5, No. 5.
3. Erpenbeck J. J. The stability of step shocks. Phys. Fluids, 1962, vol. 5, No. 10.
4. Синкевич О. А. Устойчивость плоской ионизирующей ударной волны. Докл. АН СССР, 1971, т. 199, № 1.

5. Синкевич О. А. Устойчивость плоской ионизирующей ударной волны в магнитном поле. Изв. АН СССР, МЖГ, 1972, № 1.
 6. Зубцов В. М., Синкевич О. А., Устойчивость плоской ионизирующей ударной волны в продольном магнитном поле. Изв. АН СССР, МЖГ, 1976, № 2.
 7. Levene L. S. Experimental investigations of normal ionizing shock waves. *Phys. Fluids*, 1968, vol. 11, No. 7.
 8. Варенцов О. К., Ватажин А. Б., Грабовский В. М. Обтекание тел сверхзвуковым электрогазодинамическим потоком с образованием ударного электропроводного слоя газа. Изв. АН СССР, МЖГ, 1975, № 6.
 9. Бармин А. А., Куликовский А. Г. О влиянии продольной составляющей электрического поля на ионизирующие ударные волны в газе. Изв. АН СССР, МЖГ, 1968, № 3.
-