

ОБ УСТОЙЧИВЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ ВОЛНАХ
В ТЕЧЕНИИ ПУАЗЕЙЛЯ

Ю. М. ШТЕМЛЕР

(Москва)

Изучаются нелинейные волны Толмина — Шлихтинга [1-8]. Исследование проводится с помощью модифицированного метода Стюарта — Ватсона [1-3]. При жестком режиме возбуждения в разложениях по амплитуде автоколебаний учитываются члены вплоть до пятого порядка малости. Рассмотрена устойчивость автоколебаний по отношению к двумерным и трехмерным возмущениям.

1. Уравнения движения и неразрывности вязкой несжимаемой жидкости имеют вид

$$(1.1) \quad \mathbf{V}_t + \mathbf{V} \nabla \mathbf{V} = -\nabla P + \Delta \mathbf{V} / R, \quad \nabla \mathbf{V} = 0$$

Здесь P — давление; $\mathbf{V} = \{U, V, W\}$; U, V, W — проекции скорости на оси x, y, z соответственно; $R = U^0 l / \nu$ — число Рейнольдса, U^0 — средняя скорость по расходу, l — полуширина канала, ν — кинематическая вязкость.

Скорость двумерных волн Толмина — Шлихтинга $\mathbf{V} = \mathbf{V}(t, x, y)$ ищем в виде [1-3]

$$(1.2) \quad \begin{aligned} \mathbf{V} = & \mathbf{V}_0(y) + |A|^2 \mathbf{V}_2(y) + |A|^4 \mathbf{V}_4(y) + \dots \\ & \dots + 2 \operatorname{Re} \{ A [\mathbf{V}_{11}(y) + |A|^2 \mathbf{V}_{13}(y) + |A|^4 \mathbf{V}_{15}(y) + \dots] \exp(is) + \\ & + A^2 [\mathbf{V}_{22}(y) + |A|^2 \mathbf{V}_{24}(y) + \dots] \exp(2is) + A^3 [\mathbf{V}_{33}(y) + \dots] \exp(3is) + \dots \} \end{aligned}$$

Для давления $P = P(t, x, y)$ также вводится разложение типа (1.2). Комплексная амплитуда $A(t) = |A| \exp(i\varphi)$ в (1.2) удовлетворяет уравнению

$$(1.3) \quad \frac{dA}{dt} = \operatorname{Re}(i\omega_0)A + i\omega_2 |A|^2 A + i\omega_4 |A|^4 A + \dots$$

$$\mathbf{V}_{nm} = \{U_{nm}, V_{nm}, 0\}, \quad \mathbf{V}_m = \{U_m, 0, 0\}$$

$$\mathbf{V}_0 = \{3/2(1-y^2), 0, 0\}, \quad i\omega_m = a_m + ib_m$$

$$a_0 = \alpha c_i, \quad b_0 = -\alpha c_r, \quad s = \alpha x + \operatorname{Re}(\omega_0)t$$

Здесь P_0 и \mathbf{V}_0 — давление и скорость течения Пуазейля; ω_m — неизвестные константы, подлежащие определению; ω_0 — собственное значение линейной задачи; α — продольное волновое число.

Следуя [1], будем искать автоколебательные решения, для которых $\dot{a}|A|/dt = 0$. При $\delta = a_2^2 - 4a_0 a_4 > 0$ и $(-a_2 \pm \sqrt{\delta}) a_4^{-1} > 0$ имеем из (1.3)

$$(1.4) \quad |A_k|^2 = \frac{-a_2 + k\sqrt{\delta}}{2a_4}, \quad \Delta\omega \equiv \frac{d\varphi_k}{dt} = b_2 |A_k|^2 + b_4 |A_k|^4, \quad k = \pm 1$$

Заметим, что при $a_0 a_4 a_2^{-2} \rightarrow 0$

$$|A_q|^2 \rightarrow -\frac{a_0}{a_2}, \quad |A_{-q}|^2 \rightarrow -\frac{a_2}{a_4}, \quad q = \text{sign}(a_2)$$

Подставляя (1.3) и разложения вида (1.2) для V и P в (1.1) и приравнявая коэффициенты при одинаковых гармониках одного порядка по A , получим систему уравнений для V_{nm} и функции тока среднего течения $f_m (U_m = df_m / dy)$ [3].

Ограничимся рассмотрением антисимметричных колебаний [1]. Тогда при $y=0$ для нечетных значений m $V_{nm}'(0) = V_{nm}''(0) = 0$, а для четных — $V_{nm}(0) = V_{nm}''(0) = 0$ и $f_m(0) = f_m''(0) = 0$. На стенке канала должны быть удовлетворены условия прилипания $V_{nm}(1) = V_{nm}'(1) = 0$. Кроме того, необходимо поставить условия нормировки [1]: $V_{11}(0) = 1$, $V_{1m}(0) = 0$ (m — нечетное число).

Нелинейную задачу можно рассмотреть в предположении постоянства среднего расхода [1, 4, 5] или постоянства среднего градиента давления [5, 6]. В первом случае постоянные P_{mx} определяются из условий $f_m(1) = 0$, во втором — $P_{mx} = 0$ ($m = 2, 4, \dots$).

Параметры ω_2 и ω_4 находились из условия разрешимости систем для V_{13} и V_{15} (с применением «алгебраического» способа отыскания поправок ω_2 , ω_4 [3]).

На верхней ветви и на части нижней ветви нейтральной кривой $a_2 > 0$ [1]. Следовательно, при малых $a_0 < 0$ имеет место жесткий режим возбуждения автоколебаний, и приближения с двумя членами в уравнении (1.3) недостаточно. Необходимо учесть следующий член в уравнении (1.3): $i\omega_4 |A|^4 A$ [3]. Расчеты показали, что $a_4 < 0$ (при этом b_2 и b_4 также разных знаков: $b_2 < 0$, $b_4 > 0$). Таким образом, существует автоколебательный режим A_{-1} : $|A_{-1}|^2 = -a_2 / a_4$. На фиг. 1 приведены зависимости $|A_{-1}|^2$ и $\Delta\omega_{-1}$ от числа Рейнольдса при $c_i = 0$.

Из сравнения расчетов, проведенных в предположении постоянства среднего расхода и среднего градиента давления (при критических значениях параметров $c_i = 0$, $\alpha = 1.02$, $R_* = 3848$), следует, что амплитуда автоколебаний $|A_{-1}|$ меняется незначительно, а поправка к частоте $\Delta\omega_{-1}$ уменьшается по абсолютной величине на 30%.

На фиг. 2–4 приводятся графики функций V_{nm} и U_m , соответствующие критическим значениям параметров на нейтральной кривой ($\alpha = \alpha_*$, $R = R_*$, $c_i = 0$). Кривые 1–4 изображают: на фиг. 2 — $\text{Re } V_{11}$, $50 \text{ Im } V_{11}$, $10^{-2} \text{ Re } V_{13}$, $10^{-2} \text{ Im } V_{13}$; на фиг. 3 — $10^{-1} U_2$, $10^{-4} U_4$, $10^{-2} \text{ Re } V_{33}$, $10^{-2} \text{ Im } V_{33}$; на фиг. 4 — $\text{Re } V_{22}$, $10^{-1} \text{ Im } V_{22}$, $10^{-4} \text{ Re } V_{24}$, $10^{-4} \text{ Im } V_{24}$.

2. Пусть амплитуда волны Толмина — Шлихтинга слабо изменяется в зависимости от поперечной координаты z .

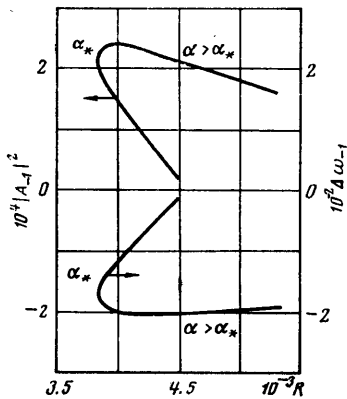
Уравнение для нее может быть получено методом усреднения [7–11] и с учетом членов пятого порядка по амплитуде имеет вид [3]

$$(2.1) \quad \frac{\partial A}{\partial t} + i\omega_0 \frac{\partial^2 A}{\partial z^2} = \text{Re}(i\omega_0)A + i\omega_2 |A|^2 A + i\omega_4 |A|^4 A$$

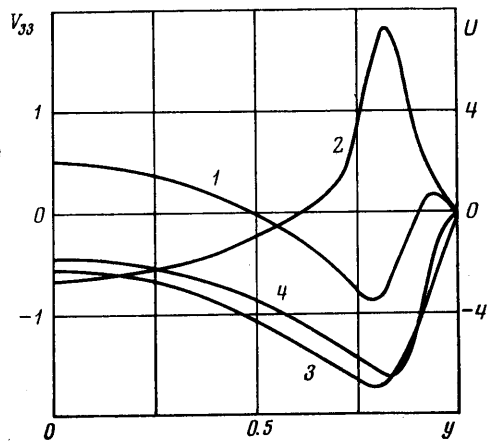
$$\omega_0 = \omega(\beta^2 = 0), \quad \dot{\omega} = \frac{\partial \omega}{\partial \beta^2}, \quad i\dot{\omega}_0 = i\dot{\omega}(\beta^2 = 0) = \dot{a}_0 + i\dot{b}_0$$

где $\omega(\beta^2)$ — собственное значение линейной трехмерной задачи; β — поперечное волновое число.

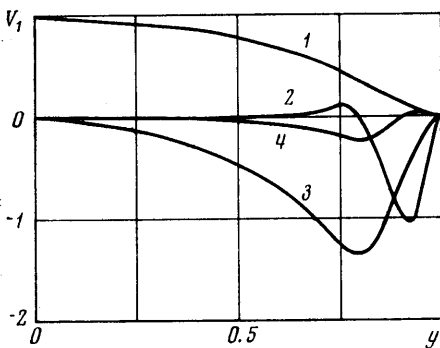
Коэффициент ω_0 в (2.1) находится с помощью разложения линейной трехмерной задачи по малому параметру $\varepsilon = \beta^2$ (с собственной функцией V



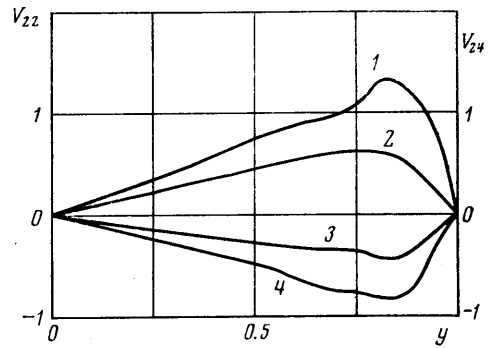
Фиг. 1



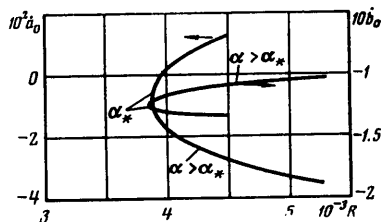
Фиг. 3



Фиг. 2



Фиг. 4



Фиг. 5

собственным значением ω и условием нормировки $V(0) = 1$

$$\begin{aligned}
 &L(\varepsilon, \omega) V = 0 \\
 &V'(0) = V'''(0) = V(1) = V'(1) = 0 \quad (V(0) = 1) \\
 (2.2) \quad &L(\varepsilon, \omega) \equiv [D^2 - \alpha^2 - \varepsilon]^2 - i\alpha R [(U_0 + \omega/\alpha)(D^2 - \alpha^2 - \varepsilon) - D^2 U_0]
 \end{aligned}$$

Представим V и ω в виде рядов по ε

$$V = V_0 + \varepsilon V_1 + \dots, \quad \omega = \omega_0 + \varepsilon \omega_1 + \dots$$

При $\varepsilon = 0$ из (2.2) следует

$$L_0 V_0 = 0, \quad V_0'(0) = V_0'''(0) = V_0(1) = V_0'(1) = 0 \quad (V_0(0) = 1)$$

Уравнение для коэффициентов разложений V и ω можно получить повторным дифференцированием (2.2) по ε , полагая затем $\varepsilon=0$ [12]. Для \dot{V}_0 и $\dot{\omega}_0$ получим

$$LV_0 = -\frac{\partial L}{\partial \varepsilon} V_0 - \dot{\omega}_0 \frac{\partial L}{\partial \omega} V_0$$

$$\dot{V}_0'(0) = \dot{V}_0'''(0) = \dot{V}_0(1) = \dot{V}_0'(1) = 0, \quad (\dot{V}_0(0) = 1)$$

Для \dot{V}_0 ставится та же задача, что и для V_0 , но с ненулевой правой частью. Условие разрешимости этой системы определяет значение ω_0 (которое также находится «алгебраическим» методом). На фиг. 5 приведены зависимости $\dot{a}_0(R)$ и $\dot{b}_0(R)$ при $c_i=0$.

Исследуем автоколебательные режимы (1.4) на устойчивость в рамках уравнения (2.1). Представим A в виде суммы амплитуд автоколебания и трехмерных возмущений. Поскольку в уравнение (2.1) входит только вторая производная по z , возмущение ищется в виде суммы двух членов, пропорциональных $\exp(i\beta z)$ и $\exp(-i\beta z)$

$$(2.3) \quad A = A_k + B_1 \exp[i(\varphi_k + \beta z)] + B_{-1} \exp[i(\varphi_k - \beta z)], \quad k = \pm 1,$$

$$B_n(t) = |B_n| \exp(i\psi_n)$$

где $B_n(t)$ — комплексная амплитуда возмущений, ψ_n — разность фаз между возмущениями и основной волной, $n = \pm 1$. Подставим (2.3) в (2.1). Используя (1.4), получим, что [3] $B_n \sim \exp(\lambda_k t)$ ($t \rightarrow \infty$)

$$(2.4) \quad \begin{aligned} \lambda_k(|A_k|^2, \beta^2) &= \dot{a}_0 \beta^2 + a_0 + 2a_2 |A_k|^2 + 3a_4 |A_k|^4 + \sqrt{\gamma_k} \\ \gamma_k &= [|A_k|^4 |\Omega_k|^2 - (\dot{b}_0 \beta^2 + b_2 |A_k|^2 + 2b_4 |A_k|^4)^2] \\ \Omega_k &= \omega_2 + 2\omega_4 |A_k|^2 \end{aligned}$$

Рассмотрим значение λ_k в (2.4) при $\beta=0$ (возмущения двумерны)

$$(2.5) \quad \begin{aligned} \lambda_k(|A_k|^2, 0) &= a_2 |A_k|^2 + 2a_4 |A_k|^4 + \\ &+ |a_2 |A_k|^2 + 2a_4 |A_k|^2| \end{aligned}$$

Используя (1.4), получим, что

$$a_2 |A_k|^2 + 2a_4 |A_k|^4 = k |A_k|^2 \sqrt{\delta}$$

из (2.5) следует

$$\lambda_{-1}(|A_{-1}|^2, 0) = 0, \quad \lambda_1(|A_1|^2, 0) = 2|A_1|^2 \sqrt{\delta} \geq 0$$

т. е. автоколебательное течение с амплитудой A_{-1} нейтрально устойчиво, а с амплитудой A_1 — неустойчиво относительно двумерных возмущений.

Рассмотрим устойчивость автоколебаний относительно трехмерных возмущений ($\beta \neq 0$). Из (2.4) имеем

$$\ddot{\lambda}_k = -\dot{b}_0^2 |A_k|^4 |\Omega_k|^2 \gamma_k^{-1/2} < 0$$

Следовательно, трехмерные волны являются менее опасными, чем двумерные, если при $\beta=0$ значение $\dot{\lambda}$ меньше нуля

$$(2.6) \quad \dot{\lambda}_k = \dot{a}_0 - \dot{b}_0 (b_2 + 2b_4 |A_k|^2) / |a_2 + 2a_4 |A_k|^2| < 0$$

Расчеты, проведенные на нейтральной кривой, показали, что условие (2.6) всегда выполняется.

Таким образом, автоколебательное течение с амплитудой A_1 неустойчиво относительно двумерных и трехмерных возмущений, но двумерные возмущения более опасны. Автоколебательное течение с амплитудой A_1 нейтрально устойчиво относительно двумерных и устойчиво относительно трехмерных возмущений.

3. Коэффициенты $\dot{\omega}_0$, ω_2 и ω_4 рассчитывались при шаге интегрирования $h=1/128$ и количестве ортогонализаций $k=128$. Число узлов n , в которых запоминались собственные функции (используемые при решении задач высших приближений) бралось равным 128. Были проведены контрольные расчеты с $h=1/256$, $k=n=256$, при этом относительная ошибка в определении $\dot{\omega}_0$, ω_2 и ω_4 не превышала 0,5, 1 и 2% соответственно. Результаты расчета коэффициентов ω_2 и $\dot{\omega}_0$ сопоставлялись с данными, приведенными в работах [1, 8]. Так, для $\alpha \approx 1.02$, $R \approx 3848$, $c_i=0$ различие в определении ω_2 составляло 2 и 0.1%, а в определении $\dot{\omega}_0$ — 0.2 и 0.02%, при $h=1/128$, $k=n=128$ и $h=1/256$, $k=n=256$ соответственно.

Аналогичные сопоставления были проведены для течения Пуазейля — Куэтта с профилем скорости $U_0=3/2(1-y^2)+u^0y$. Вычисления проводились при критических значениях параметров $\alpha^*(u^0)$, $R^*(u^0)$, $c_{r*}(u^0)$ и $c_i=0$ [1]. Результаты расчетов, полученных при $h=1/256$, $k=n=256$, кратко приведены ниже

$10 u^0$	$10^{-2} R_*$	$10 c_{r*}$	$10^{-2} a_2$	$10^{-2} b_2$	$10^{-6} a_4$	$10^{-6} b_4$	$10 \dot{a}_0$	$10 \dot{b}_0$	sign ($\dot{\lambda}_1$)	sign ($\dot{\lambda}_{-1}$)
0.375	4.92	3.59	0.358	-1.21	-0.30	0.27	0.00	-1.28	-1	-1
1.5	11.6	2.04	0.749	-2.99	-1.22	1.69	-0.08	-1.01	-1	-1
3.0	10.8	1.18	1.73	-3.45	-2.75	2.08	-0.1	-0.9	-1	-1
4.8	20.2	-0.06	4.6	1.24	-	-	-0.1	-0.4	+1	-
4.95	24.5	-0.18	3.76	1.55	-	-	-0.1	-0.33	+1	-
5.21	55.7	-0.44	1.97	1.03	-	-	-0.0	-0.15	+1	-

Отличие в определении ω_2 по сравнению с данными, приведенными в [1], также невелико, относительная ошибка не превышает 3%. Заметим, что, как следует из (2.6) и данных, приведенных выше, результаты анализа устойчивости идентичны описанным для течения Пуазейля при $u^0 < 0.48$. При больших значениях u^0 автоколебательное течение с амплитудой $A_1 = -a_0/a_2$ (при $a_0 > 0$, $a_2 > 0$) по-прежнему неустойчиво относительно двумерных и трехмерных возмущений. Но трехмерные возмущения становятся наиболее опасными.

Автор благодарит С. Я. Герценштейна за внимание к работе и обсуждение результатов.

Поступила 5 V 1977

ЛИТЕРАТУРА

1. Reynolds W. C., Potter M. C. Finite-amplitude instability of parallel shear flows. J. Fluid Mech., 1967, vol. 27, pt 3.
2. Герценштейн С. Я., Штемлер Ю. М. О возмущениях конечной амплитуды в пограничном слое. Изв. АН СССР, МЖГ, 1976, № 1.
3. Герценштейн С. Я., Штемлер Ю. М. Нелинейное развитие возмущений в пограничных слоях и их устойчивость. Докл. АН СССР, 1977, т. 234, № 6.
4. Андрейчиков И. П., Юдович В. И. Об автоколебательных режимах, ответвляющихся от течения Пуазейля в плоском канале. Докл. АН СССР, 1972, т. 202, № 4.
5. Шкадов В. Я. О нелинейном развитии возмущений в плоскопараллельном течении Пуазейля. Изв. АН СССР, МЖГ, 1973, № 2.
6. Pekeris C. L., Shkoller B. The neutral curves for periodic perturbations of finite amplitude of plane Poiseuille flow. J. Fluid Mech., 1969, vol. 39, pt 3.
7. Stewartson K., Stuart J. T. A non-linear instability theory for a wave system in plane Poiseuille flow. J. Fluid. Mech., 1971, vol. 48, pt 3.

-
8. *Hocking L. M., Stewartson K., Stuart J. T., Brown S. N.* A nonlinear instability burst in plane parallel flow. *J. Fluid Mech.*, 1972, vol. 51, pt 4.
 9. *Рабинович М. И.* О методе усреднения в нелинейной оптике. В сб. «Нелинейные процессы в оптике». Новосибирск, «Наука», 1970.
 10. *Карпман В. И.* Нелинейные волны в диспергирующих средах. М., «Наука», 1973.
 11. *Зельман М. Б.* О нелинейном развитии возмущений в плоскопараллельных потоках. *Изв. СО АН СССР, Сер. техн. н.*, 1974, вып. 3, № 13.
 12. *Мильман М.* Возмущение решений некоторых нелинейных краевых задач. В сб. «Теория ветвления и нелинейные задачи на собственные значения». М., «Мир», 1974.
-