

**КОНВЕКТИВНЫЕ ТЕЧЕНИЯ В ВЕРТИКАЛЬНОМ СЛОЕ
С ПРОСТРАНСТВЕННО-МОДУЛИРОВАННЫМ РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ
ТЕМПЕРАТУРЫ НА ГРАНИЦАХ**

Л. П. ВОЗОВОЙ

(Пермь)

Исследуются стационарные конвективные движения в плоском вертикальном слое жидкости. Температура вдоль границ слоя меняется по гармоническому закону и имеет на каждой из границ разные средние значения. Таким образом, наряду со средним боковым подогревом слоя задана пространственно-периодическая модуляция температуры стенок. Для различных значений параметров задачи методом сеток найдены форма плоских установившихся движений, области существования сквозных течений и течений ячеистой структуры. Определена зависимость основных характеристик движения жидкости от числа Грасгофа. Приведенные в статье результаты относятся к случаю, когда период модуляции температуры границ совпадает с длиной волны критической моды плоскопараллельного течения.

Численное исследование надкритических движений в вертикальном слое с плоскими изотермическими границами, нагретыми до разной температуры, проводилось в [1-3]. В [4] рассматривалось влияние пространственно-периодической неоднородности, обусловленной искривлением стенок, на форму и устойчивость конвективных движений в вертикальном слое при боковом подогреве.

1. Пусть вязкая несжимаемая жидкость заполняет бесконечный вертикальный слой с твердыми границами. Начало координат выбрано в середине слоя, ось x направлена вертикально вверх, ось y — горизонтально. Температура границ промодулирована с амплитудой η и волновым числом k_T относительно средних значений $\pm\Theta$ на правой и левой стенках

$$(1.1) \quad T_{1,2} = \pm\Theta (1 + \eta \cos k_T x) \quad (y = \pm d)$$

где $2d$ — толщина слоя. Таким образом, разность температур стенок слоя в горизонтальном сечении меняется с высотой по гармоническому закону около среднего значения 2Θ с амплитудой $2\eta\Theta$.

Запишем безразмерные уравнения плоского конвективного движения для функции тока ψ ; температуры T и вихря скорости $\xi = (\text{rot } \psi)_z$

$$(1.2) \quad \frac{\partial \xi}{\partial t} = \Delta \xi + \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \right) \xi - G \frac{\partial T}{\partial y}$$

$$(1.3) \quad \xi = \Delta \psi \quad \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} = v_y, \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} = -v_x \right)$$

$$(1.4) \quad \frac{\partial T}{\partial t} = P^{-1} \Delta T + \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \right) T$$

На твердых границах слоя будем иметь

$$(1.5) \quad \psi = \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0, \quad T_{1,2} = \pm (1 + \eta \cos kx) \quad (y = \pm 1)$$

(k — безразмерное волновое число). В качестве единиц расстояния, времени, функции тока и температуры выбраны соответственно d , d^2/ν , ν , Θ (ν — кинематическая вязкость жидкости). Уравнения содержат два безразмерных параметра — число Грасгофа G , определенное по средней полуразности температур Θ и полуширине слоя d , число Прандтля P .

Будем рассматривать движения, периодически зависящие от вертикальной координаты x . Это позволяет искать решение задачи в конечной области $-1 < y < 1$, $0 < x < l$, причем длина l расчетного прямоугольника кратна периоду модуляции температуры стенок. Система уравнений конвекции (1.2)–(1.4) решалась методом сеток. При составлении конечно-разностных аналогов уравнений (1.2) и (1.4) использовалась схема продольно-поперечной прогонки [5]. Вычисление вихря скорости на твердых поверхностях проводилось с помощью модифицированной формулы Тома [2]

$$(1.6) \quad \xi(x, \pm 1) = \frac{2\psi(x, \pm 1 \mp h)}{h^2} - \frac{G}{12} h(h-4)$$

где h — шаг сетки по оси y .

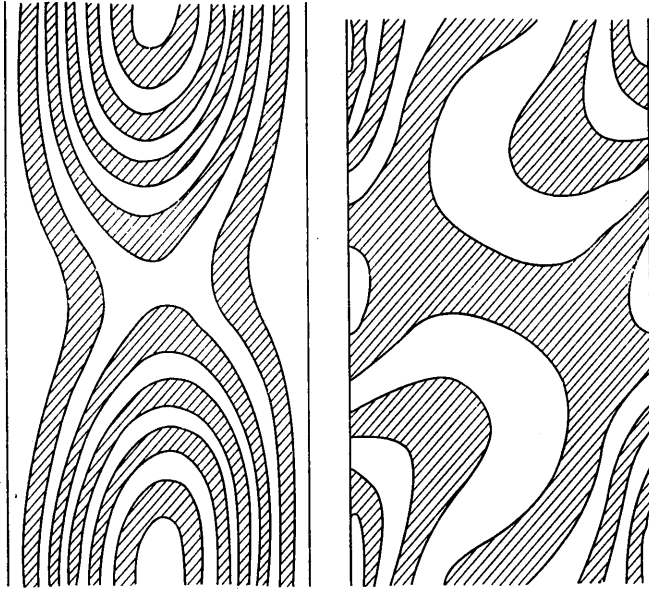
Уравнение (1.3) решалось итерационным методом Либмана с последовательной верхней релаксацией. Интегральные характеристики течения находились методом установления. Расчеты проводились на сетке 30×15 .

2. Перейдем к изложению результатов вычислений. Предварительно напомним некоторые выводы, относящиеся к решению невозмущенной задачи с изотермическими границами, поддерживаемыми при разных температурах.

При достаточно малых числах Грасгофа G возникает плоскопараллельное течение с кубическим профилем скорости и линейным профилем температуры. С ростом G наступает неустойчивость этого течения, характер которой существенно зависит от значения числа Прандтля. Если $P < 12$, то к неустойчивости приводят стоячие возмущения, фазовая скорость которых равна нулю. Среди периодических возмущений наиболее опасна мода с волновым числом $k_c = 1.38$; соответствующее критическое число Грасгофа $G_c = 497$ [6] (приведенные значения критических чисел имеют место при $P = 1$ и слабо зависят от числа Прандтля). Нелинейные расчеты [1, 2] позволяют проследить за эволюцией вторичных движений в надкритической области $G > G_c$. При $P > 12$ неустойчивость плоскопараллельного решения носит колебательный характер и вызывается бегущими возмущениями [3].

Расчеты течения в слое с модуляцией температуры границ проводились для разных значений параметров G , η , k при фиксированном числе Прандтля $P = 1$. Рассмотрим случай, когда период пространственной модуляции температуры границ слоя $2\pi/k$ близок к длине волны $2\pi/k_c$ критической моды основного плоскопараллельного решения невозмущенной задачи.

Зафиксируем величину амплитуды модуляции η и рассмотрим эволюцию течения с ростом числа Грасгофа. При любых значениях $\eta \neq 0$ плоскопараллельное движение в слое невозможно и устанавливается течение, обладающее периодичностью температуры границ. При достаточно малых значениях числа Грасгофа центры вихрей локализуются в областях слоя с максимальным перепадом температур между стенками (фиг. 1; $G = 100$, $\eta = 1.4$; слева — линии тока, справа — изотермы). По мере увеличения G интенсивность движения с такой ориентацией вихрей сначала увеличивается, а затем проходит через максимум и падает до нуля при $G = G_1$ (на длине ячейки формируется двухвихревая структура с волновым числом



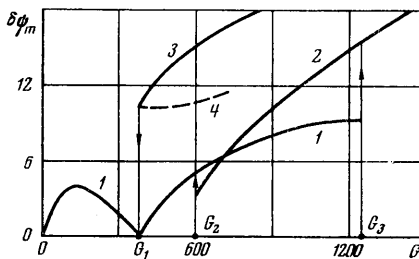
Фиг. 1

$2k$, обладающая очень слабой интенсивностью). При дальнейшем увеличении параметра G амплитуда гармоники k вновь нарастает, но меняет при этом знак — центры вихрей оказываются расположенными в местах с минимальным поперечным градиентом температуры.

Среднее значение поперечной компоненты скорости может быть охарактеризовано величиной

$$\delta\psi_m \equiv \max_{i,k} \psi_{ik} - \min_{i,k} (\max \psi_{ik}),$$

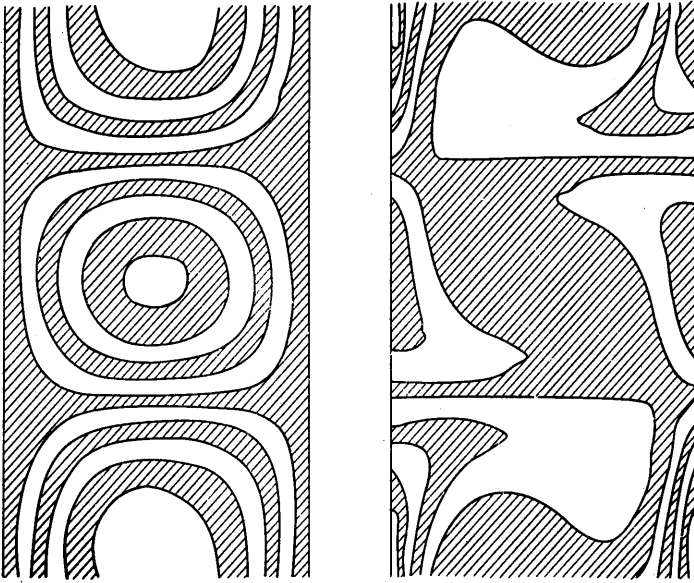
где индексы i и k нумеруют узлы сетки соответственно по осям x и y . На фиг. 2 изображена зависимость $\delta\psi_m$ от числа Грасгофа для значения $\eta=1.4$. Описанное выше течение играет роль основного решения рассматриваемой задачи. На графике ему соответствует кривая 1. В точке $G=G_2$ это решение теряет устойчивость: происходит переход на ветвь 2, который сопровождается конечным изменением величины $\delta\psi_m$ и других характеристик течения. При этом размеры каждого из вихрей остаются прежними ($2\pi/k$), но сама вихревая цепочка смещается вдоль слоя на полпериода и занимает относительно стенок положение, аналогичное изображенному на фиг. 1.



Фиг. 2

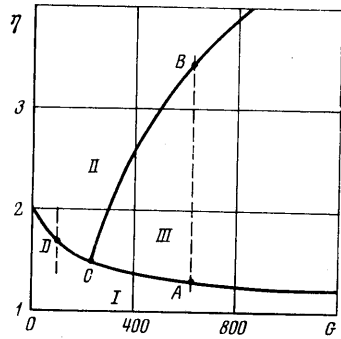
Особенностью нового движения является резкое возрастание теплообмена между нагретыми и холодными участками каждой из границ слоя. При этом средний по периоду тепловой поток через слой с ростом числа Грасгофа даже убывает. Области устойчивости движений обоих типов перекрываются на интервале (G_2, G_3) .

Наряду со сквозными течениями, которые описываются кривыми 1 и 2, при заданном значении амплитуды модуляции $\eta=1.4$ существуют течения, обладающие ячеистой структурой (картина конвекции указанного



Фиг. 3

типа для значений параметров $G=625$, $\eta=3.5$ представлена на фиг. 3). Для таких движений весь поток в слое разбивается на автономные конвективные ячейки, через границы которых не происходит перетекания жидкости. Кроме вихрей с направлением движения жидкости против часовой стрелки появляются вихри противоположного направления, причем их интенсивность меньше благодаря преимущественному подогреву слоя справа (на фиг. 3 такой вихрь расположен в центре области). На фиг. 2 конвекции ячеистого типа соответствует кривая 3. Выход на это решение осуществлялся путем задания в начальный момент времени достаточно сильного возмущения вихря скорости $\Delta\xi$ в центре расчетной области. Решение, описывающее конвективные ячейки, имеет конечную точку $G=G_1$, из которой наряду с кривой 3 выходит кривая 4, изображающая метастабильное движение. Для реализации такого движения при фиксированном значении G требовалось подобрать определенную величину $\Delta\xi(G)$ начального возмущения вихря в центре ячейки, которое выводило бы исходное состояние (например, равновесие) на кривую 4. Время жизни метастабильного движения определяется близостью заданной величины возмущения к нужному значению $\Delta\xi(G)$.



Фиг. 4

Наличие описанных типов течений существенно зависит от величины амплитуды модуляции η . Ячеистая конвекция возникает лишь в том случае, когда амплитуда модуляции $\eta > 1.225$. Если η достаточно мало, то линии, аналогичные кривым 2—4 на фиг. 2, исчезают и остается только кривая 1, описывающая основное решение. На основании расчетов, проведенных для различных значений параметров η и G , можно построить сводную диаграмму режимов течений в рассматри-

ваемой задаче. На фиг. 4 показаны области существования течений разных типов на плоскости (η, G) . В области I реализуются только сквозные движения; в области II устойчивыми оказываются движения типа конвективных ячеек. В области III могут существовать течения обоих типов. Штрихпунктирная прямая соответствует сечению $\eta=1.4$, рассмотренному выше (фиг. 2). Если зафиксировать число Грасгофа, а менять параметр η (вертикальное сечение на фиг. 4), то возможны два случая.

Сечение расположено правее точки C . Тогда с ростом η сквозное течение оказывается устойчивым вплоть до точки B , где скачком происходит переход на движение в форме конвективных ячеек. Обратный переход при уменьшении η наблюдается в точке A .

Сечение расположено левее точки C . В этом случае профиль течения непрерывно деформируется по мере увеличения η , пока в точке D не произойдет пережатие потока. Начиная с этого значения η течение замыкается в пределах каждой ячейки и появляется вихрь с неправильной циркуляцией. При уменьшении η в той же точке D ячейки плавно размыкаются.

3. Сравним приведенные выше результаты решения задачи о влиянии пространственно-периодической модуляции температуры границ на конвекцию в подогреваемом боку вертикальном слое (задача A) с исследованным ранее [4] влиянием гармонического искривления боковых границ слоя (задача B). В обоих случаях «локальное» число Грасгофа, определенное по разности температур границ в данном сечении слоя и его толщине, периодически меняется вдоль вертикальной координаты. В результате плоскопараллельное движение искажается уже при малых числах Грасгофа. Возникает вихревое движение с периодом граничного возмущения, которое остается устойчивым с ростом числа G в окрестности критической точки $G=G_c$ невозмущенной задачи. Однако между этими двумя способами воздействия на конвекцию имеется ряд отличий. Рассмотрим эти отличия в случае, когда период волнистости стенок и период модуляции температуры плоских границ совпадают с длиной волны критической моды плоскопараллельного течения.

В задаче A могут существовать течения типа конвективных ячеек, которые реализуются при амплитуде модуляции $\eta > 1$ (в этом случае некоторые участки «холодной» стенки имеют более высокую температуру, чем отдельные участки «горячей» стенки). В задаче B осуществляются только сквозные движения (напомним, что амплитуда волнистости границ ϵ не может превышать единицы).

В задаче A цепочка вихрей может ориентироваться по отношению к стенкам двумя способами: центры вихрей располагаются либо в областях с максимальным перепадом температур между границами, либо с минимальным — в зависимости от значений параметров η и G . В задаче B центры вихрей всегда оказываются расположенными в широких участках слоя.

Основное решение задачи A может терять устойчивость с ростом числа Грасгофа при достаточно больших значениях параметра η . В результате потери устойчивости происходит смещение вихревой цепочки относительно границ на полпериода. Основное решение задачи B остается устойчивым при любых G как для малых, так и для больших значений ϵ .

В количественном отношении искривление стенок оказывает значительно более сильное влияние на конвекцию в слое, чем модуляция температуры. Так, при $\epsilon=0.1$ и надкритичности $(G-G_c)/G_c=2.5$ относительное изменение интегральных характеристик течения по сравнению с невозмущенной задачей составляет 47%, в то время как модуляция температуры границ с амплитудой $\eta=0.1$ приводит при той же надкритичности к изменению этих характеристик только на 3%.

Автор благодарит Е. М. Жуховицкого за постановку задачи и руководство работой и Г. З. Гершуни за обсуждение и полезные замечания.

Поступила 31 V 1977

ЛИТЕРАТУРА

1. Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М., Тарунин Е. Л. Вторичные стационарные конвективные движения в плоском вертикальном слое жидкости. Изв. АН СССР, МЖГ, 1968, № 5.
2. Тарунин Е. Л. О вторичных стационарных конвективных течениях в вертикальном слое. В сб. «Гидродинамика», вып. 4. Уч. зап. Пермск. гос. ун-та, 1972, № 293.
3. Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М., Сорокин Л. Е., Тарунин Е. Л. Вторичные колебательные конвективные движения в плоском вертикальном слое жидкости. Изв. АН СССР, МЖГ, 1974, № 1.
4. Возовой Л. П. Конвекция в вертикальном слое с волнистыми границами. Изв. АН СССР, МЖГ, 1976, № 2.
5. Яненко Н. Н. Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики. Новосибирск, «Наука», 1967.
6. Рудаков Р. Н. Спектр возмущений и устойчивость конвективного движения между вертикальными плоскостями. ПММ, 1967, т. 31, вып. 2.