

О ГРАВИТАЦИОННО-УПРУГИХ И ГРАВИТАЦИОННО-КАПИЛЛЯРНЫХ НЕУСТАНОВИВШИХСЯ КОРАБЕЛЬНЫХ ВОЛНАХ

С. Ф. ДОЦЕНКО

(Севастополь)

Исследуется развитие трехмерных волн, генерируемых областью давлений, движущейся равномерно и прямолинейно по поверхности тонкой упругой изотропной пластинки, покрывающей слой идеальной жидкости конечной глубины. Давления действуют, начиная с некоторого момента времени. Обнаружено качественное сходство возникающих волн с гравитационно-капиллярными. Расчеты выполнены для ледяного покрова. Эта модельная задача позволяет рассмотреть ряд свойств колебаний ледяного покрова, возникающих при перевозке грузов по ледовым дорогам, посадке и взлете самолетов с ледовых полей и т. д. [1].

Развитие корабельных волн в жидкости конечной глубины при отсутствии плавающей пластинки исследовалось в [2, 3], гравитационно-капиллярные корабельные волны изучались в [4-6]. Некоторые свойства установившихся трехмерных волн, возникающих при движении нагрузки по поверхности плавающей упругой пластинки установлены в работе [1].

1. Пусть на поверхности горизонтального слоя $-\infty < x_1, y < +\infty, -H \leq z \leq 0$ ($H = \text{const}$) идеальной несжимаемой однородной жидкости плавает тонкая изотропная упругая пластинка. В момент времени $t=0$ к ее поверхности прикладываются давления

$$(1.1) \quad p = f(x_1 + vt, y), \quad v = \text{const} > 0$$

Иследуем процесс развития линейных волн, возбуждаемых в первоначально невозмущенной системе давлениями (1.1). Движение жидкости считаем потенциальным, функцию $f(x, y)$ — четной по x и y .

Задача сводится к решению уравнения Лапласа со следующими граничными и начальными условиями [1];

$$(1.2) \quad \Delta \varphi = 0$$

$$(1.3) \quad D \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right)^2 \zeta + \kappa \zeta_{tt} + \rho g \zeta + \rho \varphi_t = -f, \quad \zeta_t = \varphi_z \quad (z=0)$$

$$\varphi_z = 0 \quad (z = -H), \quad \varphi = \zeta = 0 \quad (t \leq 0)$$

Здесь φ — потенциал скорости, ζ — смещение поверхности пластинки от горизонтального положения, D — цилиндрическая жесткость пластинки, κ — масса пластинки, приходящаяся на единицу площади, ρ — плотность жидкости, g — ускорение свободного падения.

Интегральное представление для ζ находится из (1.2), (1.3) с помощью преобразований Фурье по x_1, y и Лапласа по t . В системе координат, связанной с давлениями, имеем

$$(1.4) \quad \zeta = -\frac{1}{4\pi^2} \text{Im} \left\{ \int_0^\infty dr \int_{-\pi}^\pi d\theta \int_0^t r M k_0^{-1} e^{i[rR \cos(\theta - \gamma) - \hbar \xi]} d\xi \right\}$$

$$(1.5) \quad M = \frac{r^k \operatorname{th} rH}{\rho + \chi r \operatorname{th} rH}, \quad k = rv \cos \theta - k_0, \quad k_0 = \sqrt{\frac{r \operatorname{th} rH (Dr^4 + \rho g)}{\rho + \chi r \operatorname{th} rH}}$$

$$x = R \cos \gamma, \quad y = R \sin \gamma, \quad m = r \cos \theta, \quad n = r \sin \theta, \quad x = x_1 + vt$$

Здесь $F(m, n)$ — трансформанта Фурье функции $f(x, y)$.

2. Асимптотику ξ при $R, t \rightarrow \infty$ найдем с помощью метода стационарной фазы для многомерных интегралов [7]. В силу четности ξ по y считаем $0 \leq \gamma \leq \pi$.

Стационарные точки (r, θ, ξ) удовлетворяют системе

$$(2.1) \quad R \cos(\theta - \gamma) = (v \cos \theta - k_0') \xi, \quad R \sin(\theta - \gamma) = v \sin \theta \xi$$

$$(2.2) \quad \cos \theta = k_0 (rv)^{-1} = \tau(r)$$

Функция τ такова, что $\tau(0) = cv^{-1}$ ($c = \sqrt{gH}$), $\tau'(0) = 0$, $\tau' < 0$ при $r \in (0, r_0)$, $\tau'(r_0) = 0$, $\tau' > 0$ при $r > r_0$, $\tau(\infty) = \infty$. Поэтому уравнение (2.2) имеет вещественные корни

$$(2.3) \quad \theta = \mp \theta_1, \quad \theta_1 = \arccos \tau(r)$$

только при $v_0 < v < c$, $r \in [r_1, r_2]$ или $v > c$, $r \in [0, r_2]$, где $\tau(r_1, r_2) = 1$, $v_0 = \min_{r > 0} [k_0(r)r^{-1}] = k_0(r_0)r_0^{-1}$

Из уравнений (2.1), полагая $\theta = \mp \theta_1$, находим

$$(2.4) \quad \operatorname{tg} \gamma = \pm \chi(r), \quad \chi = \frac{(r\tau)' \sqrt{1 - \tau^2}}{1 - \tau(r\tau)'}, \quad \xi = \frac{R \cos \gamma}{v[1 - \tau(r\tau)']}$$

Из условия принадлежности стационарных точек области интегрирования следуют неравенства $0 \leq \xi \leq t$.

Соотношения (2.4) с учетом последних неравенств совместны только при выборе верхних знаков в формулах (2.3), (2.4).

Таким образом, при $v < v_0$ интеграл (1.4) стационарных точек не имеет, при $v > v_0$ значения r , соответствующие стационарным точкам, являются решениями уравнения $\operatorname{tg} \gamma = \chi$ на отрезке $[r_1, r_2]$, если $v_0 < v < c$, или на отрезке $[0, r_2]$, если $v > c$.

Рассмотрим случаи: $v < v_0$, $v_0 < v < c$, $v > c$.

1. Пусть $v < v_0$. Интегрируя по ξ , преобразуем (1.4) к виду

$$(2.5) \quad \xi = \xi_1 - \xi_2$$

$$(2.6) \quad \xi_s = \frac{1}{4\pi^2} \operatorname{Re} \left\{ \int_0^\infty \int_{-\pi}^\pi r M(kk_0)^{-1} e^{i[LRr \cos(\theta - \gamma) - (s-1)kt]} d\theta dr \right\}$$

Интеграл ξ_1 описывает установившиеся, ξ_2 — чисто неустановившиеся волны ($\xi_2 \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$).

Рассмотрим поведение ξ_1 при $R \rightarrow \infty$. К интегралу по θ в (2.6) применим метод стационарной фазы, а к полученному одномерному интегралу интегрирование по частям в сингулярном случае [8]. Окончательно

$$(2.7) \quad \xi_1 = \frac{(-1)^{l+1} \Gamma(2l+1/2)}{\pi \sqrt{2\pi} (2l-1)!} \frac{HF_{2l-1}}{\rho(c^2 - v^2 \cos^2 \gamma)} R^{-2l-1} + O(R^{-2l-2})$$

$$F_{2l-1} = \left. \frac{d^{2l-1} F(r \cos \gamma, r \sin \gamma)}{dr^{2l-1}} \right|_{r=0}$$

Здесь $\Gamma(z)$ — гамма-функция Эйлера, F_{2i-1} — первый отличный от нуля член последовательности F_1, F_3, \dots .

Из (2.9) следует оценка $\xi_1 = O(R^{-\alpha})$, $\alpha \geq 3$.

Рассмотрим поведение ξ_2 при $R, t \rightarrow \infty$. Применим к интегралу ξ_2 метод стационарной фазы. Стационарные точки (r, θ) находятся из системы двух уравнений, совпадающих с (2.1) после замены ξ на t . Из них для нахождения r получаем уравнение

$$(2.8) \quad \tau_1(r) = R_1 t^{-1}, \quad \tau_1 = k_0', \quad R_1 = \sqrt{x_1^2 + y^2}$$

Функция τ_1 имеет единственный минимум $v_1 = \min_{r>0} \tau_1 < v_0$, $\tau_1(0) = c$,

$\tau_1(\infty) = \infty$. Поэтому при $v_1 < R_1 t^{-1} < c$ уравнение (2.8) имеет два корня $r = q_{1,2}$ ($q_1 < q_2$), при $R_1 t^{-1} > c$ — один $r = q_2$. Участок возрастания функции τ_1 и корень q_2 существуют благодаря упругости пластинки.

В соответствии с методом стационарной фазы

$$(2.9) \quad \xi_2 = -\xi_{21} - \xi_{22} + O(R_1^{-3/2})$$

$$\begin{aligned} \xi_{21} &= R_1^{-1} A(q_1) \cos \Phi(q_1) \quad (v_1 t < R_1 < ct), \quad \xi_{21} = 0 \quad (R_1 < v_1 t, R_1 > ct) \\ \xi_{22} &= R_1^{-1} A(q_2) \sin \Phi(q_2) \quad (R_1 > v_1 t), \quad \xi_{22} = 0 \quad (R_1 < v_1 t) \end{aligned}$$

$$A(r) = \sqrt{\frac{r \tau_1}{|k_0''|}} \frac{M}{2\pi k_0 (k_0 + r v x_1 R_1^{-1})}, \quad \Phi(r) = r R_1 - k_0 t$$

Здесь M определяется формулой (1.5), где $F = F(rx_1 R_1^{-1}, ry R_1^{-1})$.

Из формул (2.7), (2.9) следует, что при $v < v_0$ и больших R, t, R_1 чисто неустановившиеся волны ξ_2 преобладают. Они имеют амплитуды $O(R_1^{-1})$ и являются суперпозицией гравитационных ξ_{21} и упругих ξ_{22} волн, распространяющихся от области поверхности пластинки, к которой были приложены внешние давления в момент времени $t=0$. Волны ξ_{21} локализованы в кольце, а поэтому имеют передний и задний фронты, волны ξ_{22} имеют только задний фронт, совпадающий с задним фронтом волн ξ_{21} .

Скорость v_1 (минимальное значение групповой скорости гравитационно-упругих волн) можно оценить по формуле [9] $v_1 = 0.878 (Dg^3 \rho^{-1})^{1/4}$, соответствующей случаю $H = \infty, \kappa = 0$.

2. Пусть $v_0 < v < c$. Функция χ имеет вертикальную асимптоту $r = r_3 \in (r_1, r_2)$, $\chi \geq 0$ при $r \geq r_3$, $\chi(r_3 \mp 0) = \pm \infty$, $\chi' > 0$ при $r \in (r_3, r_2)$. Поведение $\chi(r)$ при $r \in [r_1, r_3]$ зависит от v : при $v_0 < v < v_2$ (v_2 — некоторое значение $v < c$) χ строго возрастает, при $v_2 < v < c$ она имеет два экстремума $\chi_1 > \chi_2$. Следовательно, для значений $v_0 < v < v_2$ уравнение $\text{tg } \gamma = \chi$ имеет один простой корень $r = p_3$ при всех γ , для значений $v_2 < v < c$ — один простой корень $r = p_1$ ($r = p_2$) при $0 < \gamma < \gamma_2$ ($\gamma_1 < \gamma < \pi$) и три простых корня $r = p_3$ при $\gamma_2 < \gamma < \gamma_1$, где $\gamma_{1,2} = \text{arctg } \chi_{1,2}$, $p_1 < p_2 < p_3$. При $\gamma \rightarrow \gamma_{1,2}$ два простых корня преобразуются в один кратный.

Поведение функции χ для жидкости со свободной поверхностью [2, 3] качественно отличается от описанного выше: при $D = \kappa = 0$ она определена на отрезке $[r_1, \infty)$, $0 \leq \chi < \infty$, $\chi(r_1) = \chi(\infty) = 0$, χ имеет только один экстремум $\chi = \chi_1$ (максимум). Поэтому корень $r = p_3$ и угол $\gamma = \gamma_2$ обусловлены упругостью пластинки.

Корню $r = p_3$ соответствует система волн, сосредоточенная в определенных секторах плоскости x, y ; неравенства $0 \leq \xi \leq t$ выделяют те их части, в которых в момент времени t сосредоточены волны с амплитудами

$O(R^{-1/2})$. Применяя метод стационарной фазы, получим асимптотику ξ при $R, t \rightarrow \infty$

$$(2.10) \quad v_0 < v < v_2 \quad \xi = \xi_3 + O(R^{-1}) \\ \xi_3 = \eta_3 \quad (0 < \gamma < \pi, R < u_3(\gamma)t), \quad \xi_3 = 0 \quad (0 < \gamma < \pi, R > u_3(\gamma)t)$$

$$(2.11) \quad v_2 < v < c \quad \xi = \sum_{s=1}^3 \xi_s + O(R^{-1})$$

$$(2.12) \quad \xi_1 = \eta_1 \quad (0 < \gamma < \gamma_1, R < u_1(\gamma)t), \quad \xi_1 = \mu_1 \quad (\gamma = \gamma_1, R < u_1(\gamma_1)t) \\ \xi_1 = 0 \quad (\gamma_1 < \gamma < \pi, R > 0; \quad 0 < \gamma < \gamma_1, R > u_1(\gamma)t) \\ \xi_2 = \eta_2 \quad (\gamma_2 < \gamma < \gamma_1, R < u_2(\gamma)t), \quad \xi_2 = \mu_2 + O(R^{-2/3}) \quad (\gamma = \gamma_1, \\ R < u_2(\gamma_1)t)$$

$$(2.13) \quad \xi_2 = 0 \quad (0 < \gamma < \gamma_2, \quad \gamma_1 < \gamma < \pi, R > 0; \quad \gamma_2 < \gamma < \gamma_1, R > u_2(\gamma)t) \\ \xi_3 = \eta_3 \quad (\gamma_2 < \gamma < \pi, R < u_3(\gamma)t), \quad \xi_3 = 0 \quad (0 < \gamma < \gamma_2, R > 0; \\ \gamma_2 < \gamma < \pi, R > u_3(\gamma)t) \\ \eta_s = R^{-1/2} \Psi(p_s, \gamma) \cos[R\Phi(p_s, \gamma) + (-1)^{s+1} \pi/4] \\ \mu_s = R^{-1/2} \Psi_1(p_s) \cos[R\Phi(p_s, \gamma)], \quad \Phi(r, \gamma) = r(\tau \cos \gamma - \sqrt{1-\tau^2} \sin \gamma)$$

$$\Psi(r) = -\frac{M}{v k_0 \sqrt{1-\tau^2} (2\pi |\Phi''|)^{1/2}}, \quad \Psi_1(r) = -\frac{\Gamma(1/3)}{2^{2/3} 3^{1/6} \pi v k_0 \sqrt{1-\tau^2} (|\Phi'''|)^{1/2}}$$

$$u_s = u(p_s, \gamma), \quad u(r, \gamma) = v \sqrt{1-\tau^2} (\tau \sin \gamma + \sqrt{1-\tau^2} \cos \gamma)^{-1}$$

Из формул (2.10), (2.11) следует, что при $v_0 < v < v_2$ движущееся возмущение генерирует одну систему волн ξ_3 , а при $v_2 < v < c$ — три системы ξ_1, ξ_2, ξ_3 . Волны ξ_1 и ξ_2 являются аналогами поперечных и продольных корабельных волн; в образовании волн ξ_3 , возникающих перед и позади возмущения, существенную роль играет упругость пластинки. В угле $|\gamma| < \gamma_2$ волны ξ_2 и ξ_3 с амплитудами $O(R^{-1/2})$ не образуются. Перечисленные системы волн локализованы в расширяющихся со временем областях; величины $u_s > 0$ являются радиальными скоростями передних фронтов отдельных систем волн.

Скорость v_0 (минимальное значение фазовой скорости гравитационно-упругих волн) можно оценить по формуле [1, 9]

$$v_0 = 1.325 (Dg^3 \rho^{-1})^{1/3} = 1.509 v_1$$

3. Пусть $v > c$. Функция χ определена на отрезке $[0, r_2]$, имеет вертикальную асимптоту $r = r_3 \in (0, r_2)$, $\chi \geq 0$ при $r \leq r_3$, $\chi(r_3 \mp 0) = \mp \infty$, $\chi(\infty) = 0$, $\chi' > 0$ при $r \in (r_3, r_2)$, $\chi(0) = \chi_3 > 0$. При $r \in (0, r_3)$ χ имеет единственный экстремум $\chi = \chi_2$ (минимум). Следовательно, для углов $0 < \gamma < \gamma_2$ уравнение $\text{tg } \gamma = \chi$ корней не имеет, при $\gamma_2 < \gamma < \gamma_3$ оно имеет два простых корня $r = p_2, 3$ ($p_2 < p_3$), при $\gamma_3 < \gamma < \pi$ — один простой корень $r = p_3$, где $\gamma_s = \text{arctg } \chi_s$. Углу $\gamma = \gamma_2$ соответствует кратный корень.

Для жидкости со свободной поверхностью [2] $\chi > 0$, χ определена на отрезке $[0, \infty)$, $\chi' < 0$, $\chi(\infty) = 0$. Поэтому корень $r = p_3$ и угол $\gamma = \gamma_2$ существуют благодаря упругости пластинки.

Асимптотика ξ при $R, t \rightarrow \infty$ имеет вид

$$(2.14) \quad \xi = \xi_2 + \xi_3 + O(R^{-1})$$

где $\xi_{2,3}$ определяются по формулам (2.12), (2.13) после замены угла γ_1 на γ_3 .

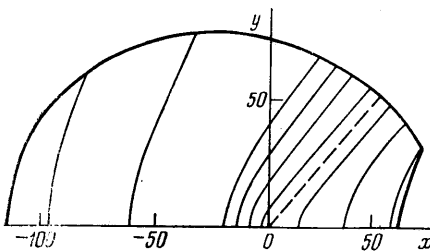
Выражения (2.12)–(2.14) показывают, что область давлений, движущаяся со скоростью $v > \sqrt{gH}$, генерирует две системы волн с амплитудами $O(R^{-1/2})$. Волны ξ_2 сосредоточены в углах $\gamma_2 < |\gamma| < \gamma_3$ и соответствуют продольным корабельным волнам, волны ξ_3 аналогичны рассмотренным в случае $v_0 < v < c$. В секторе $|\gamma| < \gamma_2$ (непосредственно за движущимся возмущением) волны с амплитудами $O(R^{-1/2})$ не образуются.

Выражение для угла γ_3 находится в явном виде:

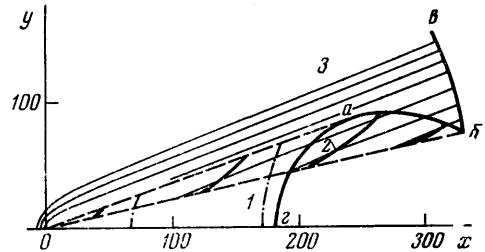
$$(2.15) \quad \gamma_3 = \arcsin(cv^{-1})$$

Угол γ_3 не зависит от параметров пластинки. Формула (2.15) совпадает с известной формулой теории корабельных волн [10, 2].

3. По формулам (2.10), (2.11) были рассчитаны фазовые портреты и передние фронты волн, генерируемых сосредоточенными давлениями,



Фиг. 1



Фиг. 2

перемещающимися по поверхности плавающего ледяного покрова толщины h (м). Параметры льда: модуль Юнга — $3 \cdot 10^9$ н/м², коэффициент Пуассона — 0.34, плотность — 870 кг/м³. При $H \geq 20$ м и $h = 0.1$ м значения v_0 , v_2 равны соответственно 6.2, 4.1, 11 м/сек.

На фиг. 1 в плоскости x, y (м) построены узловые линии и передний фронт волн в случае $v_0 < v < v_2$ ($H = 2 \cdot 10^3$ м, $h = 0.1$ м, $v = 8$ м/сек, $t = 1$ сек). В силу подобия узловых линий и передних фронтов относительно начала координат для больших R и t они имеют такой же вид. При $y \rightarrow \infty$ волны близки к плоским с длиной λ_0 и углом наклона γ_0 гребней к оси x , определяемыми формулами

$$\lambda_0 = 2\pi r_0^{-1} \sec^2 \gamma_0, \quad \gamma_0 = \arcsin(v_0 v^{-1}) \quad (\tau'(r_0) = 0)$$

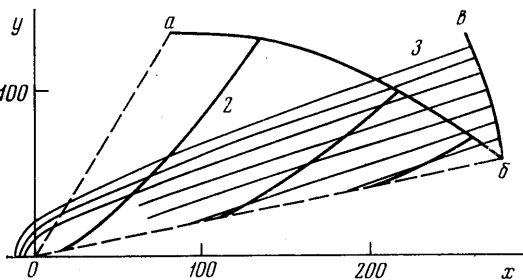
Узловые линии и передние фронты отдельных систем волн в случае $v_2 < v < c$ показаны на фиг. 2 ($H = 2 \cdot 10^3$ м, $h = 0.1$ м, $v = 18$ м/сек, $t = 20$ сек). Кривым с номерами $s = 1, 2, 3$ соответствуют волны ξ_s ; ag и ab — передние фронты волн ξ_1 и ξ_2 , $бв$ — часть переднего фронта волн ξ_3 (неизображенная часть аналогична соответствующему участку переднего фронта волн ξ_3 , показанному на фиг. 1). Лучи $об$ и $оа$ соответствуют углам $\gamma = \gamma_2$ и $\gamma = \gamma_1$. Из фиг. 2 следует, что поперечные волны и форма их переднего фронта качественно такие же, как в жидкости со свободной поверхностью [2, 3], однако система продольных корабельных волн значительно искажена.

Волновая картина в случае $v > c$ представлена на фиг. 3 ($H = 30$ м, $h = 0.1$ м, $v = 20$ мсек⁻¹, $t = 15$ сек). Отрезку $оа$ соответствует луч $\gamma = \gamma_3$, остальные обозначения совпадают с предыдущими. В отличие от случая $v_0 < v < c$ все гребни продольных волн ξ_2 оканчиваются на переднем фронте, причем при достаточно больших R они параллельны лучу $\gamma = \gamma_3$.

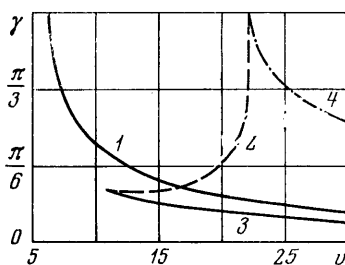
Зависимости углов γ_s ($s = 0-3$) от v (мсек⁻¹) для $h = 0.1$ м, $H = 50$ м даны на фиг. 4. Кривым под номерами $s = 1-4$ соответствуют углы γ_{s-1} .

С увеличением v углы $\gamma_0, \gamma_2, \gamma_3$ убывают, угол γ_1 возрастает. При $v \rightarrow v_0 + 0, v \rightarrow v_2 + 0, v \rightarrow c$ имеем соответственно $\gamma_0 \rightarrow \pi/2, \gamma_1 - \gamma_2 \rightarrow 0, \gamma_{1,3} \rightarrow \pi/2$. С ростом h и уменьшением H углы $\gamma_{1,2}$ возрастают, причем изменение h наиболее существенно влияет на угол γ_2 , а изменение H — на угол γ_1 . Упругая пластинка увеличивает сектор $|\gamma| < \gamma_1$ сосредоточения поперечных волн по сравнению со случаем $h=0$.

Скорости передних фронтов u_s являются наибольшими для системы упругих волн, а из двух систем гравитационных волн — для продольных. С ростом h величины u_s убывают. Скорости $u_{2,3}$ как функции v возрастают; u_1 , рассматриваемая при $v_2 < v < c$, сначала возрастает, а затем убывает. При этом $u_1 \rightarrow 0$ при $v \rightarrow v_2$ и $v \rightarrow c$. Отметим, что на лучах $\gamma=0$ и $\gamma=\pi$ длины волн ξ_1, ξ_3 и скорости их передних фронтов совпадают со значениями для плоского случая.



Фиг. 3



Фиг. 4

4. Рассмотрим теперь задачу о развитии корабельных волн в жидкости конечной глубины, подверженной действию сил поверхностного натяжения. В этом случае в задаче (1.2), (1.3) динамическое граничное условие при $z=0$ заменяется таким [4]

$$\rho\phi_t + \rho g \zeta - T \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \zeta = -f$$

где T — коэффициент поверхностного натяжения.

Интегральное представление для ζ находится аналогично случаю плавающей упругой пластинки и имеет вид (1.4), (1.5), но необходимо положить $\kappa=0$ и заменить k_0 на

$$k_1 = \sqrt{(gr + ar^3) \operatorname{th} rH}, \quad a = T\rho^{-1}.$$

Дальнейший анализ интеграла (1.4) проводится по схеме, изложенной в п.2. Оказывается, что при $H > \sqrt{3ag}^{-1}$ поведение новых функций τ и χ аналогично их поведению в случае плавающей упругой пластинки. Поэтому и волновые движения в этих двух случаях качественно аналогичны при значениях v из соответствующих интервалов скоростей. Так, узловые линии отдельных систем волн и их передние фронты, изображенные на фиг. 1, 2, имеют много общего с рассчитанными для гравитационно-капиллярных корабельных волн в жидкости бесконечной глубины [4-6]. Значения критических скоростей v_s ($s=0, 1, 2$) можно определить при $H=\infty$ по формулам [4, 6]

$$v_0 = \sqrt[4]{4ga}, \quad v_1 = 1.086 \sqrt[4]{ga}, \quad v_2 = 2.740 \sqrt[4]{ga}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Хейсин Д. Е. Динамика ледяного покрова. Л., Гидрометеиздат, 1967.
2. Черкесов Л. В. Неустановившиеся волны. Киев, «Наукова думка», 1970.
3. Смородин А. И. О применении асимптотического метода для анализа волн при неустановившемся движении источника. ПММ, 1965, т. 29, вып. 1.
4. Ламб Г. Гидродинамика. М.—Л., Гостехиздат, 1947.
5. Stapper G. D. Surface waves generated by travelling pressure point. Proc. Roy. Soc., A, 1964, vol. 282, No. 1391.
6. Федосенко В. С. Неустановившиеся капиллярно-гравитационные корабельные волны. В сб. «Морские гидрофизические исследования», вып. 3. Севастополь, 1970.
7. Федорюк М. В. Метод стационарной фазы для многомерных интегралов. Ж. вычислит. матем. и матем. физ., 1962, т. 2, № 1.
8. Копсон Э. Т. Асимптотические разложения. М., «Мир», 1966.
9. Хейсин Д. Е. Некоторые нестационарные задачи динамики ледяного покрова. Тр. Аркт. Антаркт. НИИ, 1971, т. 300.
10. Havelock P. H. The propagation of groups of waves in dispersive media, with application to waves on water produced by travelling disturbance. Proc. Roy. Soc. London, Ser. A, 1908, vol. 81, No. 549.