

## ЭВОЛЮЦИЯ РЕЗОНАНСНЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ В ТЕЧЕНИИ ГАРТМАНА

А. М. ЛИФШИЦ, В. Н. ШТЕРН

(Новосибирск)

После жесткой потери устойчивости ламинарных режимов наблюдается быстрый рост энергии пульсационного движения. Это явление не находит объяснения в рамках линейной теории устойчивости, которая, хотя и предсказывает экспоненциальный рост возмущений в закритической области, но дает весьма малые значения инкрементов. Взрывообразная турбулизация обусловлена нелинейным механизмом. Простейшее коллективное взаимодействие возмущений иллюстрирует набор трех гармонических колебаний, параметры которых связаны резонансными соотношениями. Подобные триплеты, являясь элементарной, но достаточно содержательной моделью нелинейной теории гидродинамической устойчивости, стали в последние годы предметом интересных исследований [1-4]. В [5-7] рассмотрено ветвление стационарных триплетов малой амплитуды от ламинарных режимов и показано, что начиная с некоторых чисел Рейнольдса триплет может быть составлен из нейтральных и нарастающих по линейной теории волн Толмина - Шлихтинга.

В данной работе показано, что весьма богатым примером в этом отношении является течение Гартмана, где допускается существование триплетов из возмущений, обладающих различной симметрией относительно оси канала. Изучается эволюция триплетов для околокритических значений параметров в рамках амплитудных уравнений, полученных на основе метода Галеркина с использованием в качестве базиса собственных функций линейной задачи устойчивости [8]. В закритической области рассчитаны стационарные в среднем режимы: предельные циклы и странные аттракторы, причем в последнем случае проведен спектральный анализ.

1. Приведем сначала некоторые результаты линейного анализа устойчивости течения Гартмана, которые понадобятся в дальнейшем. Спектральная задача для малых возмущений сводится к модифицированному уравнению Орра - Зоммерфельда [9]

$$(1.1) \quad v^{IV} - 2k^2 v + k^4 v = i\alpha R [(U-C)(v'' - k^2 v) - U'' v] + Na^2 v''$$

$$U = \frac{\operatorname{ch} Na - \operatorname{ch}(Na y)}{\operatorname{ch} Na - 1}, \quad 1 \geq y \geq -1$$

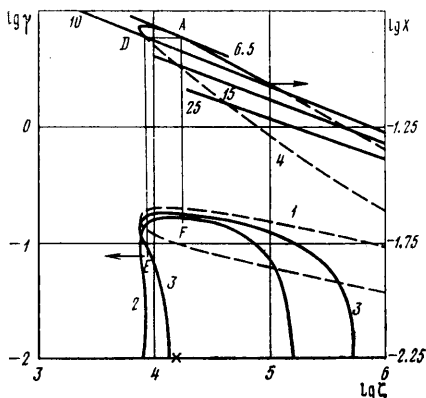
$$v(\pm 1) = v'(\pm 1) = 0, \quad k^2 = \alpha^2 + \beta^2, \quad C = X + iY$$

Здесь  $Na$  и  $R$  — критерии Гартмана и Рейнольдса,  $U$  — ламинарный профиль скорости,  $v$  — комплексная амплитуда поперечной компоненты скорости возмущения,  $\alpha$  и  $\beta$  — волновые числа,  $C$  — фазовая скорость и искомое собственное значение. Магнитное число Рейнольдса считается малым, так что индуцированным магнитным полем пренебрегается.

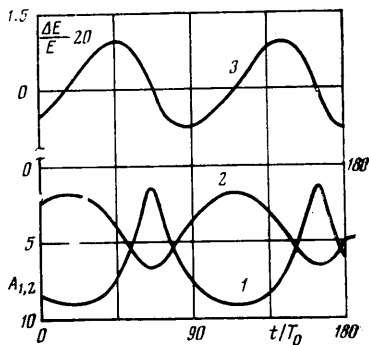
На фиг. 1 нанесены нейтральные зависимости 1, 4 для возмущений с четной относительно оси канала ( $y=0$ ) компонентой  $v(y)$  при  $Na=10$ . Используемые на графике координаты  $\gamma = \alpha/Na$  и  $\xi = \alpha R/Na^2$  удобны тем, что с увеличением  $Na$  кривые 1, 4 с графической точностью не меняются и являются нейтральными кривыми для асимптотического гартмановского пограничного слоя.

При  $Na > 6.5$  существуют нейтральные кривые для возмущений с нечетной  $v(y)$  [9]. Интересным свойством этих кривых является то, что

вдоль обеих ветвей при  $R \rightarrow \infty$  величины  $\alpha R$  и  $X$  стремятся к конечным значениям. Это свойство иллюстрирует кривая 2 на фиг. 1, которая соответствует значению  $Na=10$ . При  $Na=15$  кривая типа 2 переходит в 3 и асимптотически сливается с 1 при  $Na \rightarrow \infty$ . С уменьшением  $Na$  она коллапсирует в точку, положение которой на оси  $\alpha R$  при  $Na=6.5$  отмечено крестом. Фазовые скорости нечетных возмущений с графической точностью соответствуют верхним частям кривой 4, отсекаемым прямыми 10, 15, 25 при соответствующих значениях  $Na$ . Ниже этих прямых на плоскости  $(X, \alpha R)$  собственных значений для возмущений с нечетной  $v(y)$  не существует.



Фиг. 1



Фиг. 2

Отрезки этих прямых, ограниченные ветвями 4, отвечают параметрам  $\alpha = 0, R = \infty, Y \geq 0$ , описывая «сплошной» спектр.

2. Рассмотрим возмущение в виде суммы трех волн Толмина — Шлихтинга, параметры которых удовлетворяют следующим резонансным соотношениям:

$$(2.1) \quad (v_x, v_y, v_z) = 2 \sum_{l=1}^3 \operatorname{Re} \{ B_l(t) [u(y), v(y), w(y)] \exp[i\alpha_l(x - X_l t) + i\beta_l z] \}$$

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0, \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 = 0, \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \alpha_3 X_3 = 0.$$

Здесь  $B_l$  — комплексные амплитуды. В [5] показано, что с ростом числа Рейнольдса от нейтральной кривой может сначала ответвляться триплет, состоящий из плоской волны и двух трехмерных волн, бегущих под равными, но противоположными углами к скорости основного потока. При этом

$$\alpha_2 = \alpha_3 = -\alpha_1/2, \alpha_1 = \alpha, X_1 = X_2 = X_3 = X, \beta_2 = -\beta_3 = \beta, \beta_1 = 0.$$

Пользуясь методикой [5] и фиг. 1, не составляет труда определить параметры ветвления триплетов. Сначала строится прямая  $X = \text{const}$  так, чтобы абсциссы точек пересечения ее с кривой 4, т.е. значения  $\alpha R$ , отличались вдвое (отрезок  $AD$ ), и тем самым определяем значение  $X$ . Точка  $A$ , расположенная при большем значении  $\alpha R$ , соответствует плоской волне, волновое число которой определяется пересечением линии  $\alpha R = \text{const}$  ( $AF$ ) с верхней ветвью одной из кривых 1–3. Попутно находится величина  $R$ . Волновое число  $\beta$  находится пересечением прямой  $\alpha R = \text{const}$ , проходящей через точку  $D$ , с нижней ветвью одной из кривых 1–3. Если обозначить ординату этой точки  $\alpha_*$ , то  $\beta = \sqrt{\alpha_*^2 - 1/\alpha^2}$ . Для веществ

На	$R \cdot 10^{-6}$	$\alpha$	$\beta$	$\chi$
<b>а</b>				
0	0.0117	1.09	0.709	0.239
4.6	0.294	1.22	0.667	0.138
10.0	1.03	1.96	0.870	0.133
15.6	1.41	2.95	1.06	0.136
19.9	1.89	3.70	1.21	0.136
25.3	2.30	4.73	1.42	0.136
30.0	2.81	5.59	1.66	0.136
<b>б</b>				
6.9	1.44	0.562	1.03	0.136
10	1.03	1.68	1.03	0.136
15.5	1.55	2.86	1.09	0.136
20.5	1.89	3.81	1.12	0.136
25.3	2.35	4.71	1.44	0.136
<b>в</b>				
15.08	1.44	2.77	0	0.135
20.1	1.85	3.73	0.912	0.136
25.3	2.32	4.72	1.31	0.136
29.5	2.70	5.50	1.57	0.136

венности  $\beta$  необходимо  $\alpha_* \geq \alpha/2$ . При  $Na < 6.5$  существуют нейтральные триплеты только из четных колебаний. Зависимость параметров ветвления таких триплетов от  $Na$  приведена в таблице (а). С появлением при  $Na > 6.5$  нейтральных зависимостей для нечетных возмущений линия  $AF$  пересекает кривую типа 2 впервые при  $\alpha=0$  ( $R=\infty$ ). Такой триплет состоит из стоячей поперечной волны, сносимой вниз по течению с постоянной скоростью  $\chi$ . С ростом  $Na$  он превращается в триплет из плоской нечетной и пары четных косых волн. Параметры ветвления таких триплетов приведены в таблице (б).

При дальнейшем росте  $Na$  прямая  $DE$  пересекается с нижней ветвью кривой типа 2-3. Но, так как  $\alpha_*$  в точке пересечения начинает расти от нуля, пока  $\alpha_* < \alpha/2$ , триплеты новой структуры не появляются. При  $Na = 15.08$  это соотношение нарушается и возникает триплет, состоящий из нечетных возмущений. При  $\alpha_* = \alpha/2$  он составлен из плоских волн, с ростом  $Na$  длинноволновые гармоники становятся косыми. Параметры триплетов из нечетных мод при различных значениях  $Na$  приведены в таблице (в). И наконец, при больших  $Na$  возникает триплет из четной плоской и двух косых нечетных волн. Далее, с увеличением  $Na$  параметры триплетов всех типов асимптотически сближаются, стремясь к параметрам триплета из четных возмущений. При этом величины  $\alpha/Na$ ,  $\beta/Na$ ,  $R/Na$  асимптотически выходят на константы, определяемые последней строкой таблицы (а).

Свойства четности составляющих гармоник существенны при рассмотрении стационарных триплетов конечной амплитуды. Из уравнений Навье — Стокса в случае стационарного в среднем движения при разделении на средние и пульсационные величины следует:

$$(2.2) \quad \frac{\partial v_k}{\partial t} + U_j \frac{\partial v_k}{\partial x_j} + v_j \frac{\partial U_k}{\partial x_j} + \frac{\partial (v_k v_j - \langle v_k v_j \rangle)}{\partial x_j} = - \frac{\partial p}{\partial x_k} + \frac{1}{R} \Delta v_k$$

$$\frac{\partial v_j}{\partial x_j} = 0, \quad U'' = Na^2 U + R\tau' + \lambda, \quad -1 \leq y \leq 1, \quad \tau = \langle v_x v_y \rangle$$

Член с  $Na^2$  в уравнении Рейнольдса отражает действие поперечного постоянного магнитного поля. Пульсациями магнитного поля для простоты пренебрегается. Таким образом имеется чисто гидродинамическая задача, а  $Na$  служит лишь форм-параметром  $U$ . Константа  $\lambda$  связана со средним градиентом давления и выбирается так, чтобы значение скорости  $U$  на оси канала было равно единице. Осреднение понимается как интегрирование по однородным пространственным координатам.

Уравнения (2.2) допускают решения лишь с определенным видом четности пульсационной скорости относительно оси канала, а именно: поперечная компонента скорости  $v_y$  может быть нечетной функцией, а остальные компоненты — четными. При этом средняя скорость является четной. Будем разыскивать приближенное решение (2.2), считая пульсационное движение суммой трех гармонических колебаний (2.1), где функции  $u$ ,  $v$ ,  $w$  определенным образом нормированы. Легко видеть, что в этих условиях средняя скорость  $U(y)$  будет четной, если  $u$  всех трех гармоник  $v(y)$  является нечетной или  $u$  одной из гармоник нечетной, а двух других — четной. Остальные варианты четности в рамках данного подхода не имеют физического смысла.

3. Будем разыскивать стационарные в среднем триплетные решения вблизи точки ветвления. Всегда существует тривиальное (ламинарное) решение с  $B_i=0$ . Если параметры гармоник являются собственными для линеаризованной задачи, то при малых значениях  $B_i$  нелинейные члены несущественны и соответствующие функции  $u$ ,  $v$ ,  $w$  близки к собственным решениям линейной задачи. Поэтому в представлении (2.1) далее будем предполагать волновые параметры и функции от  $y$  соответствующими собственным решениям (1.1). Наличие члена с  $Na^2$  в (1.1) несущественно, так как для нейтральных и близких к ним колебаний течения Гартмана его вклад пренебрежимо мал [9]. Амплитуды  $B_i$  будут рассматриваться как функции времени. Их эволюция от некоторых начальных значений и будет предметом анализа. Уравнения типа Ландау для амплитуд  $B_i$  получим, подставляя (2.1) в (2.2) и осуществляя операцию проектирования. Например, чтобы получить уравнение для  $B_1$ , следует после подстановки умножить (2.2) скалярно на  $[u_1^*, v_1^*, w_1^*] \exp[-i\alpha_1(x-X_1t) - i\beta_1z]$  и осреднить по всем пространственным координатам.

Таким образом получим

$$\begin{aligned}
 \dot{B}_1 &= b_1 B_1 + a_1^* B_2^* B_3^* \\
 (3.1) \quad b_1 &= -\frac{1}{2} \int_{-1}^1 \left[ (k_1^2 e_1 + |u_1'|^2 + |v_1'|^2 + |w_1'|^2) \frac{1}{R} + \right. \\
 &\quad \left. + i\alpha_1(U - X_1)e_1 + U'v_1u_1^* \right] dy \\
 e_1 &= |u_1|^2 + |v_1|^2 + |w_1|^2, \quad k_1^2 = \alpha_1^2 + \beta_1^2, \quad \frac{1}{2} \int_{-1}^1 e_1 dy = 1 \\
 a_1 &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \left[ 2(i\alpha_1 u_1 u_2 u_3 + v_1' v_2 v_3 + i\beta_1 w_1 w_2 w_3) + \right. \\
 &\quad \left. + (u_2 v_3 + v_2 u_3)(u_1' + i\alpha_1 v_1) + (u_2 w_3 + u_3 w_2)(i\alpha_1 w_1 + i\beta_1 u_1) + \right. \\
 &\quad \left. + (v_2 w_3 + v_3 w_2)(w_1' + i\beta_1 v_1) \right] dy
 \end{aligned}$$

Уравнения для амплитуд  $B_2$  и  $B_3$  получаются из (3.1) циклической перестановкой индексов. Здесь использована такая нормировка базисных

функций, что коэффициенты  $a_j$  вещественны. Учитывая, что базис составлен из собственных функций линейной задачи устойчивости, коэффициент  $b_k$  можно записать как

$$b_k = \alpha_k Y_k - \frac{1}{2} \int_{-1}^1 U_g' \tau_k dy - \frac{i}{2} \int_{-1}^1 [U_g' \operatorname{Im}(v_k u_k^*) + \alpha_1 U_g e_k] dy$$

$$\tau_k = \operatorname{Re}(v_k u_k^*)$$

Профиль средней скорости разбит на две части:  $U = U_L + U_g$ , где  $U_L$  — ламинарное решение, а  $U_g = \sum_{k=1}^3 A_k^2 U_{gk}$  — добавка, вызванная автоколебаниями,  $A_k = |B_k|$ . Из уравнения Рейнольдса в стационарной форме (2.2) получаем  $U_{gk}'' = \operatorname{Ha}^2 U_{gk} + R \tau_k'$ ,  $U_{gk}(1) = U_{gk}'(0) = 0$ . Из (3.1) следуют уравнения для амплитуд и фаз:

$$(3.2) \quad A_k = \alpha_k Y_k A_k + \left( \frac{A_1 A_2 A_3}{A_k} \right) a_k \cos \varphi - A_k \sum_{l=1}^3 A_l^2 a_{kl}$$

$$(3.3) \quad \dot{\varphi} = -A_1 A_2 A_3 \sin \varphi \sum_{k=1}^3 \frac{a_k}{A_k^2} - \sum_{k=1}^3 A_k^2 q_k$$

$$B_k = A_k \exp(i\varphi_k), \quad \varphi = \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3$$

$$a_{kl} = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 U_{gl} \tau_k dy, \quad q_k = \sum_{l=1}^3 b_{kl}$$

$$b_{kl} = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 [U_{gl}' \operatorname{Im}(v_k u_k^*) + \alpha_k U_{gl} e_k] dy$$

Непосредственными выкладками нетрудно убедиться в том, что  $a_1 + a_2 + a_3 = 0$ , и, вообще, квадратично-нелинейные члены удовлетворяют всем свойствам, которыми должны обладать системы гидродинамического типа [1]. Заметим, что коэффициенты  $a_{lk}$  не зависят от значений фаз  $\varphi_l$ . Последние влияют лишь на величину коэффициентов при квадратичных членах. Далее, поскольку

$$a_{lk} = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \tau_l U_{gk}' dy = -\frac{1}{2} \int_{-1}^1 \tau_l' U_{gk} dy = \frac{1}{2R} \int_{-1}^1 (\operatorname{Ha}^2 U_{gl} - U_{gl}'') U_{gk} dy =$$

$$= \frac{1}{2R} \int_{-1}^1 (\operatorname{Ha}^2 U_{gl} U_{gk} + U_{gl}' U_{gk}') dy$$

то коэффициенты обладают следующими свойствами:  $a_{lk} = a_{kl}$ ,  $a_{ll} > 0$ ,  $a_{lk}^2 \leq a_{ll} a_{kk}$ ,  $l, k = 1, 2, 3$ .

Умножая уравнения (3.2) на соответствующие амплитуды и суммируя, получим

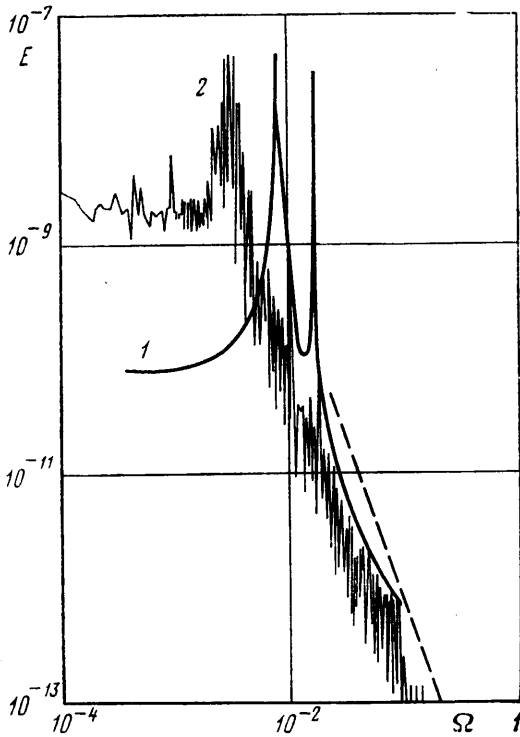
$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} (A_1^2 + A_2^2 + A_3^2) = \sum_{k=1}^3 A_k^2 \alpha_k Y_k - \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^3 A_k^2 A_l^2 a_{kl}$$

Отсюда следует, что в силу положительной определенности последней суммы энергия пульсационного движения ограничена, так как если амплитуды достаточно велики, то производная будет отрицательна. Для триплета смешанного типа при  $Na=10$  с параметрами  $\alpha=1.67$ ,  $\beta=0.835$ ,  $R=-1.03 \cdot 10^8$ ,  $X=0.136$ ,  $Y_1=3.5 \cdot 10^{-5}$ ,  $Y_2=Y_3=1 \cdot 10^{-4}$  коэффициенты из (3.2) и (3.3), рассчитанные по собственным функциям, принимают значения:  $a_1=3.92$ ,  $a_{11}=32.4$ ,  $a_{12}=29.9$ ,  $a_{22}=65.5$ ,  $b_{11}=-334$ ,  $b_{12}=-202$ ,  $b_{21}=284$ ,  $b_{22}=-319$ ,  $q_1=233$ ,  $q_2=q_3=436$ .

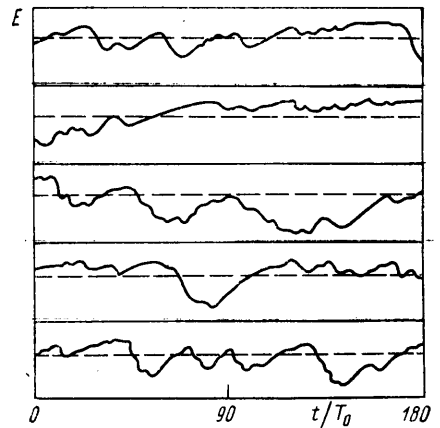
Система (3.2), (3.3) всегда допускает тривиальное решение, которое неустойчиво, если хотя один коэффициент  $\alpha_k Y_k > 0$ , как здесь и принято. Условием существования моногармонического решения, например  $A_1 \neq 0$ ,  $A_2=A_3=0$ , является  $q_1=0$ , что в данном случае не выполнено. Могут существовать и другие стационарные решения, но при выбранных параметрах эволюция из широкого класса начальных условий к ним не приводила. Эволюция от малых начальных значений  $A_i$  дает сверхэкспоненциальный рост для тех амплитуд, у которых в этот период  $a_i \cos \varphi > 0$ . В даль-

нейшем в зависимости от параметров триплета и независимо от начальных условий решение стремится либо к периодическому режиму, либо к режиму типа «странный аттрактор».

К периодическому режиму приводит эволюция триплета, у которого косые гармоники нейтральны по линейной теории, т.е. следует положить  $Y_2=Y_3=0$ . На



Фиг. 3



Фиг. 4

фиг. 2 показана зависимость от времени амплитуд  $A_1$ ,  $A_2$  ( $A_3=A_2$ ) и энергии пульсаций для такого режима (кривые 1, 2 и 3 соответственно). Разница между минимальными и максимальными значениями на кривых 1 и 2 составляет  $\sim 100\%$  среднего значения, на кривой 3  $\sim 7\%$ . Масштабом времени служит период колебаний первой несущей волны  $T_0=2\pi/(\alpha_1 X_1)$ ; при этом частота модуляции  $\omega_m=10^{-2}$ . В фазовом пространстве  $\{A_1, A_2, A_3, \varphi\}$  при этих параметрах аттрактором является цикл, лежащий в гипер-

плоскости  $A_2=A_3$ , причем фаза колеблется с тем же периодом, что и амплитуды в интервале длиной меньше  $\pi$ .

Когда нарастают все три гармоники, аттрактором является слабо непериодический режим, для которого по-прежнему  $A_2=A_3$ . Рассматривая решение динамической системы (3.2), (3.3), как вектор в фазовом пространстве  $\mathbf{V}=\{V_1, V_2, V_3\}$ , найдем его энергетический спектр

$$E(\omega) = \int_0^{\infty} \cos \omega \tau d\tau \frac{1}{T} \int_0^T \mathbf{V}(t) \mathbf{V}(t+\tau) dt$$

Здесь  $T$  — временной интервал, на котором проводится осреднение. Спектр такого слабо непериодического режима, полученный на интервале осреднения  $2 \cdot 10^4 T_0$  нанесен на фиг. 3 кривой 1. По оси абсцисс отложена относительная частота  $\Omega = \omega / (\alpha_1 X_1)$ . Первый всплеск  $E(\omega)$  при  $\omega = \omega_0$  соответствует почти периодической модуляции амплитуд  $V_2$  и  $V_3$ , а следующий на кратной гармонике  $\omega = 2\omega_0$  — модуляции  $V_1$ .

Если же в (2.1) подобрать базисные функции, например, таким образом, чтобы  $b_{11}=57.2$ ,  $b_{12}=b_{21}=227.4$ ,  $b_{22}=-3$ ,  $q_1=512$ ,  $q_2=q_3=221$ , а остальные коэффициенты остались прежними, то эволюция приводит к существенно непериодическому режиму. На фиг. 4 показано изменение энергии пульсаций в течение пяти последовательных интервалов времени. Отклонение энергии от среднего уровня (пунктирная прямая на графике) не превышает 20%. Протяженность каждого интервала такая же, как на фиг. 2. Спектр этого режима нанесен на фиг. 3 кривой 2. Для сопоставления пунктиром указана зависимость  $E \sim \omega^{-3}$ .

Спектры подобного типа и с тем же асимптотическим законом при больших  $\omega$  экспериментально измерялись для закритических режимов тепловой конвекции [10]. Это сходство вполне объяснимо. В системе координат, движущейся с фазовой скоростью несущих гармоник, для рассмотренной здесь задачи получаем систему стоячих пространственно-периодических волн, амплитуды которых вибрируют по времени, т. е. картину, близкую к наблюдаемой при конвекции. Малый общий уровень энергии пульсаций обусловлен выбором базисных функций, поскольку инкременты линейной неустойчивости невелики.

Авторы благодарны М. А. Гольдштику и М. И. Рабиновичу за обсужденные работы.

Поступила 29 XI 1977

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Должанский Ф. В., Кляцкин В. И., Обухов А. М., Чусов М. А. Нелинейные системы гидродинамического типа. М., «Наука», 1974.
2. Turbulence and Navier — Stokes equation (Proc. conf. held at the Univ. of Paris — Ind, Orsay, 1975.) Berlin, Springer, 1976.
3. Craik A. D. D. Second order resonance and subcritical instability. Proc. Roy. Soc. London. Ser A, 1975, vol. 343, No. 1634, p. 351—362.
4. Рабинович М. И., Фабрикант А. Л. Нелинейные волны в неравновесных средах. Изв. вузов, Радиофизика, 1976, т. 19, № 5, 6.
5. Штерн В. Н. О неустойчивости к трехмерным возмущениям. Изв. АН СССР, МЖГ, 1976, № 5.
6. Гольдштик М. А., Штерн В. Н. Гидродинамическая устойчивость и турбулентность. Новосибирск, «Наука», 1977.
7. Сагалаков А. М., Штерн В. Н. Резонансные взаимодействия возмущений в МГД течениях. Магнитная гидродинамика, 1977, № 4.
8. Герценштейн С. Я., Шмидт В. М. Нелинейное развитие и взаимодействие возмущений конечной амплитуды при конвективной неустойчивости вращающегося плоского слоя. Докл. АН СССР, 1975, т. 225, № 1.
9. Сагалаков А. М., Штерн В. Н. Устойчивость плоскопараллельных магнитогидродинамических течений в поперечном магнитном поле. ПМТФ, 1970, № 3.
10. Ahler G. Low-temperature studies of the Rayleigh — Benard instability and turbulence. Phys. Rev. Lett., 1974, vol. 33, No. 20.