**МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 6 · 1978**

УДК 532.72

О ДВУХ ЗАДАЧАХ КОНВЕКТИВНОЙ ДИФФУЗИИ К ПОВЕРХНОСТЯМ ПЛОХООБТЕКАЕМЫХ ТЕЛ

А. Д. ПОЛЯНИН, П. А. ПРЯДКИН

(Москва)

Задачи о диффузии к частицам несферической формы при больших числах Пекле рассматривались во многих работах (см., например, [1–7]). Решение задачи о массообмене эллипсоидального пузыря при малых числах Рейнольдса получено в [1], а при больших числах Рейнольдса – в [2, 3]. В [4] приводится выражение для диффузионного потока на поверхность твердой эллипсоидальной частицы, обтекаемой однородным стоксовым потоком. Обобщение на случай частиц произвольной формы проведено в [5, 6], а на любое число критических линий на поверхности тела – в [7, 8].

В приближении диффузионного пограничного слоя (ПДПС) рассматривается двумерная задача о стационарной конвективной диффузии к поверхности тела произвольной формы. Полученные простые аналитические выражения более удобны для практических расчётов, чем в [5–8], так как позволяют в той же самой системе координат, в которой рассматривалось поле обтекания частицы, сразу же определять величину диффузионного потока на ее поверхность (по соответствующим гидродинамическим характеристикам).

Решена плоская задача о диффузии к эллиптическому цилиндру в однородном стоксовом потоке. Рассмотрены задачи о диффузии к пластине конечных размеров (в плоском случае) и диску (в осесимметричном случае), плоскость которых нормальна к направлению набегающего потока. Показано, что в отличие от ранее известных результатов (см., например, [4, 6–15]), где полный диффузионный поток был пропорционален кубическому корню из числа Пекле, здесь он пропорционален корню четвертой степени.

1. Постановка задачи. В ПДПС рассматривается двумерная задача о стационарной конвективной диффузии к поверхности тела произвольной формы, обтекаемого ламинарным потоком вязкой несжимаемой жидкости. При анализе используем ортогональную криволинейную систему координат $\{\xi, \eta, \lambda\}$, связанную с поверхностью тела.

Считаем, что координата η направлена вдоль поверхности, а ξ — по нормали к ней, при этом некоторым фиксированным значением $\xi=\xi_0$ задается поверхность тела.

В общем случае вблизи поверхности частицы функцию тока можно представить в виде [5–8]

$$\xi\to\xi_0,\quad \psi=(\xi-\xi_0)^n f(\eta)+o(\xi-\xi_0)^n \quad (\eta^-\leqslant\eta\leqslant\eta^+) \tag{1.1}$$

Здесь для упрощения рассуждений пока считаем, что $f(\eta)\geqslant 0$.

Область течения вблизи поверхности частицы определяется неравенством $\xi\geqslant\xi_0$ и на поверхности тела есть только две изолированные критические точки (нули функции $f(\eta)$) — точки натекания η^- и вытекания η^+. Точкой натекания (вытекания) называется критическая точка поверхности тела, в окрестности которой нормальная компонента скорости жидкости направлена к поверхности (от поверхности).

В ПДПС запишем безразмерное уравнение стационарной конвективной диффузии и граничные условия в предположении постоянства концентрации растворенного в жидкости вещества вдали от частицы и полного его поглощения на поверхности

$$(1.2)\qquad \frac{1}{\sqrt{g_{\xi\xi}}}v_\xi\frac{\partial c}{\partial \xi}+\frac{1}{\sqrt{g_{\eta\eta}}}v_\eta\frac{\partial c}{\partial \eta}=\frac{P^{-1}}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\sqrt{g}}{g_{\xi\xi}}\frac{\partial c}{\partial \xi}\right)$$

$$\xi=\xi_0,\ c=0;\ \xi\to\infty,\ c\to 1$$

$$v_\xi=-\sqrt{\frac{g_{\xi\xi}}{g}}\frac{\partial\psi}{\partial\eta},\quad v_\eta=\sqrt{\frac{g_{\eta\eta}}{g}}\frac{\partial\psi}{\partial\xi}$$

$$g=g_{\xi\xi}g_{\eta\eta}g_{\lambda\lambda},\ P=lUD^{-1}$$

Здесь масштабами являются: характерная скорость потока U, концентрация растворенного в жидкости вещества вдали от частицы c_0, характерный размер (например, радиус) частицы l; D — коэффициент диффузии.

Учитывая (1.1) и переходя к переменным

$$(1.3)\qquad \zeta=P^\nu\psi^{1/n},\quad t=t(\eta,\eta^-)=\frac{1}{n}\int_{\eta^-}^{\eta}\Lambda f^{1/n}(\alpha)\,d\alpha$$

$$\Lambda=[\sqrt{g}g_{\xi\xi}^{-1}]_{\xi=\xi_0},\ \nu=(n+1)^{-1}$$

сведем задачу (1.2) к следующей:

$$(1.4)\qquad \frac{\partial c}{\partial t}-\zeta^{1-n}\frac{\partial^2 c}{\partial\zeta^2}=0,$$

$$c|_{t=0}=1,\quad c|_{\zeta=0}=0,\quad c|_{\zeta\to\infty}\to 1$$

Решение задачи (1.4) имеет вид [10]

$$(1.5)\qquad c=\Gamma^{-1}(\nu)\gamma(\nu,\nu^2\zeta^{n+1}/t),$$

$$\gamma(\nu,\omega)=\int_0^{\omega}\tau^{\nu-1}e^{-\tau}d\tau,\quad \Gamma(\nu)=\gamma(\nu,\infty)$$

Дифференциальный и интегральный диффузионные потоки на поверхность частицы определяются формулами

$$(1.6)\qquad j=\frac{1}{\sqrt{g_{\xi\xi}^{\circ}}}\frac{\partial c}{\partial\xi}\Big|_{\xi=\xi_0}=\nu^{(1-n)\nu}\Gamma^{-1}(\nu)\frac{1}{\sqrt{g_{\xi\xi}^{\circ}}}f^{1/n}(\eta)t^{-\nu}P^\nu$$

$$I=\int_{\lambda_1}^{\lambda_2}\int_{\eta^-}^{\eta^+}j\Lambda\sqrt{g_{\xi\xi}^{\circ}}\,d\eta\,d\lambda=\nu^{-2n\nu}\Gamma^{-1}(\nu)(\lambda_2-\lambda_1)t^{n\nu}(\eta^+,\eta^-)P^\nu$$

$$g_{\xi\xi}^{\circ}=(g_{\xi\xi})_{\xi=\xi_0}$$

Аналогично [7, 8] проведенный анализ обобщается на случай произвольного числа критических линий на поверхности тела. В частности, для полного диффузионного потока имеет место следующая формула:

$$(1.7)\qquad I=\nu^{-2n\nu}\Gamma^{-1}(\nu)(\lambda_2-\lambda_1)P^\nu\sum_{i=1}^{k}t^{n\nu}(\eta_{i+1},\eta_i),$$

$$t(\eta_{i+1},\eta_i)=\frac{1}{n}\left|\int_{\eta_i}^{\eta_{i+1}}\Lambda|f(\alpha)|^{1/n}d\alpha\right|$$

где k — число критических линий, а $\eta_i<\eta_{i+1}$ — корни уравнения $f(\eta)=0$.

Как известно, решение задачи о диффузии к поверхности поглощающей сферической капли, полученное в ПДПС при $\beta\to\infty$ (β — отношение вязкостей капли и окружающей ее жидкости), не переходит в соответствующее решение для твердой сферы. Это связано с тем, что при $\beta\to\infty$ второй член разложения функции тока в ряд по $(\xi-\xi_0)$ становится сравнимым с первым членом и его необходимо учитывать для того, чтобы был выполнен этот предельный переход. Однако диффузионная задача, учитывающая оба члена разложения, достаточно сложна и требует привлечения численных методов.

В [16] показано, что область применимости полученного в ПДПС решения для капли определяется неравенством $\sigma=\beta P^{-1/2}\ll 1$. С учетом этого для показателя n и функции f в промежуточном случае $\sigma\sim 1$ можно предложить следующую интерполяционную формулу:

$$n=\frac{1+2\sigma}{1+\sigma},\quad f(\eta)=\frac{k_1(\beta)+\sigma k_2{}^\circ}{1+\sigma}h(\eta),\quad k_2{}^\circ=k_2(\beta\to\infty) \tag{1.8}$$

и воспользоваться выражениями (1.5), (1.6) для концентрации и полного диффузионного потока.

Здесь считалось, что функция тока вблизи поверхности частицы может быть представлена в виде

$$\xi\to\xi_0,\quad \psi=(\xi-\xi_0)[k_1(\beta)+(\xi-\xi_0)k_2(\beta)]h(\eta)+o(\xi-\xi_0)^2$$

В частности, для капли сферической формы, обтекаемой однородным стоксовым потоком, выражение для $f(\eta)$ (1.8) принимает вид

$$f(\theta)=\frac{2+3\sigma(\beta+1)}{4(\beta+1)(\sigma+1)}\sin^2\theta \tag{1.9}$$

Как будет видно из дальнейшего, интерполяционной формулой (1.8) нельзя пользоваться для плохообтекаемых тел.

2. Конвективная диффузия к эллиптическому цилиндру и пластине. Рассмотрим плоскую задачу о диффузии к поверхности твердого эллиптического цилиндра, форма которого задается уравнением

$$(x/a)^2+(y/b)^2=1 \tag{2.1}$$

где $\{x, y, z\}$ — декартова система координат, a и b — полуоси эллиптического цилиндра, ориентированные соответственно вдоль и поперек набегающего потока; характерным масштабом длины является большая полуось.

В системах координат вытянутого и сплюснутого эллиптического цилиндра, которые определяются

$$\begin{gathered} x=h\operatorname{ch}\xi\cos\eta,\quad y=h\operatorname{sh}\xi\sin\eta,\quad g_{\xi\xi}=g_{\eta\eta}=h^2(\operatorname{sh}^2\xi+\sin^2\eta),\quad g_{zz}=1\\ 1=h\operatorname{ch}\xi_0,\quad b=h\operatorname{sh}\xi_0,\quad (a=1\geqslant b)\end{gathered} \tag{2.2}$$

$$\begin{gathered} x=h\operatorname{sh}\xi\cos\eta,\quad y=h\operatorname{ch}\xi\sin\eta,\quad g_{\xi\xi}=g_{\eta\eta}=h^2(\operatorname{ch}^2\xi-\sin^2\eta),\quad g_{zz}=1\\ a=h\operatorname{sh}\xi_0,\quad 1=h\operatorname{ch}\xi_0,\quad (a\leqslant b=1)\end{gathered} \tag{2.3}$$

поверхность эллиптического цилиндра записывается в виде $\xi=\xi_0$.

Используя поле скоростей, полученное в [17], найдем функцию $f(\eta)$, введенную в (1.1), для вытянутого и сплюснутого эллиптического цилиндра

$$\psi=\begin{cases}-mh\operatorname{sh}\xi[\operatorname{ch}\xi_0\operatorname{sh}\xi_0-\operatorname{sh}^2\xi_0\operatorname{cth}\xi+\xi_0-\xi]\sin\eta, & (a=1\geqslant b)\\ mh\operatorname{ch}\xi[\operatorname{ch}\xi_0\operatorname{sh}\xi_0-\operatorname{ch}^2\xi_0\operatorname{th}\xi+\xi-\xi_0]\sin\eta, & (a\leqslant b=1)\end{cases} \tag{2.4}$$

$$n=2, \quad f(\eta)=\begin{cases} m\sin\eta, & a=1\geqslant b \\ ma\sin\eta, & a\leqslant b=1 \end{cases}$$

$$m=(2-\ln R)^{-1} \quad (\eta_1=0,\ \eta_2=\pi,\ \eta_3=2\pi)$$

где R — число Рейнольдса.

Используя (1.7), получаем следующее выражение для полного диффузионного потока на единицу длины цилиндра:

$$I=I_*=2^{5/3}3^{4/3}(\pi m)^{1/3}\Gamma^{-1}(1/3)\Gamma^{2/3}(3/4)\Gamma^{-2/3}(1/4)P^{1/3}, \quad a=1\geqslant b\geqslant 0 \tag{2.5}$$

$$I=a^{1/3}I_*, \qquad 0<a\leqslant 1=b$$

Отметим, что формула (2.5) для полного диффузионного потока на поверхность вытянутого эллиптического цилиндра справедлива также для пластины, плоскость которой параллельна направлению набегающего потока ($b=0$). Для кругового цилиндра ($a=b=1$) выражение (2.5) дает результат [9].

Из (2.5) следует, что при $a\to 0$ $I\to 0$. Рассмотрим подробнее этот предельный случай, соответствующий поперечно обтекаемой пластине. Из выражения (2.4) видно, что при $a\to 0$ $f\to 0$. Поэтому для определения полного диффузионного потока необходимо учесть следующий член разложения функции тока в ряд по $(\xi-\xi_0)$. Поле течения в этом предельном случае ($a=0$) вблизи пластины представляется в виде (1.1), где

$$n=3,\ f_*(\eta)=(m/3)\sin\eta \tag{2.6}$$

Используя (1.7) и (2.6), получаем выражение для полного потока на поверхность пластины

$$I=2^{19/4}3^{-1/4}\pi^{3/8}\Gamma^{-1}(1/4)\Gamma^{3/4}(2/3)\Gamma^{-3/4}(1/6)(mP)^{1/4} \tag{2.7}$$

Из (2.7) следует, что в данном случае полный диффузионный поток пропорционален $P^{1/4}$, а не $P^{1/3}$, как это имеет место для элллиптического цилиндра конечных размеров и ранее известных случаев [6–15].

3. Диффузия к эллипсоидальной частице и диску. Рассмотрим осесимметричную задачу о конвективной диффузии к твердой эллипсоидальной частице, обтекаемой однородным (поступательным) стоксовым потоком. В системе координат сплюснутого эллипсоида вращения ($\{x,\ y,\ z\}$ — декартова система координат)

$$z=h\,\mathrm{sh}\,\xi\cos\eta,\ \rho=\sqrt{x^2+y^2}=h\,\mathrm{ch}\,\xi\sin\eta \tag{3.1}$$

$$g_{\xi\xi}=g_{\eta\eta}=h^2(\mathrm{ch}^2\xi-\sin^2\eta),\ g_{\varphi\varphi}=h^2\,\mathrm{ch}^2\xi\sin^2\eta$$

поверхность частицы задается уравнением

$$\xi=\xi_0,\ a=h\,\mathrm{sh}\,\xi_0,\ 1=h\,\mathrm{ch}\,\xi_0,\ 0<a\leqslant b=1 \tag{3.2}$$

где a и b — полуоси эллипсоида, ориентированные вдоль и поперек набегающего потока; характерным масштабом длины является большая полуось.

Используем поле скоростей, полученное в стоксовом приближении [18], которое вблизи поверхности частицы представляется в виде

$$\psi=\frac{h^2}{2}\mathrm{ch}^2\xi\times \tag{3.3}$$

$$\times\left\{1-\frac{\mathrm{sh}\,\xi\,\mathrm{ch}^2\xi_0\,\mathrm{ch}^{-2}\xi+(1-\mathrm{sh}^2\xi_0)\,\mathrm{arcctg}(\mathrm{sh}\,\xi)}{\mathrm{sh}\,\xi_0+(1-\mathrm{sh}^2\xi_0)\,\mathrm{arcctg}(\mathrm{sh}\,\xi_0)}\right\}\sin^2\eta$$

$$\xi\to\xi_0,\ \psi=(\xi-\xi_0)^2 f(\eta)+(\xi-\xi_0)^3 f_*(\eta)+o(\xi-\xi_0)^3$$
$$f(\eta)=h^2\,\mathrm{sh}\,\xi_0[\mathrm{sh}\,\xi_0+(1-\mathrm{sh}^2\xi_0)\,\mathrm{arc\,ctg}\,(\mathrm{sh}\,\xi_0)]^{-1}\sin^2\eta$$
$$f_*(\eta)={}^1/_3 h^2\,\mathrm{ch}^{-1}\xi_0(2\mathrm{ch}^2\xi_0-1)[\mathrm{sh}\,\xi_0+$$
$$+(1-\mathrm{sh}^2\xi_0)\,\mathrm{arc\,ctg}\,(\mathrm{sh}\,\xi_0)]^{-1}\sin^2\eta\qquad \eta^-=0,\ \eta^+=\pi$$

При $\varkappa=b/a=O(1)$ для определения интегрального диффузионного потока воспользуемся формулой (1.7), которая с учетом (3.3) приводит к выражению

$$I=2\pi 3^{4/3}\Gamma^{-1}({}^1/_3)t^{2/3}(\pi,0)P^{1/3}\tag{3.4}$$
$$t(\pi,0)={}^1/_4\pi h^2\,\mathrm{ch}\,\xi_0\,(\mathrm{sh}\,\xi_0)^{1/2}[\mathrm{sh}\,\xi_0+$$
$$+(1-\mathrm{sh}^2\xi_0)\,\mathrm{arc\,ctg}\,(\mathrm{sh}\,\xi_0)]^{-1/2},\quad \varkappa\geqslant 1$$
$$t(\pi,0)={}^1/_4\pi h^2\,\mathrm{sh}\,\xi_0\,(\mathrm{ch}\,\xi_0)^{1/2}[(\mathrm{ch}^2\xi_0+1)\times$$
$$\times\mathrm{arc\,th}\,(\mathrm{ch}\,\xi_0)-\mathrm{ch}\,\xi_0]^{-1/2},\quad 0<\varkappa\leqslant 1$$

Здесь полный диффузионный поток на поверхность вытянутого эллипсоида вращения ($0\leqslant\varkappa\leqslant 1$, $a=h\,\mathrm{ch}\,\xi_0=1$, $b=h\,\mathrm{sh}\,\xi_0$) вычислен аналогичным образом с использованием системы координат вытянутого эллипсоида вращения.

Отметим, что формулы (3.4) были получены в [4]. Здесь эти выражения понадобятся для анализа предельного случая $\varkappa\to\infty$ ($\xi_0\to 0$), не рассмотренного ранее и соответствующего плоскому диску, который расположен поперек набегающего потока.

Из (3.4) видно, что при $\varkappa\to\infty$ полный диффузионный поток стремится к нулю. При этом

$$\xi_0\to 0,\ f(\eta)\to 0,\ f_*(\eta)\to 2(3\pi)^{-1}\sin^2\eta\tag{3.5}$$

Следовательно здесь имеет место ситуация, аналогичная случаю поперечно обтекаемой пластины (см. п. 2). Учитывая (1.6) и (3.5), находим полный диффузионный поток на поверхность круглого диска

$$I={}^1/_3 2^{7/2}\Gamma^{-1}({}^1/_4)B^{3/4}({}^1/_2,{}^4/_3)P^{1/4},\tag{3.6}$$
$$B(x_1,x_2)=\Gamma(x_1)\Gamma(x_2)\Gamma^{-1}(x_1+x_2)$$

Обсуждение результатов. Из выражений (2.7), (3.6) видно, что в случае диффузии к поглощающей пластине конечных размеров (в плоском) и диску (в осесимметричном случае), плоскости которых нормальны к направлению набегающего потока, полный диффузионный поток оказывается пропорциональным корню четвертой степени из числа Пекле. В этих случаях диффузионный поток не может быть получен прямым предельным переходом в (2.7), (3.6) при стремлении к нулю длины соответствующей полуоси. Такая ситуация аналогична той, которая получается при анализе тепломассообмена капли и твердой частицы с окружающей жидкостью (см. п. 1), а именно существует промежуточная область малой кривизны поверхности обтекаемых тел (в данном случае сплюснутого цилиндра ($a\to 0$) и эллипсоида вращения ($\varkappa\to 0$)), в которой для вычисления полного диффузионного потока необходимо учитывать два первых члена разложения функции тока по степеням ($\xi-\xi_0$).

Для определения области применимости формул (2.5), (3.4) нужно сравнить два первых члена разложения полного диффузионного потока по малому параметру $P^{-1/3}$ ($I\to P^{1/3}I_1+I_2$). Поэтому область применимости полученных формул определяется из неравенства $I_1/I_2\gg P^{-1/3}$.

Отметим, что результаты проведенного исследования дают основание полагать, что при стоксовом обтекании произвольного тела, часть поверхности σ которого имеет нулевую кривизну, а траектория натекания нормальна σ, полный диффузионный поток на σ будет пропорционален корню четвертой степени из числа Пекле. Это происходит из-за того, что скорость жидкости вблизи поверхности σ в этих случаях оказывается существенно меньше той, которую она имела бы при обтекании гладкого тела с конечным радиусом кривизны в точке натекания.

При поперечном обтекании пластины и диска выражения для локальных диффузионных потоков становятся непригодными вблизи острых кромок. Здесь существенны как нормальный, так и тангенциальный перенос вещества. Поэтому соответствующую диффузионную задачу в окрестности острых кромок нужно исследовать отдельно. Прямое вычисление показывает, что в обоих случаях толщина диффузионного погранслоя будет конечной на острых кромках. Вклад этих областей в полный диффузионный поток на частицу несуществен.

Авторы благодарят Ю. П. Гупало, Ю. С. Рязанцева и Ю. А. Сергеева за полезное обсуждение.

Поступила 27 IX 1977

ЛИТЕРАТУРА

1. *Sy F., Lightfoot E. N.* The effect of distortion on mass transfer to spheroidal drops. A.I.Ch.E. Journal, 1968, vol. 14, No. 5.
2. *Головин А. М.* Растворение эллипсоидального пузыря в жидкости малой вязкости. ПМТФ, 1968, № 6.
3. *Гупало Ю. П., Рязанцев Ю. С., Сергеев Ю. А.* Диффузионный поток на деформированный газовый пузырь при больших числах Рейнольдса. Изв. АН СССР, МЖГ, 1976, № 4.
4. *Sehlin R. C.* Forced — convection heat and mass transfer at large Peclet numbers from an axisymmetric body in laminar flow: prolate and oblate spheroids. M. S. thesis (Chem. Engng.), Carnegie Inst. Technology, Pittsburgh, Pa, 1969.
5. *Волощук В. М.* Фундаментальные решения уравнения диффузионного пограничного слоя. Тр. Ин-та эксперим. метеорол. Гл. упр. гидрометеорол. службы при Сов. Мин. СССР, 1973, вып. 3 (37).
6. *Acrivos A., Goddard J. D.* Asymptotic expansions for laminar forced-convection heat and mass transfer, pt 1. Low speed flows. J. Fluid Mech., 1965, vol. 23, pt. 2.
7. *Гупало Ю. П., Полянин А. Д., Рязанцев Ю. С.* Диффузия к частице при больших числах Пекле в случае произвольного осесимметричного обтекания вязкой жидкостью. ПММ, 1976, т. 40, вып. 5.
8. *Полянин А. Д., Сысков Ю. Н.* Диффузия к цилиндру в случае произвольного обтекания вязкой жидкостью. Приближение диффузионного пограничного слоя. Изв. АН СССР, МЖГ, 1976, № 5.
9. *Натансон Г. Л.* Диффузионное осаждение аэрозолей на обтекаемом цилиндре при малых коэффициентах захвата. Докл. АН СССР, 1957, т. 112, № 1.
10. *Левич В. Г.* Физико-химическая гидродинамика. М., Физматгиз, 1959.
11. *Волощук В. М., Стужнева Л. В.* Диффузионный поток на сферу при малых и средних числах Рейнольдса. Приближение диффузионного пограничного слоя. ПМТФ, 1970, № 2.
12. *Гупало Ю. П., Рязанцев Ю. С.* Диффузия к твердой сферической частице в потоке вязкой жидкости при конечных числах Рейнольдса. Изв. АН СССР, МЖГ, 1969, № 6.
13. *Гупало Ю. П., Рязанцев Ю. С., Улин В. И.* Диффузия к частице в однородном поступательно-сдвиговом потоке. ПММ, 1975, т. 39, вып. 3.
14. *Гупало Ю. П., Рязанцев Ю. С.* Диффузия к частице в случае сдвигового течения вязкой жидкости. Приближение диффузионного пограничного слоя. ПММ, 1972, т. 36, вып. 3.
15. *Friedlander S. K.* Mass and heat transfer to single spheres and cylinders at low Reynolds numbers. A.I.Ch.E. Journal, 1957, vol. 3, No. 1.
16. *Гупало Ю. П., Полянин А. Д., Полянин В. Д., Рязанцев Ю. С.* Об асимптотике решения задачи о конвективной диффузии к капле при больших числах Пекле и конечных числах Рейнольдса. ПМТФ, 1978, № 1.
17. *Berry A., Swain L. M.* On the steady motion of a cylinder through infinite viscous fluid. Proc. Roy. Soc., Ser. A, 1923, vol. 102, No. 719, p. 766–778.
18. *Хаппель Дж., Бреннер Г.* Гидродинамика при малых числах Рейнольдса. М., «Мир» 1976.