

5. Омелик А. И. Измерение коэффициентов передачи импульса к поверхностям различной структуры в гиперзвуковом свободномолекулярном потоке. Изв. АН СССР, МЖГ, 1977, № 4.
6. Фрумкин А. Н., Багодский В. С., Иофа А. З., Кабанов Б. Н. Кинетика электродных процессов. МГУ, 1952.
7. Адсорбция и двойной электрический слой в электрохимии. М., «Наука», 1972.
8. Дэшман С. Научные основы вакуумной техники. М., «Мир», 1964.
9. Баранов И. С., Жестков Б. Е., Омелик А. И., Орлова З. Т. Аэродинамическая установка со свободномолекулярным потоком и высокой температурой торможения. Теплофизика высоких температур, 1973, т. 11, № 3.
10. Никифоров А. П., Омелик А. И. Дифференциальный измеритель удельного расхода для свободномолекулярных потоков. Тр. ЦАГИ, 1977, вып. 1853.

УДК 534.2

КОЛЕБАНИЯ ГАЗА В ТРУБАХ ПОД ВОЗДЕЙСТВИЕМ ПЕРИОДИЧЕСКИ МЕНЯЮЩЕГОСЯ ДАВЛЕНИЯ

Г. Е. ДУМНОВ

(Москва)

В работе рассматриваются колебания газа в трубе под действием периодически меняющегося давления на частоте ее линейного резонанса и разогрев газа возникающими ударными волнами. Задача решается численным методом, имеющим третий порядок точности по координате и по времени. Предложен разностный алгоритм для вычисления параметров на границе. Получены аппроксимационные соотношения, позволяющие определить поведение параметров системы в зависимости от времени.

Колебания газа в полых резонансных трубах имеют сложный характер. Среди многочисленных моделей этого явления можно выделить задачу о колебании газа в резонансной трубе под воздействием периодически меняющегося давления.

Считая газ совершенным и идеальным, пренебрегая двумерностью течения у устья, пограничным слоем внутри резонатора, а также не учитывая влияние вытекающего газа на внешнее течение, можно решать задачу в одномерном приближении, используя одномерные нестационарные уравнения Эйлера

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} = 0$$

$$f = \begin{vmatrix} \rho \\ \rho u \\ l \end{vmatrix}, \quad F = \begin{vmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ (l + p)u \end{vmatrix}, \quad l = \frac{p}{\gamma - 1} + \frac{1}{2} \rho u^2$$

Здесь ρ — плотность, p — давление, l — полная энергия на единицу объема, u — скорость, γ — постоянная адиабаты газа, x — координата, отсчитываемая от закрытого конца резонатора, t — время.

Уравнения дополняются следующими граничными условиями:

1) на закрытом конце резонатора ($x=0$) скорость газа равна нулю ($u=0$) — условие непротекания;

2) на устье резонатора ($x=L$, L — длина трубы) задается периодически меняющееся давление ($p=p_0(1+V_0 \sin(\omega t))$), p_0 — некоторое среднее давление, V_0 — безразмерная амплитуда колебаний, ω — частота).

Представляя решение в виде ряда по степеням амплитуды колебания давления и линеаризуя уравнения Эйлера, в первом приближении получим решение в виде

обычной стоячей волны, имеющей резонансные частоты $\pi/2(2K+1)$, $k=0, 1, 2, 3, \dots$

$$u = -\frac{a_0 V_0}{\gamma} \sin\left(B_0 \frac{x}{L}\right) \frac{\cos(\omega t)}{\cos B_0}$$

$$p = p_0 \left[1 + V_0 \cos\left(B_0 \frac{x}{L}\right) \frac{\sin(\omega t)}{\cos B_0} \right], \quad B_0 = \frac{\omega L}{a_0}$$

Здесь a_0 — средняя скорость звука газа в резонаторе.

Этим решением можно пользоваться при малых амплитудах колебаний в достаточно широкой области частот вдали от резонанса. Однако при приближении к резонансу амплитуды колебаний стремятся к бесконечности, а приведенное линейное решение теряет физический смысл.

Рассматриваемая задача решалась численно по разностному алгоритму, имеющему третий порядок точности по координате и по времени. Описание алгоритма можно найти в работе [4].

Однако используемая схема не позволяет вычислять параметры на границе области интегрирования. Для их определения необходимо либо уметь продолжать значения параметров за границы области, либо рассчитывать их по какому-нибудь другому разностному алгоритму. У левой границы (у торца) можно осуществить продолжение следующим образом:

$$p_- = p_+, \quad \rho_- = \rho_+, \quad u_- = u_+$$

Здесь минус относится к параметрам слева от границы, а плюс — справа.

У правой границы (у устья резонатора) приходится эти параметры вычислять, для чего предлагается разностный алгоритм, имеющий первый порядок точности по времени и второй по координате

$$f_k^n = \frac{1}{2} (f_k^{n-1} + f_{k-1}^{n-1}) - \frac{\Delta t}{\Delta x} (F_k^{n-1} - F_{k-1}^{n-1})$$

$$f_{k+1}^{n+1} = \frac{1}{2} (f_k^n + f_{k-1}^n) - \frac{\Delta t}{\Delta x} (F_k^n - F_{k-1}^n)$$

$$\rho_k^{n+1} = \rho_0 [1 + V_0 \sin(\omega t)]^{1/\gamma} \exp\left\{-\frac{S_a}{\gamma c_v}\right\} \quad (u_{k-1}^{n+1} < 0)$$

$$\rho_k^{n+1} = \rho_{k-1}^{n+1} (\rho_k^{n+1} / \rho_{k-1}^{n+1})^{1/\gamma} \quad (u_{k-1}^{n+1} \geq 0)$$

$$(\rho u)_k^{n+1} = (\rho u)_{k-1}^{n+1} - \frac{\Delta x}{\Delta t} \left[\frac{1}{2} (\rho_k^{n+1} + \rho_{k-1}^{n+1}) - \rho_k^n \right]$$

Здесь S_a — энтропия внешней среды, c_v — теплоемкость при постоянном объеме, ρ_0 — средняя плотность внешней среды, Δx — шаг разностной сетки по пространству, Δt — шаг интегрирования по времени; верхний индекс означает временной слой, а нижний — пространственные узлы сетки, причем индекс k соответствует узлу, находящемуся на правой границе.

Предполагается, что на одном шаге шаблона течение изэнтропическое.

Применение схемы повышенного порядка точности диктуется необходимостью избежать появления мощных источников членов, возникающих вследствие аппроксимации дифференциальных уравнений разностными; вычисление же граничных точек с низким порядком точности приводит к появлению поверхностных источников, влияние которых значительно меньше. При этом рассматриваемые времена интегрирования таковы, что одновременное уменьшение шага сетки и шага интегрирования приводит к уменьшению энтропии в конце расчета на доли процента, что является гарантией малости влияния поверхностных источников разностного происхождения.

Наиболее интересными являются режимы резонансных частот. В работе рассматриваются колебания газа на второй резонансной частоте $B_0 = 3\pi/2$, как наиболее характерной для реальных резонансных полостей.

Проведенные расчеты указали на существование ударных волн, разогревающих систему, при $B_0 = 3\pi/2$. Этот подогрев можно характеризовать скачкообразным неубывающим изменением энтропии на торце трубы, типичное изменение которой приэдено на фиг. 1. Поскольку в качестве начального условия была взята стоячая волна с частотой, далекой от резонанса, то системе необходимо некоторое время, чтобы

выйти на свой основной режим, определяющийся заданной резонансной частотой. Точка *A* на фиг. 1 характеризует этот выход, поэтому целесообразно начать отсчет именно с этого момента. Соединив вершины скачков непрерывной линией, получим кривую, которой можно характеризовать поведение среднемассовой энтропии системы. Для удобства вместо энтропии вводится функция φ , определяемая соотношением

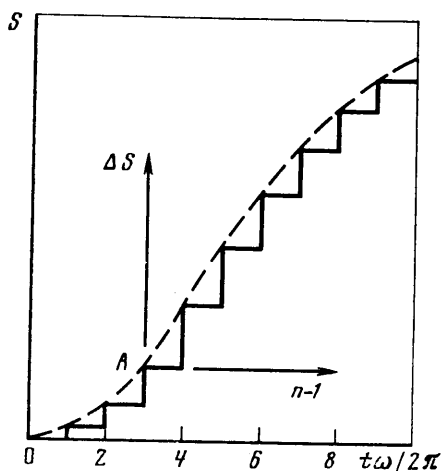
$$(1) \quad \varphi = 1 - \exp \{-\Delta S / 2\gamma c_0\}$$

Здесь ΔS — энтропия, отсчитываемая с момента выхода на основной режим.

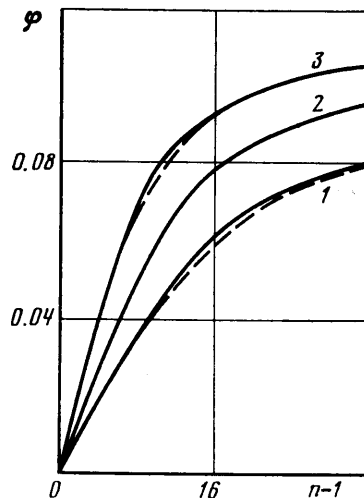
На фиг. 2 сплошными линиями показано изменение φ при различных V_0 (1–3 соответствуют $V_0=0.15, 0.2, 0.25$) от числа циклов n , пройденных с начала основного режима. Для аппроксимации кривых фиг. 2 функция ищется в виде

$$(2) \quad \varphi = AB(n-1) / \sqrt{B^2(n-1)^2 + 1}$$

Здесь A и B — некоторые функции V_0 и γ .



Фиг. 1



Фиг. 2

Из проведенных расчетов получена линейная связь между $\lg \varphi'(0)$ и $\lg V_0$, так что, используя аппроксимацию (2), можно записать $AB=0.106 V_0^{1/3}$ (постоянная получена для $\gamma=1.4$); а приближая кривые на фиг. 2 наилучшим образом по соотношению (2), находится связь между $\lg A$ и $\lg V_0$, которая дает зависимость $A=0.178 V_0^{1/3}$ (постоянная получена для $\gamma=1.4$). Поведение φ при различных γ показано сплошными линиями на фиг. 3 (1 — $\gamma=2.4$, 2 — $\gamma=3.4$). Приближая их соотношением (2) и представляя A в виде $aV_0^{1/3}$, а B — в виде $bV_0^{1/3}$, можно получить зависимости a и b (от постоянной адиабаты), которые показаны на фиг. 4.

Пунктирными линиями на фиг. 2 и 3 представлены полученные по формуле (2) приближения. Видно, что они несильно отличаются от расчетов.

Объединяя все найденные связи, для φ получим выражение

$$(3) \quad \varphi = aV_0^{1/3} \frac{bV_0^{1/3}}{\sqrt{b^2V_0^{2/3}(n-1)^2 + 1}}$$

Используя определение B_0 и предполагая постоянство среднего давления, можно получить ряд оценочных соотношений

$$\Delta S = \gamma c_0 \ln \left(\frac{T}{T(0)} \right), \quad \frac{1}{B_0} \frac{dB_0}{dt} = - \frac{1}{a_0} \frac{da_0}{dt}$$

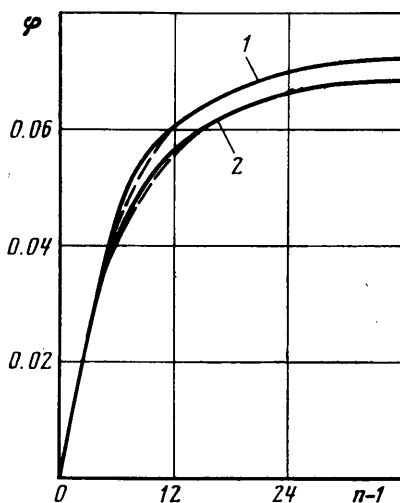
$$B_0 = B_0(0) \exp \left\{ -\frac{\Delta S}{2\gamma c_v} \right\}, \quad \Delta S = -2\gamma c_v \ln \left(\frac{B_0}{B_0(0)} \right)$$

или, используя (1) и (3)

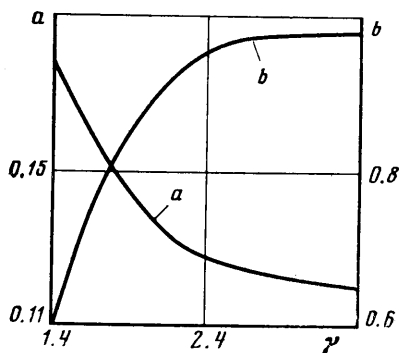
$$\Delta S = -2\gamma c_v \ln \left[1 - \frac{abV_0^{5/3}(n-1)}{\sqrt{b^2V_0^{5/3}(n-1)^2 + 1}} \right]$$

$$T = T_0 \left[1 - \frac{abV_0^{5/3}(n-1)}{\sqrt{b^2V_0^{5/3}(n-1)^2 + 1}} \right]^{-2}$$

Здесь T – средняя температура газа.



Фиг. 3



Фиг. 4

Из полученных соотношений следует, что постепенно разогреваясь, система «уходит» с резонансного режима, после чего скачки исчезают и нагрев прекращается. Интересно отметить, что при стремлении V_0 к единице (своему предельному значению), разогрев системы достигает конечного значения. Это объясняется не только быстрым «уходом» с резонансной частоты, но и охлаждением при адиабатическом расширении разогретого газа. Цикл нагрева можно разбить на два полуцикла: в первом газ нагревается ударными волнами в постоянном объеме, при этом температура и давление растут; во втором газ адиабатически расширяется до некоторого постоянного среднего давления и при этом охлаждается, причем чем больше γ , тем охлаждение интенсивнее (этим объясняется уменьшение предельной температуры разогрева при увеличении γ).

Если внешнее течение таково, что, взаимодействуя с внутренним, оно постоянно меняет частоту колебаний давления, поддерживая ее все время резонансной, то разогрев полости происходит достаточно быстро и может быть описан соотношением

$$T = T(0) \exp \{ 2abV_0^{5/3}(n-1) \}$$

при этом в среднем будет наблюдаться интенсивный отток массы из резонатора.

Поступила 4 X 1977

ЛИТЕРАТУРА

1. Балакин В. Б. О методах типа Рунге – Кутты для газовой динамики. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1970, т. 10, № 6.