

ТРЕХВОЛНОВОЕ РЕЗОНАНСНОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ВОЗМУЩЕНИЙ В ПОГРАНИЧНОМ СЛОЕ

А. Г. ВОЛОДИН, М. Б. ЗЕЛЬМАН

(Новосибирск)

В несжимаемых течениях типа пограничного слоя в рамках слабонелинейной теории исследуется в зависимости от спектра и начальной интенсивности трехчастотный резонанс волн Толлмина — Шлихтинга, одна из которых распространяется вдоль, а две другие под смежными углами к потоку. В приближении параллельного потока такое взаимодействие приводит к возникновению неустойчивых автоколебаний. С учетом автомодельной деформации профиля скорости основного течения изучается пространственная эволюция связанных возмущений. Показано, что такое развитие может приводить к резкому усилению колебаний, и прежде всего распространяющихся под углом к потоку. Обсуждается роль рассмотренных эффектов в переходном процессе и связь с экспериментальными данными.

Как показывают эксперименты [1, 2], в процессе перехода от ламинарного пограничного слоя к турбулентному области, хорошо описываемая линейной теорией гидродинамической устойчивости, предшествует участку возбуждения гармоник волн Толлмина — Шлихтинга, появления пространственных структур и быстрого роста интенсивности низкочастотных колебаний. Несомненно, что на таком участке явления обусловлены нелинейным характером развития возмущений.

При этом существенную роль может играть резонансное взаимодействие волновых триад. Для достаточно малых амплитуд такое взаимодействие описывается теорией первого порядка [3, 4] и в общем случае нелинейные эффекты, связанные с ним, должны иметь место раньше других. Важное значение резонансных триад для объяснения возникновения трехмерных структур в слое и генерации интенсивных пульсаций уже подчеркивалось в [5, 6]. Поэтому выяснение особенностей эволюции резонансно взаимодействующих возмущений представляется важным для понимания всего процесса перехода.

Рассмотрим течение типа пограничного слоя. Для достаточно слабых возмущений поле скоростей такого потока может быть представлено в виде $u = (U + \varepsilon u, \varepsilon v, \varepsilon w) U_\infty$, где $\varepsilon \ll 1$, $(U, 0, 0)$ отвечает основному потоку, а u, v, w — соответственно x, y, z компонентам возмущения.

Тогда систему безразмерных уравнений и граничных условий для флуктуации запишем в виде

$$(1) \quad L(\eta) = \left(\frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\Delta}{R} \right) \eta = - \frac{\partial U}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial z} + \varepsilon \left(\frac{\partial M_1}{\partial z} - \frac{\partial M_3}{\partial x} \right)$$

$$(2) \quad L(\Delta v) - \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \frac{\partial v}{\partial x} = \varepsilon \left\{ \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) M_2 - \frac{\partial^2 M_1}{\partial y \partial x} - \frac{\partial^2 M_3}{\partial y \partial z} \right\}$$

$$\eta = v = 0 \quad (y=0), \quad (v, \eta) < \infty \quad (y \rightarrow \infty), \quad (v, \eta) = (v^{(0)}, \eta^{(0)}) \quad (t=0)$$

Здесь (v, η) — нормальные к стенке компоненты скорости и вихря

$$(3) \quad \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \begin{pmatrix} u \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial x} \\ -\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta \\ \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix}$$

$$(M_1, M_2, M_3) = \left(u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} + w \frac{\partial}{\partial z} \right) (u, v, w), \quad R = \frac{U_\infty \delta^*}{\nu}$$

Представим возмущение потока набором квазигармонических волн и, используя асимптотический метод [3], будем искать решение (1)–(3) в виде

$$(4) \quad \varepsilon v = \varepsilon \sum_j A_j^{(1)} e^{i\theta_j} \varphi_j(y) + \varepsilon^2 f_{11} + O(\varepsilon^3)$$

$$(5) \quad \varepsilon \eta = \varepsilon \sum_j A_j^{(1)} e^{i\theta_j} \eta_j(y) + \varepsilon^2 f_{21} + O(\varepsilon^3)$$

$$\frac{\partial A_j}{\partial t} = \gamma_j A_j + \sum_{n=1} \varepsilon^n F_n^j, \quad A_j(\varepsilon x, \varepsilon z, \varepsilon t) = A_j^{(1)} e^{i\gamma_j t}$$

Здесь (φ_j, η_j) удовлетворяют (2), (1) при $\varepsilon=0$; A_j , $\theta_j = \alpha_j x + \beta_j z - \omega_j t - i\gamma_j t$ — комплексные амплитуда и фаза волны с волновым вектором $\mathbf{k}=(\alpha, \beta)$, $\Omega(\mathbf{k}) = \omega + i\gamma$ дается неустойчивой ветвью дисперсионного уравнения линейной задачи Орра — Зоммерфельда, F_n^j — операторы, требующие определения.

Тогда в условиях фазового синхронизма

$$(6) \quad (\omega_j = \omega_{j-l} + \omega_l, \mathbf{k}_j = \mathbf{k}_{j-l} + \mathbf{k}_l) \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} + v_{1j} \frac{\partial}{\partial x} + v_{2j} \frac{\partial}{\partial z} - \gamma_j \right) A_j = \varepsilon \sum_l S_l^j A_l A_{j-l} + O(\varepsilon^2)$$

$$A_j(\varepsilon x, \varepsilon z, 0) = A_{j0}, \quad \Delta_k = \frac{\partial^2}{\partial y^2} - (\alpha^2 + \beta^2)$$

$$\begin{pmatrix} v_{1j} \\ v_{2j} \end{pmatrix} = -i \left\langle \frac{\varphi_j^+}{\langle \varphi_j^+ \Delta_k \varphi_j \rangle} \left| \left(\frac{\partial}{\partial \alpha} \right) \left(i\alpha_j U \Delta_k - i\omega_j \Delta_k - \frac{\Delta_k^2}{R} - i\alpha_j \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right) \right| \varphi_j \right\rangle$$

$$\langle f \rangle = \int_0^\infty f dy, \quad S_l^j = \frac{\langle M_l^j(\alpha, \beta, \varphi) \varphi_j^+ \rangle}{\langle \varphi_j^+ \Delta_k \varphi_j \rangle}$$

Здесь (v_{1j}, v_{2j}) — групповая скорость квазигармонического пакета, φ_j^+ — решение сопряженной задачи Орра — Зоммерфельда, S_l^j — коэффициенты связи, M_l^j — правая часть уравнения (2), все члены которой взяты в линейном приближении и $A_l=1$.

В течениях типа пограничного слоя имеет место развитие многих триплетов, компоненты которых в принципе могут участвовать в нескольких резонансных взаимодействиях одновременно. Однако определяющим эффектом для малых, но конечных амплитуд является эволюция троек, состоящих из плоской и пары симметрично наклонных к направлению основного потока волн Толлмина — Шлихтинга с совпадающими критическими слоями. Последнее и обуславливает особо сильную связь в триаде [5].

Будем рассматривать пространственное развитие возмущений, что соответствует экспериментально наблюдаемому случаю стационарного в некотором сечении слоя ($x=x_0$) спектра. Для представляющих интерес типов взаимодействия — плоской волны ($j=1$; $\beta_1=0$) с наклонными ($j=2, 3$;

$\beta_2 = -\beta_3$) — условия синхронизма и уравнения для амплитуд принимают вид

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= 2\alpha, \quad \omega_1(\alpha_1) = 2\omega(\alpha), \quad \beta_2 + \beta_3 = 0 \\ v_0 \frac{\partial A_1}{\partial x} &= \varepsilon S^1 A_2 A_3 + \gamma_1 A_1 \\ (7) \quad \left(v_1 \frac{\partial}{\partial x} \pm v_2 \frac{\partial}{\partial z} \right) A_{2,3} &= \varepsilon S A_1 A_{3,2}^* + \gamma A_{2,3} \\ A_j|_{x_0} &= A_j^0(\varepsilon z), \quad \gamma = \gamma_{2,3}, \quad v_{12} = v_{13} = v_1, \quad S^1 = S_l^1, \quad v_{11} = v_0 \\ v_{22} &= v_{23} = v_2, \quad S = S_l^{2,3}, \quad (\alpha_{2,3}, \omega_{2,3}) = (\alpha, \omega) \end{aligned}$$

Величины S , S^1 , v_l определялись численным интегрированием и для ряда значений (R, α) приведены в таблице. При этом функции $\varphi_j(y)$ нормировались по правилу $\varphi(\delta) = 1$, где δ — толщина пограничного слоя.

R	α	β	ω_1 / α_1	ω / α	S^1	v_0	S	v_1	v_2
650	0.187	0.115	0.3474 -i0.0096	0.3474 -i0.051	-0.184 +i0.122	0.370	1.151 +i0.744	0.333	0.056
650	0.222	0.133	0.3605 -i0.0005	0.3605 -i0.036	0.077 -i0.016	0.388	1.630 +i0.68	0.347	0.064
650	0.350	0.194	0.3928 +i0.0005	0.3928 -i0.008	0.179 -i0.025	0.431	3.680 +i0.15	0.382	0.084
882	0.200	0.120	0.3385 +i0.005	0.3385 -i0.029	0.076 -i0.005	0.359	1.537 +i0.74	0.324	0.056
882	0.254	0.149	0.3555 +i0.012	0.3555 -i0.012	0.062 -i0.017	0.385	2.408 +i0.56	0.342	0.068
882	0.500	0.191	0.3820 -i0.004	0.3820 +i0.005	0.157 -i0.37	0.300	8.091 -i1.61	0.386	0.083
1100	0.250	0.144	0.3440 +i0.014	0.3440 -i0.005	0.080 +i0.015	0.373	2.491 +i0.53	0.329	0.064
1100	0.320	0.178	0.3600 +i0.006	0.3600 +i0.005	0.166 +i0.05	0.394	4.154 +i0.12	0.347	0.075
1100	0.380	0.200	0.3690 -i0.009	0.3690 +i0.008	0.233 +i0.02	0.394	5.966 -i0.39	0.359	0.081
1300	0.292	0.164	0.3463 +i0.010	0.3463 +i0.007	0.145 +i0.075	0.379	3.730 +i0.28	0.332	0.069

Соотношение коэффициентов $|S^1/S| \ll 1$, а также то обстоятельство, что согласно линейной теории гидродинамической устойчивости плоские волны с частотой 2ω теряют устойчивость раньше пространственных с ω , дают основания предполагать, что в «естественных» ситуациях в отсутствие интенсивных внешних источников на начальной стадии существует область параметрического возбуждения трехмерных возмущений.

При этом волна Толлмина — Шлихтинга максимальной амплитуды ведет себя по законам линейной теории или (для достаточных интенсивностей) нелинейно из-за члена самовоздействия ($\varepsilon^3 \rho A_1^2 A_1^*$) — следующего порядка теории. С ростом «боковых» флуктуаций эта стадия сменяется областью нелинейного резонансного взаимодействия всех волн.

На этапе независимого развития двухмерного возмущения система (7) сводится к виду

$$(8) \quad \left\{ \frac{d^2}{dx^2} - \left(2 \frac{\gamma}{v_1} + \frac{d \ln f}{dx} \right) \frac{d}{dx} + |\sigma_\lambda|^2 - |f|^2 - \sigma_\lambda \frac{d \ln f}{dx} \right\} A_{j,\lambda} = 0$$

$$A_{j,\lambda} = A_{j,\lambda}^{\circ}, \quad \frac{d}{dx} A_{j,\lambda} = f(x_0) A_{l,-\lambda}^{\circ} - \sigma_{\lambda} A_{j,\lambda}^{\circ} \quad (x=x_0)$$

$$A_{j,\lambda} = \int_{-\infty}^{\infty} dz e^{-i\lambda z} A_j(\epsilon x, \epsilon z), \quad \sigma_{\lambda} = \frac{i\lambda v_2 - \gamma}{v_1}, \quad f = \frac{\epsilon A_1(\epsilon x)}{v_0} S$$

$$j \neq l, \quad (l, j) = 2, 3$$

В плоскопараллельном приближении параметры вдоль потока инвариантны и для $A_1 \sim \exp(\alpha_1 x/v_0)$ решение (8) выражается в цилиндрических функциях

$$A_{j,\lambda} = \exp \left\{ \frac{x}{2} \left(\frac{\gamma_1}{v_0} - 2 \frac{\gamma}{v_1} \right) \right\} Z_{\mu}(\xi)$$

$$\xi = i \left| \frac{v_0 S^1}{v_1 \gamma} A_1 \right|, \quad \mu = \frac{v_0}{2\gamma} \left[\frac{\gamma}{v_0^2} - 4 \frac{v_2 \lambda}{v_1} \left(\frac{\lambda v_2}{v_1} - \frac{i\gamma}{v_0} \right) \right]^{1/2}$$

Здесь $Z_{\mu}(\xi) \sim I_{\pm\mu}(\xi)$ — модифицированные функции Бесселя. Качественно параметрическое развитие проявляется с ростом $|\xi|$ и при $|\xi| \gg 1$ доминирует над линейным.

В области линейной неустойчивости двумерных возмущений такие эффекты приводят к мощному усилению пространственных волн, инкременты которых растут по экспоненте

$$|A_{j,\lambda}| \sim \exp \left| \frac{v_0 \epsilon}{v_1 \gamma} e^{\gamma_1 x/v_0} \right|$$

В результате интенсивности всех колебаний выравниваются и наступает фаза нелинейного развития, описываемая системой (7). Решение этих уравнений может быть найдено в ряде специальных случаев [7] при упрощающих условиях на параметры задачи. При этом наибольший интерес представляет возможность взрывного нарастания амплитуд, условия которого при $\gamma = \gamma_1$ показаны в [8], и установление автоколебательных режимов для триплета.

Для анализа последних удобно воспользоваться методом фазовых траекторий. Разделим в (7) реальные и мнимые части и при $A_{2,\lambda} = A_{3,\lambda} = A(\epsilon x)$ получим

$$(9) \quad \begin{aligned} \frac{\partial b_1}{\partial x} &= \gamma_1 b_1 + b^2 \cos \Phi, & \frac{\partial b}{\partial x} &= \gamma b + b b_1 \cos(\Psi - \Phi) \\ \frac{\partial \Phi}{\partial x} &= 2b_1 \sin(\Psi - \Phi) - \frac{b^2}{b_1} \sin \Phi, & \Psi &= \arg S + \arg S^1 \\ \Phi &= \arg A_1 - \arg(A^2 S^1), & b_1 &= |\epsilon A_1 S|, \quad b = |\epsilon^2 S S^1 A^2|^{1/2} \end{aligned}$$

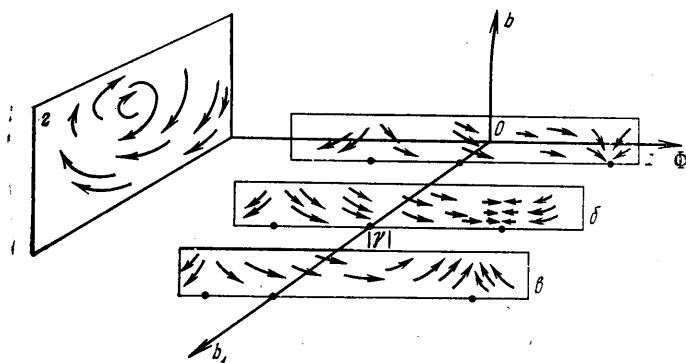
В пространстве (b_1, b, Φ) наряду с тривиальным стационарным состоянием ($b = b_1 = 0$, $\Phi = n\pi$) типа устойчивого ($\gamma > 0$) или неустойчивого ($\gamma < 0$) седла появляются неподвижные точки

$$\left(b_1 = -\frac{\gamma}{\cos(\Psi - \Phi_0)}, \quad b = \left(-\frac{b_1 \gamma_1}{\cos \Phi_0} \right)^{1/2}, \quad \Phi_0 \right)$$

где Φ_0 — корни уравнения $\gamma_1 \tan \Phi_0 = 2\gamma \tan(\Psi - \Phi_0)$.

В рассматриваемых потоках число и характер таких состояний изменяются в зависимости от R и спектральных характеристик. Например, согласно расчетам при $R=882$ и $\alpha=0.254$ автоколебаний нет, однако при $\alpha=0.5$ и 0.2 появляются на периоде Φ особенности типа устойчивого и неустойчивого седла-фокуса. Возможны режимы с парой стационарных точек: $R=1300$, $\alpha=0.292$ — седло-фокус и неустойчивое седло; $R=1100$, $\alpha=0.32$ — пара седло-фокусов.

Влияние резонансной связи хорошо прослеживается на сечениях $b_1 = \text{const}$ фазового объема. Для $R=650$, $\alpha=0.35$ такие плоскости качественно изображены на фиг. 1 (а, б, в) и показывают процесс раскачки затухающих по линейной теории возмущений в окрестности $\Phi=\Psi$. На фиг. 1 (г) представлено соответствующее сечение объема плоскостью (b, b_1) .



Фиг. 1

Общим для всех рассмотренных случаев является отсутствие устойчивых стационарных точек, т. е. в потоке не могут образоваться устойчивые вторичные течения, связанные с трехволновыми взаимодействиями.

Зависимость картины движения от R делает существенным слабую неоднородность пограничного слоя вдоль течения. Ее учет приводит к тому, что параметры становятся функциями продольной координаты, а в уравнении для амплитуд появляются дополнительные члены $\sim \partial^n / \partial x^n (\varphi_j, U, \alpha_j)$ и множитель $e^{\pm i \Delta \alpha}$ при коэффициентах S_j^i [9], связанный с десинхронизацией

цией $-\Delta \alpha = \int_{x_0}^x (\alpha_1(x) - 2\alpha(x)) dx$. Слабая зависимость ($\Delta \alpha \approx \text{const}$) и рас-

четы [10] членов высших порядков по параметру неоднородности $(\partial U / \partial x) \sim \sim \epsilon_1 \ll 1$ позволяют ограничиться локально-параллельным приближением для выявления качественных эффектов резонансных взаимодействий.

В области параметрического развития (A_1 заданного вида) решение может быть получено из (9)

$$|A_{2,3}| = N_1 \exp \int_{x_0}^x b_1(y) \operatorname{th} \left(2 \int_{x_0}^y b_1(z) dz + N_2 \right) dy$$

где (N_1, N_2) — постоянные, определяемые из граничных условий.

Для произвольного соотношения амплитуд развитие триплетов исследовалось численно интегрированием системы (7) с граничными условия-

ми $A_{2,\lambda}=A_{3,\lambda}=a \exp(\lambda z)$, $A_1=a_1$ при $x=x_0$ и с учетом члена самовоздействия $\varepsilon^2 \rho(\varepsilon_1 x) A_1^2 A_1^*$ для плоской волны.

На фиг. 2, 3 показана зависимость скоростей роста плоских (I) и трехмерных возмущений от числа R для $\omega_1=100 \cdot 10^{-6}$ и $\omega_1=125 \cdot 10^{-6}$ (нижняя часть фиг. 2). Скобками соединены кривые нарастания связанных возмущений, а числа на скобках показывают величину $\lambda=(0, 0.02, 0.05)$. На оси R выделен отрезок, соответствующий внутренней области нейтральной кривой для заданных частот ω_1 (nn). В случае $|A_1| \gg |A|$ поведение плоской волны близко к предсказанному линейной теорией. Это поведение сохраняется пока интенсивность пространственных флуктуаций не приблизится к плоским и не начнет обгонять их, после чего все взаимодействующие волны начинают резко нарастать. На участке сближения амплитуд закон развития инкрементов низкочастотных возмущений имеет близ-

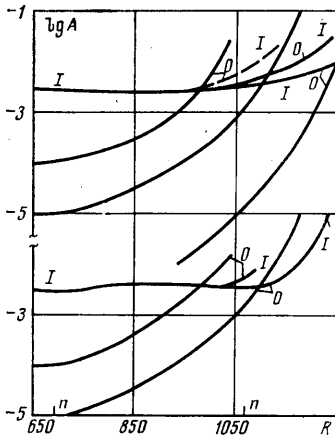
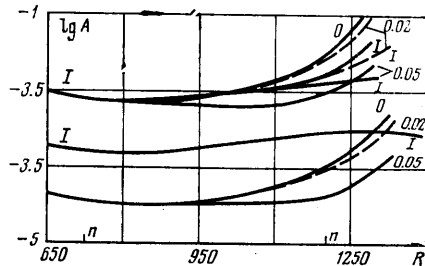


Рис. 2



Фиг. 3

кий к экспоненциальному характер, не нарушаемый изменением их начальных интенсивностей, и хорошо описывается приближением параметрического взаимодействия. Изменение ω качественно сохраняет результат.

Поведение меняется при сближении уровней возмущений. С понижением начальной амплитуды a_1 появляются участки развития возмущений по линейной теории. Область параметрического взаимодействия сокращается, и при совпадении интенсивностей $a=a_1$ (фиг. 3) нелинейные эффекты проявляются непосредственно за фазой независимого развития. Во всех рассмотренных случаях влияние самовоздействия на эволюцию волн оказывалось несущественным.

Неоднородность граничных условий не нарушает качественно картины развития, однако снижает скорость нарастания таких z -модулированных волн (фиг. 3). С ростом инкрементов и амплитуд $(\partial/\partial x \ln A_j; \varepsilon A_j) \rightarrow 1$, справедливость рассматриваемого приближения нарушается. Во-первых, становятся важными члены $\sim |A_j|^2 A_i$, описывающие конкуренцию возмущений не только внутри одного триплета, но и возмущений, принадлежащих разным резонансным тройкам. Эти члены приводят, как правило, к снижению скоростей роста. Во-вторых, становится неприменимой сама слабонелинейная теория, в частности, из-за явлений в критическом слое, который нельзя больше считать линейным [11]. (В анализируемой области параметров $\omega=10^{-4}; 1.25 \cdot 10^{-4}$ предельные для применения асимптотического метода амплитуды имеют порядок 10^{-2} .) Тем не менее можно ожидать, что ряд особенностей перехода в пограничном слое является ре-

зультатом развития «независимых» триплетов на начальной стадии нелинейности. Действительно, проведенный анализ позволяет нарисовать картину, качественно близкую к наблюдаемой экспериментально [1, 2]. Возбужденное колебание с частотой ω приводит к возникновению плоской волны Толлмина — Шлихтинга с амплитудой, превышающей амплитуды всех других возмущений в спектре. На некотором этапе в потоке генерируются гармоники этой волны (результат самовоздействия) и в спектре выделяются колебания $n\omega$ ($n=2, 3, \dots$). В силу специфики пограничного слоя характер развития основной волны A_1 близок к линейному. Одновременно идет параметрическая перекачка энергии к половинным частотам, что приводит к возникновению субгармоник и пространственных структур. Естественно ожидать наиболее значительного усиления субгармоники основной волны.

Можно предположить, что дальнейшее развитие неоднозначно и зависит от спектра возбужденных колебаний. Если уже вначале трехмерные волны достаточно интенсивны, то резонансный механизм осуществит их быстрое нарастание и в результате нелинейного процесса в потоке возникнет режим, носящий многоволновой существенно трехмерный характер. Такая картина, по-видимому, соответствует наблюдениям [2], где уже на начальной стадии имели место конечные пространственные возмущения. Вероятно, вид потока определил также регулярность течения по z , что не должно иметь место в условиях произвольного распределения начального спектра пространственных колебаний. Другая возможность осуществима в случае, когда максимальное двумерное возмущение достигает уровня, при котором становятся существенными эффекты нелинейного критического слоя, тогда как другие флуктуации все еще малы.

При этом проявления таких эффектов, как трехмерность, можно ожидать на более поздней стадии, а сам процесс примет вид поэтапного «развала» плоской волны. Подобное развитие, по-видимому, наблюдалось в экспериментах [1].

Авторы благодарят В. Я. Левченко за обсуждение работы.

Поступила 22 III 1977

ЛИТЕРАТУРА

1. Качанов Ю. С., Козлов В. В., Левченко В. Я. Нелинейное развитие волны в пограничном слое. Изв. АН СССР, МЖГ, 1977, № 3.
2. Klebanoff P. S., Tidstrom K. D., Sargent L. M. The three-dimensional nature of boundary-layer instability. J. Fluid Mech., 1962, vol. 12, No. 1.
3. Зельман М. Б. О нелинейном развитии возмущений в плоскопараллельных потоках. Изв. СО АН СССР, Сер. техн. н., 1974, вып. 3, № 13.
4. Usher J. R., Craik A. D. D., Hendrics F. Nonlinear wave interactions in shear flows, pt 2. Third — order theory. J. Fluid Mech., 1975, vol. 70, No. 3.
5. Craik A. D. D. Nonlinear resonant instability in boundary layers. J. Fluid Mech., 1971, col. 50, No. 2.
6. Шерн В. Н. О неустойчивости к трехмерным возмущениям. Изв. АН СССР, МЖГ, 1976, № 5.
7. Рабинович М. И., Фабрикант А. Л. Нелинейные волны в неравновесных средах. Изв. вузов, Радиофизика, 1976, т. 19, № 5, 6.
8. Wilgelmsen H., Stenflo L., Engelmann F. Explosive instabilities in the well-defined phase description. J. Math. Phys., 1970, vol. 11, No. 5.
9. Зельман М. Б. О нелинейном развитии возмущений в слабонеоднородных потоках несжимаемого вязкого газа. В сб. «Газодинамика и физическая кинетика». Новосибирск, 1974.
10. Bouthier M. Stabilité linéaire des écoulements presque parallèles, pt 2. La couche limite de Blasius. J. Mecanique, 1973, vol. 12, No. 1.
11. Lin C. C. On the instability of laminar flow and its transition to turbulence. Boundary Layer Res. Sympos. Freiburg, Germany, 1957. Berlin, Springer-Verlag, 1958.