

КИНЕМАТИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПЛАВАНИЯ НЕКОТОРЫХ ВОДНЫХ ЖИВОТНЫХ

В. П. КАЯН, Л. Ф. КОЗЛОВ, В. Е. ПЯТЕЦКИЙ

(Киев)

Данные о скорости и кинематике плавания различных рыб и китообразных имеют существенный практический интерес в связи с их промыслом, а также могут быть использованы при создании гидродинамических теорий плавания.

Ниже приведены экспериментальные данные по кинематике и скорости плавания нескольких видов рыб и китообразных типа афалина. Исследования с водными животными проводились в Институте гидромеханики АН УССР на специально спроектированных и построенных для этой цели установках — биогидродинамических трубах [1, 2], кольцевой биогидродинамической установке и береговом гидродинамическом канале [3].

Рыбы с ундулирующими движениями тела по способу плавания разделяются на три группы [4]: с угревидным способом движения (локомоторные колебания приблизительно равной амплитуды есть по всей длине тела), со скомброидным (амплитуда локомоторных колебаний нарастает от носа к хвосту по определенному закону) и с «кузовковым» (локомоторную функцию несет только жесткий хвостовой плавник, а корпус неподвижен). Исследовались представители двух способов движения: угревидного — сарганы — и скомброидного — луфарь, кефаль, пелагида и форель. Описание методики проведения эксперимента и применяемой аппаратуры, позволяющей регистрировать элементы кинематики исследуемых рыб, приведены в [5-7].

В биогидродинамических трубах [1, 2] испытания проводились при обращенном движении рыб с использованием проявляющейся у них рефлекторно оптомоторной реакции. Суть этой реакции заключается в произвольном следовании глаза и всего тела рыбы за движущимся ориентиром. В рассматриваемом случае рыба плыла против потока воды и, ориентируясь на координатную сетку на дне рабочей части трубы, оставалась как бы «неподвижной» по отношению к самой трубе и наблюдателю. В кольцевой установке [3] таким ориентиром служила движущаяся по кругу с внешней стороны кольцевого канала белая ширма с вертикальными темными полосами.

При анализе полученного материала для статистической обработки отбирались только те режимы, где не наблюдалось перемещения рыбы вдоль продольной оси рабочей части. В этих случаях скорость рыбы была постоянной и равной скорости потока в данной точке поперечного сечения рабочей части трубы. В связи с тем что профиль скоростей в рабочей части существенно менялся вблизи стенок (до 10%), режимы, в которых исследуемая рыба находилась вблизи стенки, отбраковывались. Несмотря на то что уровень турбулентности в трубе был довольно значителен, полученные результаты хорошо совпадают с данными работы [8], полученными им на так называемом «рыбьем колесе», где уровень турбулентности был незначителен, а также с результатами на малых скоростях плавания рыб в кольцевой биогидродинамической установке, где вода была неподвижна. Таким образом, уровень турбулентности в жидкости, по-видимому, мало влияет на величины кинематических параметров движения водных животных.

Береговой гидродинамический канал, в котором проводились экспериментальные исследования с китообразными типа афалина, имел длину 65 м и квадратное поперечное сечение 4 м². В средней части канала на участке длиной 11 м одна из боковых стенок была застеклена. С целью фиксации положения объекта исследований в различные моменты времени при прохождении им «рабочего» участка, на противо-

положной стенке канала черным на белом фоне была нанесена координатная сетка с размером ячейки 0.5×0.5 м.

Регистрация элементов кинематики плавания исследуемых водных животных выполнялась с помощью кино съемки. При этом использовались две камеры типа «Конвас-автомат». Съемка производилась на черно-белую негативную пленку шириной 35 мм и размером кадра 16×22 мм. Из полученного экспериментального материала по плаванию китообразных для последующей обработки отбирались те же режимы, в которых центр тяжести афалины перемещается горизонтально вблизи продольной оси канала.

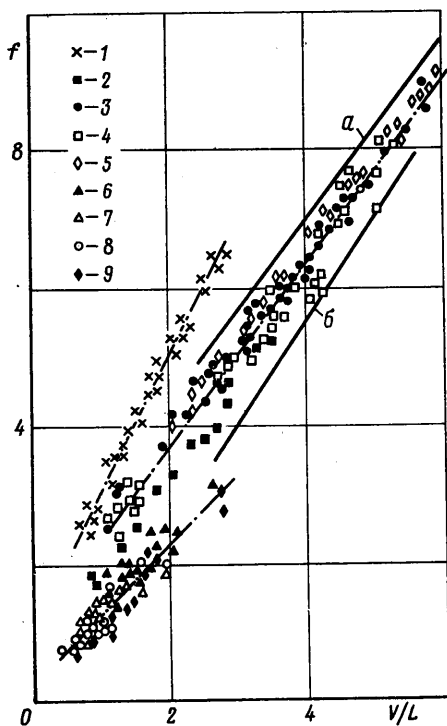
С целью повышения точности отсчета времени при последующей дешифровке кинокадров в процессе съемки перед остекленной рабочей частью в пределах угла захвата объектива кинокамеры устанавливали электросекундомер. Графико-статистическая обработка отобранных режимов проводилась при помощи дешифратора типа «Микрофот-5» ПО-1. В нем изображение каждого кадра проецировалось на диффузно-отражающий экран размером 360×300 мм.

Для каждого подопытного животного в каждый момент времени определялась амплитуда A_0 колебаний задней кромки хвостового плавника и для каждого режима строились зависимости $A_0(t)$. По этим же графикам

определялись также период T и частота f колебаний хвостового плавника рыбы.

Средние за режим значения частоты f и амплитуды A_0 определялись методами математической статистики в табличной форме по схеме обработки равнооточных измерений [9]. Для всех рыб средняя квадратичная ошибка при определении амплитуды колебаний хвостового плавника составляла 5–7% и частоты — 4–5%.

Так как поступательное движение китообразных типа афалины отличается существенной нестационарностью, величины A_0 и T для них определялись как средние за период колебаний хвостового плавника. В каждый момент времени определялась их поступательная скорость V , и строился график ее изменения по времени $V(t)$. По этому графику определялась средняя за данный период колебаний хвостового плавника скорость афалины, а также величина и знак изменения скорости. Средняя квадратичная ошибка этих величин во всех случаях не превышала 4–5%.



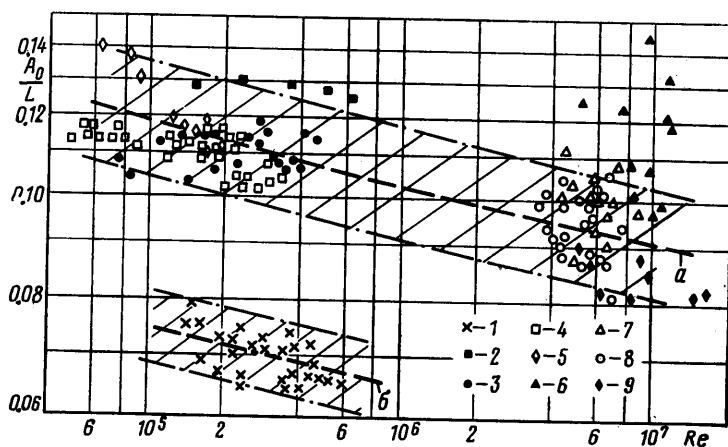
Фиг. 1

Зависимость частоты колебаний f хвостового плавника всех исследованных водных животных от относительной скорости их плавания V/L представлена на фиг. 1 (1 — сарганы, $L=0.4-0.48$ м; 2 — луфарь, $L=0.42$ м; 3 — кефали, $L=0.24-0.3$ м; 4 — форели, $L=0.2-0.22$ м; 5 — пеламиды, $L=0.16$ м; 6 — китообразные, $L=2.35-2.65$ м, с ускорением движения $\dot{V}=+(0.35 \div 1.5)$ м/сек²; 7 — $\dot{V}=+(0.1 \div 0.3)$ м/сек²; 8 — $\dot{V}=(0 \div \pm 0.07)$ м/сек²; 9 — $\dot{V}=(0.1-0.3)$ м/сек²). Экспериментальные точки 1–9 на графике $f(V/L)$ четко разделились на три группы, каждая из которых принадлежит водным животным с определенным способом плавания.

Через точки 1, характеризующие частоту локомоторных колебаний тела представителей угревидного способа движения — сарганов, можно провести прямую, которая при значениях $V/L \geq 1$ описывается уравнением

$$(1) \quad V/L = a(f-b) \text{ [1/сек]}, \quad a=0.5, \quad b=1$$

Для рыб со скомброидным способом движения через экспериментальные точки 2–5, характеризующие частоту колебаний хвостового плавника луфаря, кефали, форели и пелагиды соответственно при различных скоростях их плавания, также можно провести прямую, которая при значениях $V/L > 1$ описывается уравнением (1) при $a=0.75, b=1$.



Фиг. 2

Следует отметить, что эмпирические уравнения прямых, проходящих через точки 2 и 5, которые соответствуют самым большим и малым подопытным рыбам, несколько отличаются от последнего уравнения. Так, для луфаря длиной $L=0.42$ м (точки 2) зависимость $V/L(f)$ имеет вид (1) при $a=0.71, b=0.5$ и для пелагиды длиной $L=0.16$ м (точки 5) $a=0.79, b=1.5$.

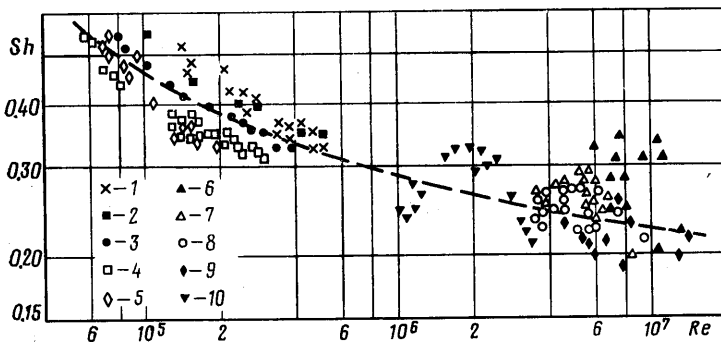
Здесь же на фиг. 1 для сравнения приведены зависимости $V/L(f)$, полученные в кольцевом вращающемся канале для нескольких видов рыб со скомброидным способом движения [9] (прямая a — уравнение (1) при $a=0.75, b=1.33$), а также для тихоокеанского тунца [10] (прямая b при $a=0.64, b=-0.76$). Из сопоставлений полученных выражений следует, что для достижения одинаковой величины относительной скорости рыбе с угревидным способом движения нужна в 1.5 раза большая частота локомоторных колебаний тела, чем рыбе со скомброидным способом движения.

Опытные данные, полученные при исследовании плавания 6 особей китообразных типа афалины [11, 12], представлены на фиг. 1 точками 6–9. В случае, если изменение поступательной скорости дельфина за период колебаний его хвостового плавника близко к нулю (точки 8), для значений $0.5 < V/L < 2$ через точки можно провести осредняющую прямую, описываемую уравнением (1) при $a=0.95, b=0.25$.

Точки 6 и 7, характеризующие плавание афалины со значительным ускорением, расположены в основном выше этой прямой, а точки 9 (замедление порядка $0.1-0.3$ м/сек²) — ниже ее.

Кроме частоты колебаний хвостового плавника на создаваемую водным животным тягу влияет также амплитуда A_0 или размах $2A_0$ колебаний задней кромки хвостового плавника. На фиг. 2 представлена зависимость относительной амплитуды A_0/L колебаний хвостового плавника рыб и китообразных от числа Re ($Re=VL/\nu$, где ν — кинематический коэффициент вязкости, величина которого в наших экспериментах менялась от 0.93 до $1.16 \text{ м}^2/\text{сек}$). Здесь обозначения те же, что на фиг. 1.

Для рыб со скомброидным способом плавания величина A_0/L в диапазоне чисел $Re \cong (0.5-5) \cdot 10^5$ имеет существенный разброс ($A_0/L=0.10-0.13$) и для определенного вида рыб с изменением скорости плавания меняется мало. Полученные значения относительной амплитуды для афалин при равномерном плавании (точки 8) расположены довольно кучно в



Фиг. 3

диапазоне чисел $Re \cong (3-8) \cdot 10^6$, где $A_0/L \cong 0.08-0.105$. Через точки, полученные для рыб со скомброидным способом плавания, и точки для китообразных, способ плавания которых близок к скомброидному, можно провести осредненную аппроксимирующую кривую a , которая описывается аналитической зависимостью

$$(2) \quad A_0/L = a (\lg Re)^n \quad (a=0.51, n=-0.9)$$

В заштрихованной области, прилегающей к кривой a и ограниченной эквидистантными штрихпунктирными кривыми, значения A_0/L на которых отличаются от описываемых уравнением (2) на $\pm 12\%$, находится подавляющее большинство полученных экспериментально значений A_0/L для водных животных со скомброидным и близкими к нему способами плавания.

Величины A_0/L для рыб с угревидным способом плавания расположены в области, ограниченной штрихпунктирными кривыми, которые эквидистантны кривой b и отличаются от нее по величине на $\pm 8\%$. Осредненная аппроксимирующая кривая b описывается аналитической зависимостью (2) при $a=0.32, n=-0.9$.

Следует также отметить, что движение с большим ускорением (броски, старт с места) у китообразных сопровождается значительно более высокими значениями относительной амплитуды колебаний хвостового плавника ($A_0/L \cong 0.13-0.15$), чем при равномерном плавании.

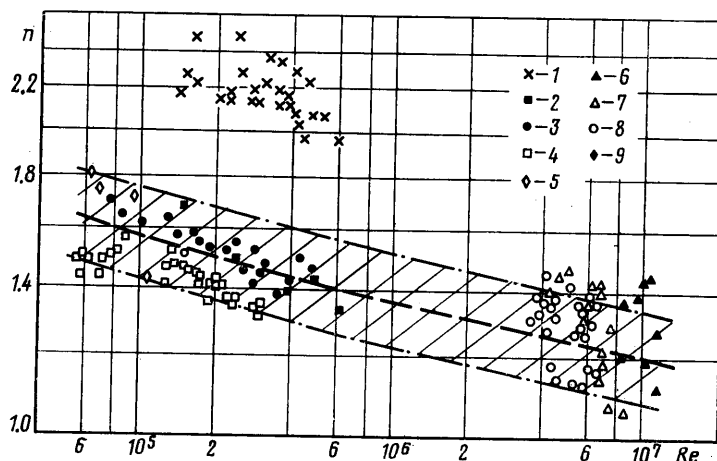
Более полно связь кинематических характеристик хвостового плавника со скоростью плавания и геометрическими размерами тела водного животного выражается зависимостью $Sh(Re)$, где число $Sh=Af/V$ есть амплитудно-частотная характеристика машущего движителя водного животного ($A=2A_0$ — размах колебаний задней кромки хвостового плавника).

Такая зависимость для исследованных нами рыб и китообразных представлена на фиг. 3. Обозначения (1–9) те же, что и на фиг. 1. Точками 10 на фиг. 3 показаны величины числа Sh , полученные в $[^{13}]$ кино съемкой китообразных типа белобочек и азовок длиной $L=1.1-1.6$ м в кольцевом бассейне.

Через все полученные экспериментально группы точек, характеризующие амплитудно-частотную характеристику машущего движителя различных водных животных при равномерном плавании, можно провести осредненную аппроксимирующую кривую, уравнение которой имеет вид

$$(3) \quad \lg Sh = (5.16 - 1.15 \lg Re) (1.3 \lg Re - 4.7)^{-1}$$

Максимальное отклонение экспериментальных точек по величине от средней кривой не превышает $\pm 20\%$. Эмпирическое уравнение (3) позво-



Фиг. 4

ляет для определенных чисел Re определить оптимальную величину амплитудно-частотной характеристики машущего плавникового движителя.

Для вычисления некоторых гидродинамических характеристик плавания водных животных по формулам, предложенным в $[^{14}, ^{15}]$, кроме кинематических характеристик хвостового плавника необходимо знать параметры локомоторной волны, бегущей с возрастающей амплитудой по телу водного животного от носа к хвосту. Для определения длины этой волны χ и отношения скоростей V/c (c — скорость бегущей локомоторной волны, м/сек) строились специальные кинограммы плавания рыб и дельфинов. Экстремумы локомоторной волны на одной стороне тела рыбы отмечались штрихами. Тогда расстояние между двумя соседними параллельными штриховыми линиями равно длине локомоторной волны χ , а наклон штриховой линии к оси абсцисс определяет величину отношения скоростей $[^{6}, ^{7}]$, т. е.

$$(4) \quad V/c = S_1 (S_2 - S_3)^{-1}$$

где S_1 — путь, пройденный рыбой за время Δt , м; $(S_2 - S_3)$ — соответствующая величина для локомоторной волны $[^{6}, ^{7}]$.

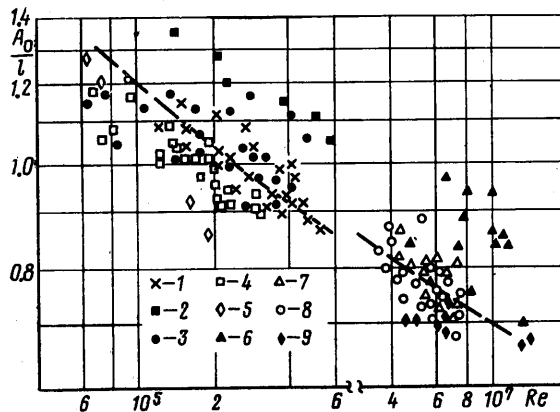
Длина локомоторной волны и количество этих волн, укладывающихся вдоль тела, зависят от размеров, скорости и способа плавания водного животного. На фиг. 4 показано изменение в зависимости от величины числа Re и способа плавания. Обозначения те же, что и на фиг. 1. Через

экспериментальные точки 2–9, полученные для рыб со скомброидным способом плавания и для дельфинов, в первом приближении можно провести осредненную аппроксимирующую кривую, которая описывается аналитической зависимостью

$$(5) \quad n = 6.8 (\lg Re)^{-0.9}$$

Подавляющее большинство полученных экспериментальных точек лежит в области, прилегающей к этой кривой и ограниченной эквидистантными ей штрихпунктирными кривыми с отклонением по величине постоянного коэффициента на $\pm 10\%$.

Для рыб с угревидным способом плавания число волн, укладывающихся вдоль тела рыбы, примерно в 1.5 раза больше, чем у рыб со скомброидным способом плавания при тех же числах Re . В диапазоне чисел $Re \cong$



Фиг. 5

$\cong (1.5-6) \cdot 10^5$ у сарганов на теле постоянно присутствуют 2–2.5 локомоторные волны.

Важным безразмерным параметром, необходимым для расчета гидродинамических характеристик плавания водных животных по формулам [14, 15], является приведенная амплитуда колебаний хвостового плавника A_0/l , где $l = \chi/2\pi$ — приведенная длина локомоторной волны, м. Зависимость величины A_0/l от числа Re для различных водных животных представлена на фиг. 5. Обозначения те же, что и на фиг. 1.

Через экспериментальные точки, полученные для всех исследованных видов рыб, можно провести осредненную аппроксимирующую кривую, которая в диапазоне чисел $Re \cong (0.6-6) \cdot 10^5$ описывается уравнением вида

$$(6) \quad A_0/l = a (\lg Re)^n \quad (a=21, n=-1.8)$$

Максимальные отклонения полученных экспериментально величин A_0/l от определенных по формуле (6) не превышают $\pm 15\%$. Через точки 8, соответствующие значениям A_0/l , полученным для афалин при равномерном плавании, также можно провести осредненную аппроксимирующую кривую, которую в диапазоне чисел $Re \cong (3-8) \cdot 10^5$ можно описать уравнением вида (6) при $a=24, n=-1.8$.

Таким образом, можно констатировать, что для всех исследованных водных животных основные кинематические параметры изгибно-колебательных движений тела — A_0/L , A_0/l и n — зависят от числа Re и эти зависимости описываются уравнением типа $a (\lg Re)^b$, где a и b — коэффици-

енты, зависящие от вида животного, способа плавания и вида кинематического параметра; на частоту колебаний движителя f оказывает влияние относительная скорость и способ плавания этих животных.

Поступила 23 V 1977

ЛИТЕРАТУРА

1. Пятецкий В. Е., Макаренко А. П., Козлов Л. Ф. Биогидродинамична установка для дослідження кінематики плавання та енергетики риб. Доповіді АН УРСР, сер. А, 1968, № 2.
2. Каян В. П., Пятецкий В. Е. Биогидродинамическая установка замкнутого типа для исследования гидродинамики плавания морских животных. В сб. «Бионика», вып. 5. Киев, «Наукова думка», 1971.
3. Пятецкий В. Е., Каян В. П., Кравченко А. М. Экспериментальные установки, аппаратура и методика изучения гидродинамики плавания водных животных. В сб. «Бионика», вып. 7. Киев, «Наукова думка», 1973.
4. Bainbridge R. The locomotion of fish. *New scientist*, 1958, vol. 4, No. 88.
5. Пятецкий В. Е. Кинематические характеристики плавания некоторых быстродвижных морских рыб. В сб. «Бионика», вып. 4. Киев, «Наукова думка», 1970.
6. Пятецкий В. Е., Каян В. П. Кинематика и гидродинамика плавания черноморских сарганов. В сб. «Бионика», вып. 5. Киев, «Наукова думка», 1971.
7. Пятецкий В. Е., Каян В. П. О характеристиках плавания озерной форели. В сб. «Бионика», вып. 6. Киев, «Наукова думка», 1972.
8. Bainbridge R. The speed of swimming of fish as related to size and to the frequency and amplitude of the tail beat. *J. Exper. Biology*, 1958, vol. 35, No. 1.
9. Щиголов Б. М. Математическая обработка наблюдений. М., Физматгиз, 1962.
10. Magnusson J. J., Prescott J. H. Courtship, locomotion, feeding and miscellaneous behaviour of pacific bonito, *Animal Behaviour*, 1966, vol. 14, No. 1.
11. Пятецкий В. Е., Каян В. П. О кинематике плавания дельфина-афалины. В сб. «Бионика», вып. 9. Киев, «Наукова думка», 1975.
12. Каян В. П., Пятецкий В. Е. Кинематика плавания дельфина-афалины в зависимости от режима ускорения. В сб. «Бионика», вып. 11. Киев, «Наукова думка», 1977.
13. Семенов Н. П., Бабенко В. В., Каян В. П. Экспериментальное исследование некоторых особенностей гидродинамики плавания дельфинов. В сб. «Бионика», вып. 8. Киев, «Наукова думка», 1974.
14. Логвинович Г. В. Гидродинамика тонкого гибкого тела. В сб. «Бионика», вып. 4. Киев, «Наукова думка», 1970.
15. Логвинович Г. В. Гидродинамика плавания рыб. В сб. «Бионика», вып. 7. Киев, «Наукова думка», 1973.

НЕСКОЛЬКО ПРИМЕРОВ ИНВАРИАНТНЫХ РЕШЕНИЙ
УРАВНЕНИЙ МЕХАНИКИ ЖИДКОСТИ

В. А. СЫРОВОЙ

(Москва)

Рассмотрены инвариантные решения уравнений плоского движения, записанных в системе координат, связанной с заранее неизвестными линиями тока. В качестве моделей сплошной среды взяты несжимаемая жидкость, которая может быть вязкой и проводящей, сжимаемый газ и электронная плазма с нулевой температурой.

В настоящее время в механике сплошной среды хорошо известен метод [1, 2] построения точных решений, основанный на изучении групповых свойств соответствующих уравнений, с помощью которого за последние два десятилетия получены новые результаты и систематизированы многие ранее известные факты [3]. В пространстве (x, u, p) при этом исследуемая система уравнений определяет гиперповерхность, от вида которой зависят все сохраняющие ее преобразования. Набор независимых переменных x отнесен обычно к некоторой заданной системе отсчета (чаще всего декартовой).

В [4] исследование групповых свойств трехмерного пограничного слоя на произвольной поверхности приводится к задаче о специализации произвольного элемента, которая в смысле постановки аналогична задаче об уравнении нелинейной теплопроводности [2].

В [5] задача о расчете пространственной вязкой сверхзвуковой струи сформулирована в координатах x^i , связанных с заранее неизвестной геометрией течения. При таком подходе уравнения механики жидкости должны быть дополнены условиями эвклидовости пространства, а компоненты метрического тензора g_{ik} являются искомыми функциями наряду с обычными гидродинамическими переменными. Система включает в себя также дифференциальные уравнения, связывающие декартовы и криволинейные координаты. В [5] приведен краткий обзор работ, в той или иной форме использующих «геометризацию».

Ниже на примере плоского движения жидкости будет показано, что этот прием приводит к новой системе уравнений для описания хорошо известных явлений, которая определяет гиперповерхность с некоторыми новыми свойствами и обладает рядом новых точных решений.

1. «Геометризованные» уравнения плоского движения. В дальнейшем для удобства будем употреблять нижние индексы у криволинейных координат; это не может привести к ошибкам, так как последующее изложение не связано с тензорными выкладками.

Учет того, что несжимаемая жидкость может быть проводящей, в рамках подхода [6] приводит к следующей системе уравнений:

$$(1.1) \quad \frac{V^2}{h_1} \frac{\partial \ln h_2}{\partial x_1} = \frac{1}{h_1} \frac{\partial}{\partial x_1} \left(p + \frac{1}{2} H^2 \right) - \frac{\mu}{h_2} \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{1}{h_1 h_2} \frac{\partial h_1 V}{\partial x_2} \right)$$

$$(1.2) \quad \frac{V^2}{h_2} \frac{\partial \ln h_1}{\partial x_2} = \frac{1}{h_2} \frac{\partial}{\partial x_2} \left(p + \frac{1}{2} H^2 \right) + \frac{\mu}{h_1} \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{1}{h_1 h_2} \frac{\partial h_1 V}{\partial x_2} \right)$$

$$(1.3) \quad \frac{\partial h_2 V H}{\partial x_1} = \eta \left[\frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{h_2}{h_1} \frac{\partial H}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{h_1}{h_2} \frac{\partial H}{\partial x_2} \right) \right] \cdot \frac{\partial h_2 V}{\partial x_1} = 0$$

$$(1.4) \quad \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{1}{h_1} \frac{\partial h_2}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{1}{h_2} \frac{\partial h_1}{\partial x_2} \right) = 0$$

Здесь V — единственная отличная от нуля физическая компонента скорости; p — давление; H — компонента магнитного поля, перпендикулярная плоскости течения; h_1, h_2 — коэффициенты Ляме в системе x_1, x_2 ; μ, η — обычная и магнитная вязкость. Несущественные для дальнейшего константы ($\rho, 4\pi$ и т. д.) опущены.

Уравнения (1.1) и (1.2) — проекции уравнений движения на линию тока и ортогональную ей ось; (1.3) — уравнение для напряженности магнитного поля и уравнение неразрывности; (1.4) — единственное нетривиальное в двумерном случае тождество Ляме.

Уравнения Эйлера получаются из (1.1) — (1.4) при $\mu=0$; в случае непроводящей жидкости магнитное поле H отсутствует. Приближение пограничного слоя следует из (1.1) — (1.4), если в (1.2) — (1.4) положить $\partial/\partial x_1=0$. Уравнения в этой форме в случае, когда x_2 тождественна функции тока Ψ , при $H=0$ предложены в [7]. Отметим, что пренебрежение первой группой членов в условии эвклидовости (1.4) означает, что плоское движение заменяется движением по некоторой поверхности, которая неотличима от плоскости в рамках приближения пограничного слоя.

При $x_2=\Psi, H=0$ уравнения пограничного слоя принимают вид

$$(1.5) \quad \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{1}{2h_2^2} + p \right) = \mu \frac{h_1}{h_2} \frac{\partial}{\partial x_2} \left[\frac{1}{h_1 h_2} \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{h_1}{h_2} \right) \right]$$

$$\frac{1}{h_2^2} \frac{\partial \ln h_1}{\partial x_2} = \frac{\partial p}{\partial x_2}, \quad \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{1}{h_2} \frac{\partial h_1}{\partial x_2} \right) = 0, \quad V = \frac{1}{h_2}$$

Исключая p из уравнений (1.5), получаем полностью геометризованную форму: задача будет состоять в нахождении метрики h_1, h_2 , через которую выражаются V и p .

В [8] проведен групповой анализ адиабатического движения сжимаемого газа. Стационарные течения на плоскости в координатах x_1, x_2 описываются уравнениями (1.4) и

$$(1.6) \quad \rho V \frac{\partial V}{\partial x_1} = - \frac{\partial p}{\partial x_1}, \quad \rho V^2 \frac{\partial \ln h_1}{\partial x_2} = \frac{\partial p}{\partial x_2}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_1} (h_2 \rho V) = 0, \quad V \frac{\partial p}{\partial x_1} + \frac{A(p, \rho)}{h_2} \frac{\partial h_2 V}{\partial x_1} = 0$$

Для политропических течений (κ — показатель политропы) первое и четвертое уравнения из (1.6) принимают вид

$$(1.7) \quad \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{V^2}{2} + \frac{\kappa}{\kappa-1} \frac{p}{\rho} \right) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial x_1} (p \rho^{-\kappa}) = 0$$

Геометризованные уравнения Навье — Стокса и пограничного слоя для сжимаемого газа в двумерном случае сформулированы в [6]. Для течений на плоскости приближение пограничного слоя описывается уравнениями

$$\frac{\rho V}{h_1} \frac{\partial V}{\partial x_1} = - \frac{1}{h_1} \frac{\partial p}{\partial x_1} + \frac{\mu}{h_2} \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{1}{h_2} \frac{\partial V}{\partial x_2} \right), \quad \rho V^2 \frac{\partial \ln h_1}{\partial x_2} = \frac{\partial p}{\partial x_2}$$

$$(1.8) \quad \frac{\partial}{\partial x_1} (h_2 \rho V) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{1}{h_2} \frac{\partial h_1}{\partial x_2} \right) = 0, \quad p = R^* \rho T$$

$$\frac{c_v \rho V}{h_1} \frac{\partial T}{\partial x_1} = \frac{\lambda}{h_2} \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{1}{h_2} \frac{\partial T}{\partial x_2} \right) - \frac{p}{h_1 h_2} \frac{\partial h_2 V}{\partial x_1} + \mu \left(\frac{1}{h_2} \frac{\partial V}{\partial x_2} \right)^2$$

$$\mu, \lambda, c_v, R^* = \text{const}$$

В уравнениях [6], предназначенных для сквозного счета струи, необходимо использовать полное уравнение (1.4).

Электронную плазму при нулевой температуре (электронный пучок) при отсутствии внешнего магнитного поля H_0 можно трактовать как сжимаемую среду с дифференциальным уравнением состояния

$$(1.9) \quad \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\varphi - \frac{1}{2} V^2 \right) = 0, \quad V^2 \frac{\partial \ln h_1}{\partial x_2} = - \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} + H_0 h_2 V$$

$$\frac{\partial}{\partial x_1} (h_2 \rho V) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{h_2}{h_1} \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{h_1}{h_2} \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \right) = h_1 h_2 \rho$$

Здесь φ — скалярный потенциал, ρ — плотность пространственного заряда. Система (1.9) должна быть дополнена уравнением (1.4). Объемный характер сил, действующих на пучок со стороны самосогласованного электрического поля, делает уравнения движения для пучка тождественными уравнениям Эйлера в случае $\rho = \text{const}$. Аналогия оказывается довольно глубокой: в нестационарном случае уравнения пучка допускают ту же бесконечную группу с произвольными функциями времени [9], что и уравнения вязкой проводящей жидкости при $\rho = \text{const}$ [10]. Преобразования, полученные в [10], сохраняют, разумеется, уравнения Навье — Стокса в обычной (не магнитной) гидродинамике и уравнения Эйлера (см. также [11]).

Одним из наиболее важных случаев является потенциальное электростатическое течение ($H_0 = 0$), допускающее две формы полной геометризаци. Первая из них хорошо известна в теории однокомпонентных течений [12] и получается на основе уравнения неразрывности последовательным исключением всех гидродинамических переменных при $V = 1/h_1$

$$(1.10) \quad \frac{\partial}{\partial x_1} \int \frac{1}{h_1^2} \left[\frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{h_2}{h_1^4} \frac{\partial h_1}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{1}{h_1^2 h_2} \frac{\partial h_1}{\partial x_2} \right) \right] dx_2 = 0$$

Вторая следует из уравнения Пуассона после введения функции тока $x_2 = \Psi$, $\rho = h_1/h_2$

$$(1.11) \quad \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{h_2}{h_1^4} \frac{\partial h_1}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{1}{h_1^2 h_2} \frac{\partial h_1}{\partial x_2} \right) = -2h_1^2$$

Связь декартовых координат x, y с криволинейными x_1, x_2 в случае плоского движения может быть выражена посредством квадратур

$$\theta = - \int_{x_1^0}^{x_1} \frac{1}{h_2} \frac{\partial h_1}{\partial x_2} dx_1 + \int_{x_2^0}^{x_2} \left(\frac{1}{h_1} \frac{\partial h_2}{\partial x_1} \right)_{x_1=x_1^0} dx_2 + \text{const}$$

$$(1.12) \quad x + iy = \int_{x_1^0}^{x_1} h_1 e^{i\theta} dx_1 + i \int_{x_2^0}^{x_2} (h_2 e^{i\theta})_{x_1=x_1^0} dx_2 + \text{const}$$

Здесь θ — угол наклона линии тока к оси x ; $x_1^0, x_2^0 = \text{const}$.

2. Групповые свойства геометризованных уравнений. Применение метода [1, 2] к вычислению основной группы уравнений Эйлера для непроводящей жидкости приводит к следующему результату:

$$(2.1) \quad X_1 = f(x_1) \frac{\partial}{\partial x_1} - f'(x_1) h_1 \frac{\partial}{\partial h_1}, \quad X_2 = g(x_2) \frac{\partial}{\partial x_2} - g'(x_2) h_2 \frac{\partial}{\partial h_2}$$

$$(2.2) \quad X_3 = h_1 \frac{\partial}{\partial h_1} + h_2 \frac{\partial}{\partial h_2}, \quad X_4 = V \frac{\partial}{\partial V} + 2p \frac{\partial}{\partial p}, \quad X_5 = \frac{\partial}{\partial p}$$

Существование бесконечной группы (2.1) имеет очевидную геометрическую интерпретацию. Оно означает инвариантность расстояния между двумя точками относительно преобразований $x_1' = F(x_1)$, $x_2' = G(x_2)$.

Уравнения Навье – Стокса при $\rho = \text{const}$ и любой проводимости и уравнения Эйлера для проводящей жидкости инвариантны относительно преобразований с операторами X_1 , X_2 , X_3 и растяжения

$$(2.3) \quad X_3^* = h_1 \frac{\partial}{\partial h_1} + h_2 \frac{\partial}{\partial h_2} - V \frac{\partial}{\partial V} - 2p \frac{\partial}{\partial p} - H \frac{\partial}{\partial H}$$

Уравнения пограничного слоя, получаемые из (1.1) – (1.4), имеют более широкую группу за счет оператора

$$(2.4) \quad X_4^* = 2h_1 \frac{\partial}{\partial h_1} + h_2 \frac{\partial}{\partial h_2}$$

Для системы (1.5) кроме X_1 , X_3 имеем

$$(2.5) \quad X_2^{**} = x_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + 2h_1 \frac{\partial}{\partial h_1}, \quad X_3^{**} = h_1 \frac{\partial}{\partial h_1} + h_2 \frac{\partial}{\partial h_2} - 2p \frac{\partial}{\partial p}, \quad X_4^{**} = \frac{\partial}{\partial x_2}$$

Уравнения адиабатического движения сжимаемого газа (1.6) при произвольной $A(p, \rho)$ допускают группу X_1 , X_2 , X_3 из (2.1), (2.2). Специализации произвольного элемента A , приводящие к расширению группы, перечислены в [3] и могут быть перенесены на рассматриваемый случай при $\partial/\partial t = 0$. Так, для политропического газа с уравнениями (1.7) основная группа расширяется [8] за счет растяжений X_4 из (2.2) и

$$(2.6) \quad Y_5 = \rho \frac{\partial}{\partial \rho} + p \frac{\partial}{\partial p}$$

Уравнения Навье – Стокса для сжимаемого газа допускают преобразования X_1 , X_2 из (2.1) и растяжения

$$(2.7) \quad Y_3 = h_1 \frac{\partial}{\partial h_1} + h_2 \frac{\partial}{\partial h_2} - p \frac{\partial}{\partial p} - \rho \frac{\partial}{\partial \rho}, \quad Y_4 = V \frac{\partial}{\partial V} + p \frac{\partial}{\partial p} - \rho \frac{\partial}{\partial \rho} + 2T \frac{\partial}{\partial T}$$

Уравнения пограничного слоя (1.8) имеют более широкую группу, включающую в себя оператор X_4^* из (2.4).

Уравнения пучка (1.9) при $H_0 = 0$ инвариантны относительно преобразований X_1 , X_2 из (2.1) и

$$(2.8) \quad Z_3 = h_1 \frac{\partial}{\partial h_1} + h_2 \frac{\partial}{\partial h_2} - 2\rho \frac{\partial}{\partial \rho}, \quad Z_4 = V \frac{\partial}{\partial V} + 2\varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} + 2\rho \frac{\partial}{\partial \rho}, \quad Z_5 = \frac{\partial}{\partial \varphi}$$

При отличном от нуля внешнем магнитном поле группа оказывается менее широкой. Вместо операторов Z_3 , Z_4 из (2.8) имеет смысл только их сумма ($Z_3^* = Z_3 + Z_4$).

Для потенциальных электростатических течений, описываемых уравнениями (1.9) при $V = 1/h_1$, имеют место преобразование X_2 из (2.1) и

$$(2.9) \quad Z_1^{**} = x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} - h_1 \frac{\partial}{\partial h_1} + 2\rho \frac{\partial}{\partial \rho}$$

$$Z_3^{**} = h_1 \frac{\partial}{\partial h_1} + h_2 \frac{\partial}{\partial h_2} - 4\rho \frac{\partial}{\partial \rho}, \quad Z_4^{**} = \frac{\partial}{\partial x_1}$$