

ПЛОСКИЕ ТЕЧЕНИЯ ГАЗА
ПРИ СЛАБОМ ПОДВОДЕ ЭНЕРГИИ

М. Н. КОГАН, А. Н. КУЧЕРОВ, В. В. МИХАЙЛОВ, А. С. ФОНАРЕВ

(Москва)

Исследованы течения совершенного газа в неограниченном пространстве, возникающие при прямолинейном движении системы распределенных источников тепла. Рассмотрены следующие режимы в порядке возрастания числа M : теплопроводный, конвективный, дозвуковой, транзвуковой, сверхзвуковой, гиперзвуковой. Приведены примеры расчетов.

Течениям с распределенными источниками тепла уделяется всевозрастающее внимание. Такие течения важны, например, в проблеме распространения излучения [1-3], при расчете резонатора газодинамического лазера и оптических характеристик луча [4]. В этих задачах большой интерес представляют изменения плотности вследствие поглощения энергии луча, которые в свою очередь могут привести к существенному перераспределению интенсивности излучения. Важными для развития дальнейших приложений представляются и теоретические исследования общего характера при распределенном теплоподводе [7-10].

В настоящей работе рассматриваются течения газа при заданном распределении относительно слабых источников тепла, включенных в некоторый момент времени.

1. Постановка задачи. В однородной покоящейся среде в момент времени $t=0$ включается движущийся источник тепла. Интенсивность источника при $t \geq 0$ в системе отсчета, связанной с зоной подвода энергии, равна $Eg(x/d, y/d)$, где E — характерная энергия, подводимая за единицу времени в единицу объема, а d — характерный размер зоны подвода энергии. При этом источник (зона подвода энергии) движется прямолинейно со скоростью $u_* u(t/t_*)$, где u_* , $t_* = d/u_*$ — характерные скорость и время, которые будут определены ниже. Требуется найти, как изменяются параметры газа в области подвода энергии.

Уравнения сохранения массы, импульса и энергии запишем в системе отсчета, связанной с областью подвода энергии, причем ось x направим против движения источника (по направлению течения газа). В безразмерной форме уравнения будут иметь следующий вид (специальных обозначений для безразмерных величин не вводим):

$$(1.1) \quad \frac{d}{dt} \rho + \rho(\nabla \mathbf{V}) = 0, \quad \frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{V} \nabla)$$

$$\rho \frac{d}{dt} \mathbf{V} + \frac{1}{\kappa M^2} \nabla p = i \rho \frac{\partial u}{\partial t}, \quad \frac{1}{\kappa} \frac{d}{dt} p - \frac{p}{\rho} \frac{d}{dt} \rho = Qg(x, y)$$

$$M = u_* / \sqrt{\kappa p_* / \rho_*}, \quad Q = \frac{Ed}{\rho_* u_* h_*}, \quad h_* = \frac{\kappa p_*}{(\kappa - 1) \rho_*}$$

Здесь κ — показатель адиабаты, M — число Маха, ρ_* , p_* — плотность и давление невозмущенного газа, которые выбраны в качестве характерных величин при обезразмеривании, i — единичный вектор вдоль оси x , h_* — энтальпия невозмущенного газа.

Пусть параметр $Q \ll 1$. В задачах о распространении луча это предположение, как правило, выполняется. В зависимости от числа M имеют место различные режимы течения.

2. **Дозвуковой и сверхзвуковой режимы.** Решение системы (1.1) будем искать в виде рядов по малому параметру Q

$$\rho(x, y, t) = 1 + Q\rho_1(x, y, t) + \dots, \quad \mathbf{V}(x, y, t) = i\mathbf{u}(t) + \\ + Q\mathbf{V}_1(x, y, t) + \dots, \quad p(x, y, t) = 1 + Qp_1(x, y, t) + \dots$$

Подставив эти разложения в (1.1), получим систему линейных уравнений для главных членов возмущения

$$(2.1) \quad \frac{d}{dt} \rho_1 + (\nabla \mathbf{V}_1) = 0, \quad \frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u(t) \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{d}{dt} \mathbf{V}_1 + \frac{1}{\kappa M^2} \nabla p_1 = 0, \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{p_1}{\kappa} - \rho_1 \right) = g(x, y), \quad \rho_1 = 0, \quad p_1 = 0, \\ \mathbf{V}_1 = 0 \quad (t \leq 0)$$

Для случая равномерного движения источника со скоростью u . ($u(t) \equiv 1$) положим $t_* = d/u_*$, а для источника, движущегося с постоянным ускорением a , $t_* = \sqrt{d/a}$, $u_* = at_* = \sqrt{ad}$. С учетом начальных условий из последнего уравнения (2.1) имеем

$$(2.2) \quad \rho_1(x, y, t) = \frac{p_1(x, y, t)}{\kappa} - \int_0^t g[x - X(t) + X(\tau), y] d\tau \\ X(t) = \int_0^t u(t') dt'$$

После несложных преобразований из системы (2.1) получим

$$\frac{d^2}{dt^2} p_1 - \frac{1}{M^2} \nabla^2 p_1 = \kappa u(t) \frac{\partial}{\partial x} g(x, y) \\ p_1|_{t=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial p_1}{\partial t} \right|_{t=0} = \kappa g(x, y)$$

Общее решение этой задачи можно выписать, используя известное решение для неоднородного волнового уравнения [11]

$$(2.3) \quad p_1 = \frac{\kappa M}{2\pi} \left\{ \iint_{r \leq t/M} \frac{g(\xi, \eta) d\xi d\eta}{\sqrt{(t/M)^2 - r^2}} + \right. \\ \left. + \int_0^t d\tau \iint_{r \leq (t-\tau)/M} \frac{\partial}{\partial \xi} g[\xi + X(\tau), \eta] \frac{u(\tau) d\xi d\eta}{\sqrt{(t-\tau)^2/M^2 - r^2}} \right\}$$

где $r = \sqrt{[x - X(t) - \xi]^2 + (y - \eta)^2}$. Из второго уравнения системы (2.1) нетрудно определить $\mathbf{V}_1(x, y, t)$, а из (2.2) найти $\rho_1(x, y, t)$. Однако в общем случае квадратуры (2.3) весьма трудоемки и неудобны в приложениях. (Для частного случая равномерного движения решение получено в [4]. Это решение при $t \rightarrow \infty$ переходит в соответствующие стационарные реше-

ния [12, 13].) Это вызвало поиски более экономичных методов решения. Будем искать решение в виде степенных рядов по t .

Предположим, что функция $g(x, y)$ является сколько угодно раз непрерывно дифференцируемой (во многих практически важных случаях $g(x, y)$ есть гауссова функция $g = \exp(-x^2 - y^2)$ и, следовательно, удовлетворяет этому требованию). Предположим также, что безразмерная функция скорости $u(t)$ является степенной ($u(t) = t^n$). Это тем более оправданно, что часто сигнал (излучение) существует лишь короткое время.

Для примера рассмотрим равноускоренное движение источника $u(t) = t$. Предположим, что

$$\frac{p_1}{\kappa} - \rho_1 = \sum_{k=0}^{\infty} R_k(x, y) t^k$$

Из начального условия следует, что нулевой коэффициент тождественно равен нулю ($R_0(x, y) = 0$). Подставив приведенный выше ряд в уравнение, находим

$$R_{2m} = 0, \quad R_{2m-1} = \left(-\frac{\partial}{\partial x}\right)^{m-1} \frac{g(x, y)}{(2m-1)!!}, \quad m=1, 2, 3, \dots$$

Исключив с помощью последнего уравнения функцию плотности ρ_1 , первые два уравнения системы (2.1) преобразуем к виду

$$(2.4) \quad \frac{d}{dt} \frac{p_1}{\kappa} + (\nabla V_1) = g(x, y), \quad \frac{d}{dt} V_1 + \frac{1}{M^2} \nabla \left(\frac{p_1}{\kappa}\right) = 0$$

Далее решение ищем в виде степенных рядов по t

$$(2.5) \quad \frac{p_1}{\kappa} = \sum_{k=1}^{\infty} t^k A_k(x, y), \quad V_1 = \sum_{k=1}^{\infty} t^k B_k(x, y)$$

$$A_{2l} = 0, \quad A_{2l-1} = \sum_{m=1}^l A_{l,m} \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{m-1} \nabla^{2l-2m} g(x, y), \quad l=1, 2, 3, \dots$$

$$B_{2l-1} = 0, \quad B_{2l} = \sum_{m=1}^l B_{l,m} \left(\frac{\partial}{\partial x}\right) \nabla^{2l-2m-1} g(x, y)$$

Здесь $A_{l,m}$ и $B_{l,m}$ — некоторые постоянные коэффициенты, связанные следующими алгебраическими рекуррентными соотношениями:

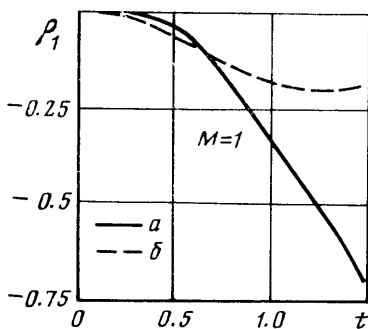
$$A_{l,1} = -\frac{B_{l-1,1}}{2l-1}, \quad A_{1,1} = 1 \qquad B_{l,1} = -\frac{A_{l,1}}{2lM^2}, \quad B_{1,1} = -\frac{1}{2M^2}$$

$$A_{l,m} = -\frac{1}{2l-1} (A_{l-1,m-1} + B_{l-1,m}), \quad 1 < m < l \qquad B_{l,m} = -\frac{1}{2l} \left(B_{l-1,m-1} + \frac{A_{l,m}}{M^2} \right)$$

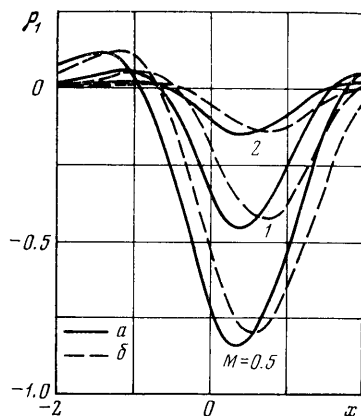
$$A_{l,l} = -\frac{A_{l-1,l-1}}{2l-1} \qquad 1 < m \leq l$$

Для гауссовой функции находим

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^n \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^m \exp(-x^2 - y^2) = (-1)^{n+m} \exp(-x^2 - y^2) H_n(x) H_m(y)$$



Фиг. 1



Фиг. 2

где $H_n(x)$ и $H_m(y)$ — полиномы Эрмита — Чебышева. Решение (2.5) удобно для вычислений на ЭВМ.

Аналогично можно построить решения для других степенных законов движения источников энергии $u(t)=t^n$, и в частности для равномерного движения $u(t)=1$. Примеры расчета возмущения плотности в случаях равноускоренного и равномерного движения представлены на фиг. 1 ($x=0, y=0$) и фиг. 2 ($y=0, t=1$). Кривые a соответствуют случаю ускоренного движения, кривые b — равномерного. Применение рядов оказалось значительно экономичнее, чем использование общей формулы (2.3) даже не при малых t .

3. Медленные дозвуковые движения. При $M \ll 1$ из уравнения сохранения импульса системы (1.1) следует, что с погрешностью $O(M^2)$ давление во всем поле течения постоянно (изобарическая аппроксимация). Если при этом $M \sim Kn$, $Re \sim M / Kn \sim 1$ [14], то существенную роль играют вязкость и теплопроводность (теплопроводный режим). Такие режимы возможны в лабораторных экспериментах [15]. Между теплопроводным и дозвуковым режимами ($Kn \ll M \ll 1$, $Re \gg 1$) можно выделить режим вынужденной конвекции. На этом режиме можно пренебречь как теплопроводностью, так и возмущениями давления.

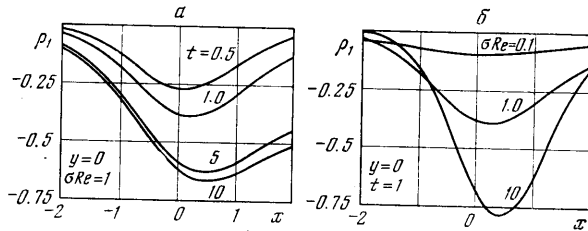
На теплопроводном режиме исходя из закона сохранения энергии для главного члена возмущения плотности ρ_1 можно записать

$$\frac{d}{dt} \rho_1 = (\sigma Re)^{-1} \nabla^2 \rho_1 - g(x, y)$$

Здесь через σ обозначено число Прандтля, Re — число Рейнольдса. Решение этого уравнения при нулевом начальном условии имеет вид

$$(3.1) \quad \rho_1 = -\frac{\sigma Re}{4\pi} \int_0^t \frac{d\tau}{(t-\tau)} \iint_{-\infty}^{+\infty} g[\xi+X(\tau), \eta] \times \\ \times \exp\left\{-\left[(x-X(t)-\xi)^2 + (y-\eta)^2\right] \frac{\sigma Re}{4(t-\tau)}\right\} d\xi d\eta$$

Примеры расчета плотности на оси x для случая теплоподвода по закону Гаусса в равномерный поток газа ($u(t)=1$) представлены для $\sigma Re=1$ на фиг. 3, a , а для $t=1$ на фиг. 3, b . Можно видеть, что картина течения устанавливается за время $t \sim 10$.



Фиг. 3

4. Гиперзвуковой случай. Пусть $M \gg 1$, а параметр Q такой, что $\varepsilon = Q / (\kappa M^2) \ll 1$ (при этом параметр Q не обязательно малая величина). Тогда, следуя [8], решения уравнений (1.1) будем искать в виде ряда по малому параметру ε

$$\rho = 1 + \varepsilon \rho_1 + \dots, \quad p = 1 + \kappa M^2 (\varepsilon p_1 + \dots), \quad V = iu(t) + \varepsilon V_1 + \dots$$

Подставив эти разложения в уравнения (1.1), получим для главных членов возмущения ρ_1, p_1, V_1 следующую систему уравнений:

$$(4.1) \quad \frac{d}{dt} \rho_1 + (\nabla V_1) = 0, \quad \frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u(t) \frac{d}{dx}$$

$$\frac{d}{dt} V_1 + \nabla p_1 = 0, \quad \frac{d}{dt} p_1 = \kappa g(x, y), \quad \rho_1, p_1, V_1|_{t=0} = 0$$

$$(4.2) \quad p_1(x, y, t) = \kappa \int_0^t g[x - X(t) + X(\tau), y] d\tau$$

$$V_1(x, y, t) = - \int_0^t \nabla p_1[x - X(t) + X(\tau), y, \tau] d\tau$$

$$\rho_1(x, y, t) = - \int_0^t (\nabla \cdot V_1[x - X(t) + X(\tau), y, \tau]) d\tau$$

Рассмотрим один конкретный пример. Для гауссова ($g = \exp(-x^2 - y^2)$) источника, движущегося равномерно, квадратуры (4.2) легко вычисляются, и в предельном случае при $t \rightarrow \infty$ полученное решение приобретает вид

$$p_1 = \kappa F(x) e^{-y^2}, \quad u_1 = -p_1,$$

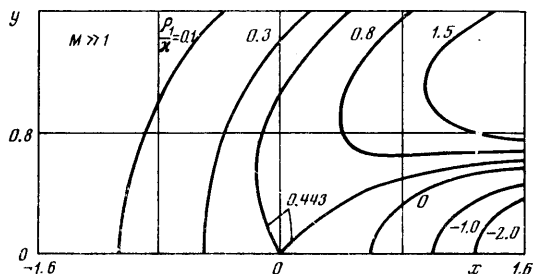
$$F(x) = \int_{-\infty}^x e^{-x'^2} dx',$$

$$v_1 = \kappa y e^{-y^2} [2x F(x) + e^{-x^2}]$$

$$\rho_1 = \kappa e^{-y^2} [(y^2 - 1/2) x e^{-x^2} + (1/2 + y^2 + 2x^2 y^2 - x^2) F(x)]$$

На фиг. 4 приведены изохоры для этого случая.

5. Установившиеся трансзвуковые течения. При равномерном движении источника слабой интенсивности ($Q \ll 1$) со скоростью звука ($M = 1$) возмущения растут на боль-



Фиг. 4

ших временах t от момента включения источника, как \sqrt{t} . Этот результат можно получить из решения для точечного источника [4]. Следовательно, на больших временах t линеаризация уравнений (1.1) становится несправедливой. Известно, что стационарные трансзвуковые течения с малыми возмущениями описываются нелинейными уравнениями газовой динамики. В связи с этим результаты работы [16], в которой в качестве исходных уравнений выбраны линейные уравнения, требуют пересмотра. Оценки показывают, что течение устанавливается за время порядка $t \sim Q^{-2/3}$, а стационарные решения следует искать в виде рядов

$$(5.1) \quad \begin{aligned} \rho &= 1 + Q^{2/3} \rho_1 + \dots, & p &= 1 + Q^{2/3} p_1 + \dots, \\ u &= 1 + Q^{2/3} u_1 + \dots, & v &= Q v_1 + \dots \end{aligned}$$

Уравнения движения для стационарного случая можно записать в виде

$$(5.2) \quad \begin{aligned} (p - M^2 \rho u^2) \frac{\partial u}{\partial x} - M^2 \rho u v \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + (p - M^2 \rho v^2) \frac{\partial v}{\partial y} &= Q g(x, y) \\ \rho \left(u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} \right) u + \frac{1}{\kappa M^2} \frac{\partial p}{\partial x} &= 0, \\ \rho \left(u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} \right) v + \frac{1}{\kappa M^2} \frac{\partial p}{\partial y} &= 0 \\ p \left(u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} \right) \ln \left(\frac{p}{\rho \kappa} \right) &= \kappa Q g(x, y) \end{aligned}$$

Подставляя сюда разложения (5.1) для внутренней области течения с размерами порядка характерного размера зоны подвода энергии d , получим

$$(5.3) \quad v_1 = \int_0^y g(x, y') dy', \quad p_1 = \kappa \rho_1 = -\kappa u_1 = G(x)$$

где $G(x)$ — некоторая функция, которую найдем из условия сращивания с внешним решением. Во внешней области вводим околосзвуковую переменную $Y = y Q^{2/3}$ и получаем

$$(5.4) \quad \begin{aligned} \left[\frac{1 - M^2}{Q^{2/3}} - (\kappa + 1) u_1 \right] \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial Y} &= 0 \\ \frac{\partial v_1}{\partial x} - \frac{\partial u_1}{\partial Y} &= 0, \quad p_1 = \kappa \rho_1 = -\kappa u_1 \end{aligned}$$

Граничное условие при $Y=0$ следует из (5.3)

$$(5.5) \quad v_1(x, Y=0) = \int_0^\infty g(x, y) dy = f(x)$$

Таким образом, внутри области выделения энергии с размером d возмущения скорости, давления и плотности постоянны в плоскостях, перпендикулярных потоку газа (вдоль $x = \text{const}$). Значения этих величин находятся из решения внешней задачи (5.4), (5.5). Легко видеть, что внешняя задача сводится к рассмотрению обтекания полутела околосзвуковым потоком.

Уравнения малых возмущений для трансзвукового потока (5.4) запишем, вводя потенциал возмущенной скорости, в виде

$$(5.6) \quad [K - (\kappa + 1)\varphi_x]\varphi_{xx} + \varphi_{yy} = 0, \quad \varphi_x = u_1, \quad \varphi_y = v_1, \quad K = (1 - M^2)Q^{-2/3}$$

Здесь K — трансзвуковой параметр подобия.

Краевые условия аналогичны условиям непротекания в задаче об обтекании тонкого симметричного полутела

$$(5.7) \quad \varphi_y|_{y=0} = f(x) \quad (|x| \leq 0.5), \quad \varphi_y|_{y=0} = 0 \quad (|x| \geq 0.5)$$

На большом удалении от профиля при $r = \sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow \infty$ положим $\varphi_x \rightarrow 0$, $\varphi_y \rightarrow 0$.

Ниже будет рассмотрен случай выделения энергии по следующему закону:

$$(5.8) \quad g(x, y) = \begin{cases} 1 & (x^2 + y^2 \leq 0.25) \\ 0 & (x^2 + y^2 > 0.25) \end{cases}, \quad f(x) = \sqrt{(0.5)^2 - x^2}, \quad |x| \leq (0.5)^2$$

Для исследования уравнения (5.6) с условиями (5.7) применим конечно-разностный метод релаксации [17], особенностью которого является использование различных разностных операторов в расчетных точках сетки в зависимости от того, принадлежат они области эллиптического или гиперболического типа.

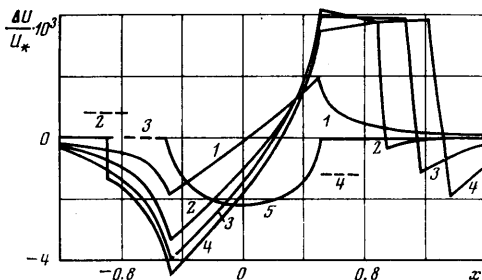
Запись уравнений (5.6) в конечно-разностной форме выполнена и подробно изложена в [18].

Приведем некоторые результаты численных расчетов. Был рассмотрен случай выделения энергии по закону (5.8) при $Q = 0.572 \cdot 10^{-3}$ и различных значениях K , близких к нулю, чтобы выявить, при каких K начинается существенно трансзвуковой режим течения, и получить количественные данные о распределении параметров газа в области прохождения.

На фиг. 5 показано распределение возмущения скорости газа по x -координате при различных значениях K . При $K > 1$ (кривая 1, $K = 2.91$) режим течения еще существенно дозвуковой и наблюдается рост положительного и отрицательного пиков в соответствии с законом подобия Прандтля — Глауэрта для дозвуковых течений.

На фиг. 5 показано распределение возмущения скорости газа по x -координате при различных значениях K . При $K > 1$ (кривая 1, $K = 2.91$) режим течения еще существенно дозвуковой и наблюдается рост положительного и отрицательного пиков в соответствии с законом подобия Прандтля — Глауэрта для дозвуковых течений.

Однако с появлением в потоке местных сверхзвуковых зон (начиная с режима $K \approx 0.8$) картина течения перестраивается, появляется скачок уплотнения и дальнейший рост положительного пика скорости прекращается; образуется течение с сильно развитой локальной зоной сверхзвукового потока, которую замыкает скачок уплотнения (кривая 2, $K = 0.29$). При переходе числа M через единицу скачок уплотнения продвигается вниз по потоку (кривая 4, $K = -0.29$) перед телом образуется отошедшая головная волна. При дальнейшем уменьшении значения K (увеличении числа M) головной скачок становится все менее интенсивным, приближаясь к зоне выделения энергии. Кривая 5 ($K = -2.91$) соответствует сверхзвуковому режиму течения, при котором скачки уже отсутствуют. Кривая 3 соответствует результатам для $|K| \leq 0.029$ и определяет звуковой режим обтекания. Пунктирные линии 2—4 на графике означают уровни критической скорости при $Q = 0.572 \cdot 10^{-3}$ и следующих значениях числа M : 2 — 0.999, 3 — 0.9999 и 1.0001, 4 — 1.001.



Фиг. 5

Возмущение плотности $\Delta\rho/\rho$ с точностью до знака совпадает с возмущением продольной компоненты скорости $\Delta u/u$.

Поступила 15 VI 1977

ЛИТЕРАТУРА

1. Wallace J., Camac M. Effects of absorption at 10.6 μ on laser — beam transmission. J. Opt. Soc. America, 1970, Vol. 60, № 12.
2. Gebhardt F. G., Smith D. C. Self — induced thermal distortion in the near field for a laser beam in a moving medium. IEEE J. Quant. Electronics, 1971, vol. 7, № 2.
3. Wallace J., Lilly J. Q. Thermal blooming of repetitively pulsed laser beams. J. Opt. Soc. America, 1974, Vol. 64, № 12.
4. Ellinwood J. W., Mirels H. Density perturbations in transonic sluing laser beams. Appl. Opt., 1975, vol. 14, № 9.
5. Wallace J., Pasciak J. Thermal blooming of a rapidly moving laser beam. Appl. Opt., 1976, vol. 15, № 1.
6. Biblarz O., Fuhs A. E. Laser cavity density changes with kinetics of energy release. AIAA Journal, 1974, vol. 12, № 8 (Рус. перев.: Библарц, Фухс. Зависимость изменений плотности газа в резонаторе лазера от кинетики процессов энерговыделения. Ракетная техника и космонавтика, 1974, т. 12, № 8).
7. Fuhs A. E. Quasi Area Rule for Heat Addition in Transonic and Supersonic Flight Regimes. Air Force Aero Propulsion Laboratory, Wright — Patterson Air Force Base, Ohio, Techn. Rep., 1972, № 10.
8. Коган М. Н., Михайлов В. В. Об автомодельных решениях при выделении энергии в потоке газа. Изв. АН СССР, МЖГ, 1974, № 6.
9. Zierep J. Theory of blows in compressible media with heat addition. AGAR Dograph, 1974, № 191.
10. E. G. Broadbent. Flows with heat addition. Prog. Aerospace Sci., 1976, vol. 17, № 2.
11. Курант Р., Гильберт Д. Методы математической физики. т. 2. М.—Л., Гостехиздат, 1945.
12. Белоконов В. А., Руденко О. В., Хохлов Р. В. Аэродинамические явления при сверхзвуковом обтекании лазерного луча. Акуст. ж., 1977, т. 23, вып. 4.
13. Кучеров А. Н. Двумерные стационарные течения газа при слабом подводе энергии. Уч. зап. ЦАГИ, 1977, т. 8, № 4.
14. Коган М. Н. Динамика разреженного газа. М., «Наука», 1967.
15. Алешкевич В. А., Сухоруков А. П. Об отклонении мощных световых пучков под действием ветра в поглощающих средах. Письма в ЖЭТФ, 1970, т. 12, вып. 2.
16. Воробьев В. В. Самофокусировка светового пучка в поглощающей среде, движущейся с околосвуковой скоростью. Квантовая электроника, 1976, т. 3, № 3.
17. Murtan E. M., Cole J. D. Calculation of plane steady transonic flows. AIAA Paper, 1970, № 188.
18. Сычев В. В., Фонарев А. С. Безындукционные аэродинамические трубы для трансзвуковых исследований. Уч. зап. ЦАГИ, 1975, т. 6, № 5.