УДК 532.546

УРАВНЕНИЯ МЕХАНИКИ ПОРИСТЫХ СРЕД, НАСЫЩЕННЫХ ДВУХФАЗНОЙ ЖИДКОСТЬЮ

В. В. ВЕДЕРНИКОВ, В. Н. НИКОЛАЕВСКИЙ

(Москва)

Составлены уравнения баланса масс и импульса пористой среды при насыщении пор смесью двух взаимонерастворимых жидкостей. Учитывается эффект капиллярных сил как в уравнениях движения, так и в законах деформирования пористой матрицы. На основе сопоставления с известными квазистатическими теориями дана трактовка ряда феноменологических коэффициентов. Показано, как действие капиллярных сил может привести к трещинам усыхания почвы.

1. Общий вид уравнений баланса. При построении балансовых уравнений воспользуемся методами механики взаимопроникающих континуумов, обычными для теории движения жидкости в пористых средах [1]. Иначе говоря, примем, что в дифференциальном макрообъеме среды присутствуют одновременно твердая деформируемая пористая матрица с объемным содержанием $s^{(3)}=1-m$ (m — пористость), а также две жидкости. Удельное объемное содержание их будет $s^{(1)}=ms$ и $s^{(2)}=m(1-s)$ соответственно. Здесь s — фазовая насыщенность первой жидкостью порового пространства. Таким образом, нужно составить балансовые соотношения для трехфазной смеси (первая и вторая фазы – жидкости, третья – твердая матрица).

Уравнения баланса масс в отсутствие фазовых переходов имеют вид

$$\partial\rho^{(k)}s^{(k)}/\partial t+\partial\rho^{(k)}s^{(k)}v_j^{(k)}/\partial X_j=0,\qquad k=1,\ 2,\ 3 \tag{1.1}$$

где $\rho^{(k)}$ – плотность k-й фазы, $v_j^{(k)}$ — истинная скорость ее движения. Напомним, что в уравнениях (1.1) и ниже фигурируют осредненные по дифференциальному макрообъему величины [1].

Уравнения баланса импульса имеют следующий общий вид:

$$\frac{\partial\rho^{(k)}s^{(k)}v_i^{(k)}}{\partial t}+\frac{\partial\rho^{(k)}s^{(k)}v_i^{(k)}v_j^{(k)}}{\partial X_j}=\frac{\partial s^{(k)}\sigma_{ij}^{(k)}}{\partial X_j}+\sum_n F_i^{(kn)}+\rho^{(k)}s^{(k)}g_i \tag{1.2}$$

где $\sigma_{ij}^{(k)}$ – истинные фазовые напряжения, $F_i^{(kn)}$ — сила объемного взаимодействи между k-й и n-й фазами ($n\neq k$), g_i – ускорение силы тяжести.

Так как $F_i^{(kn)}$ — внутренние силы для среды в целом, то

$$F_i^{(kn)}=-F_i^{(nk)},\qquad \sum_{k,n}F_i^{(kn)}=0 \tag{1.3}$$

Главный элемент построения математической модели взаимопроникающих континуумов состоит в выборе межфазового взаимодействия. Поскольку здесь проводится построение симметричной механики баротропных смесей, то проблема сводится к выбору согласующихся с опытом гипотез относительно сил $F_i^{(kn)}$.

2. Баланс импульса жидких фаз. Будем пренебрегать касательными вязкостными компонентами напряжений в жидких фазах по сравнению с аналогичными напряжениями в твердой матрице, т. е. положим

$$\sigma_{ij}^{(1)}=-p^{(1)}\delta_{ij},\qquad \sigma_{ij}^{(2)}=-p^{(2)}\delta_{ij},\qquad \sigma_{ij}^{(3)}=\sigma_{ij} \tag{2.1}$$

где δ_{ij} – единичный тензор.

Уравнения импульса для жидких фаз запишем в виде

$$\frac{\partial\rho^{(1)}msv_i^{(1)}}{\partial t}+\frac{\partial\rho^{(1)}msv_i^{(1)}v_j^{(1)}}{\partial X_j}=-ms\frac{\partial p^{(1)}}{\partial X_i}+R_i^{(13)}+R_i^{(12)}+\rho^{(1)}msg_i \tag{2.2}$$

$$\frac{\partial\rho^{(2)}m(1-s)v_i^{(2)}}{\partial t}+\frac{\partial\rho^{(2)}m(1-s)v_i^{(2)}v_j^{(2)}}{\partial X_j}=$$

$$=-m(-s)\frac{\partial p^{(2)}}{\partial X_i}+R_i^{(23)}+R_i^{(21)}+\rho^{(2)}m(1-s)g_i$$

где $R_i^{(k3)}$ ($k\neq 3$) – силы межфазового трения.

Поэтому сохранение импульса в каждой жидкой фазе такое же, как и при однородном насыщении ею порового пространства уменьшенного объема: ms или $m(1-s)$.

Из сравнения (1.2) и (2.2) можно найти выражения для объемных межфазовых сил, действующих на жидкости

$$F_i^{(1)}=\sum_n F_i^{(1n)}=p^{(1)}\,\partial ms/\partial X_i+R_i^{(1)},\qquad n\neq 1 \tag{2.3}$$

$$F_i^{(2)}=\sum_n F_i^{(2n)}=p^{(2)}\,\partial m(1-s)/\partial X_i+R_i^{(2)},\qquad n\neq 2$$

где $R_i^{(j)}$ — компоненты, обусловленные относительным движением фаз. Формулировка уравнений (2.2) принята в [2] (стр. 9), однако уравнение импульса для твердой матрицы там не рассматривалось (матрица предполагалась жесткой и неподвижной).

3. Баланс импульса твердой фазы. Суммируя выражения для объемных сил (2.3), находим вследствие ограничения (1.3) объемную межфазовую силу, действующую на твердую фазу

$$F_i^{(3)}=\sum_n F_i^{(3n)}=-(F_i^{(1)}+F_i^{(2)})=(p^{(1)}-p^{(2)})\,\partial ms/\partial X_i+R_i^{(3)} \tag{3.1}$$

Введение выражения (3.1) в уравнение импульса твердой матрицы (1.2) приводит последнее к виду

$$\frac{\partial\rho^{(3)}(1-m)v_i^{(3)}}{\partial t}+\frac{\partial\rho^{(3)}(1-m)v_i^{(3)}v_j^{(3)}}{\partial X_j}=\frac{\partial(1-m)\sigma_{ij}}{\partial X_j}- \tag{3.2}$$

$$-(p^{(1)}-p^{(2)})\frac{\partial ms}{\partial X_i}+R_i^{(3)}+\rho^{(3)}(1-m)g_i$$

Полное напряжение в среде Γ_{ij} должно уравновешиваться фазовыми напряжениями (2.1) с весом, равным их относительному содержанию на произвольном плоском сечении среды

$$\Gamma_{ij}=(1-m)\sigma_{ij}-msp^{(1)}\delta_{ij}-m(1-s)p^{(2)}\delta_{ij} \tag{3.3}$$

Можно ввести фазовые эффективные напряжения в пористой среде: $\sigma_{ij}^f(1)$ для первой фазы и $\sigma_{ij}^f(2)$ для второй

$$\sigma_{ij}^f(1)=\Gamma_{ij}+p^{(1)}\delta_{ij},\qquad \sigma_{ij}^f(2)=\Gamma_{ij}+p^{(2)}\delta_{ij} \tag{3.4}$$

В [3] экспериментально показано, что комбинации напряжений (3.4) или $\sigma_{ij}^f(1)$, $p^{(1)}-p^{(2)}$ или $\sigma_{ij}^f(2)$, $p^{(1)}-p^{(2)}$ определяют объемные деформации и насыщенность s мягких грунтов. В той же работе дано уравнение (3.2) при отсутствии инерционных сил. При этом, однако, предлагалось вводить в систему уравнений отдельно уравнение равновесия для четвертой, поверхностной фазы, разделяющей жидкости. В [2] рассматривался отдельно баланс энергии для этой поверхностной гиббсовой фазы. Если, однако, поверхностная фаза выбрана так, что масса ее пренебрежимо мала, то импульс ее следует суммировать с импульсом той фазы, с движением которой она ассоциирована [4]. Соответственно в рассматриваемом здесь случае поверхностная фаза раздела жидкостей включена в матрицу среды.

Полное эффективное напряжение при двухфазном насыщении среды, согласно [5], будет

$$\sigma_{ij}^f = s\sigma_{ij}^f(1) + (1-s)\,\sigma_{ij}^f(2) = \Gamma_{ij} + P\delta_{ij} \tag{3.5}$$

где $P=sp^{(1)}+(1-s)p^{(2)}$ — полное давление в жидкой смеси.

Согласно Терцаги, эффективные напряжения в однородно насыщенной пористой среде (см. (3.5) при $s=0$) определяют деформации переупаковки [1] матрицы среды и входят в критериальные условия появления пластических деформаций и разрушения. Примем гипотезу, что и при $s\neq0$ для эффективного напряжения, в смысле Терцаги, справедливо определение (3.5). При использовании величины σ_{ij}^f уравнение импульса для твердой фазы принимает вид

$$\frac{\partial\rho^{(3)}(1-m)\overset{(3)}{v_i}}{\partial t} + \frac{\partial\rho^{(3)}(1-m)\overset{(3)}{v_i}\,\overset{(3)}{v_j}}{\partial X_j} = \frac{\partial\sigma_{ij}^f}{\partial X_j} - \tag{3.6}$$
$$-(1-m)\frac{\partial P}{\partial X_i} - m(p^{(1)}-p^{(2)})\,\partial s/\partial X_i + \overset{(3)}{R_i} + \rho^{(3)}(1-m)g_i$$

Отсюда видно, что величины σ_{ij}^f, P и s определяют напряженное состояние неоднородно-насыщенной пористой среды.

4. Замыкающие связи. Разность фазовых давлений в жидкостях обусловливается капиллярными силами и ее можно представить в виде

$$p^{(1)}-p^{(2)}=p_c(s,\chi)+\tau\,\partial s/\partial t \tag{4.1}$$

Здесь $p_c(s,\chi)$ – равновесное капиллярное давление, χ – дополнительный параметр (например, контактный угол или же внутренний масштаб пористой матрицы $\sqrt{k/m}$, где k – проницаемость), который следует выделять в явном виде в случаях пересчета опытных данных с одной системы на другую или же если система меняется в процессе движения. Эксперименты по измерению $p_c(s)$ известны в литературе [6]. Второе слагаемое отражает квазистатическую неравновесность капиллярного давления [2, 7–9], τ – время релаксации.

Силы межфазового трения будем задавать пропорциональными разностям скоростей движения фаз

$$\overset{(kn)}{R_i} = a^{(kn)}(\overset{(k)}{v_i} - \overset{(n)}{v_i}), \qquad a^{(kn)}=a^{(nk)} \tag{4.2}$$

Феноменологические коэффициенты $a^{(kn)}$ находятся в опытах по совместному движению несмешивающихся фаз в стационарных условиях. При этом уравнения (2.2) без инерционных сил и сил тяжести и при $v_i^{(3)}=0$ должны сводиться к обобщенной форме закона Дарси. В действительности

$$\begin{aligned} -ms\frac{\partial p^{(1)}}{\partial X_i} &= a^{(13)}\overset{(1)}{v_i} + a^{(12)}(\overset{(1)}{v_i}-\overset{(2)}{v_i}) \\ -m(1-s)\frac{\partial p^{(2)}}{\partial X_i} &= a^{(23)}\overset{(2)}{v_i} + a^{(21)}(\overset{(2)}{v_i}-\overset{(1)}{v_i}) \end{aligned} \tag{4.3}$$

Разрешив систему уравнений (4.3) относительно скоростей, получаем

$$\begin{aligned} \overset{(1)}{v_i} &= \frac{a^{(23)}+a^{(12)}}{\Delta}\left(-ms\frac{\partial p^{(1)}}{\partial X_i}\right) + \frac{a^{(12)}}{\Delta}\left(-m(1-s)\frac{\partial p^{(2)}}{\partial X_i}\right) \\ \overset{(2)}{v_i} &= \frac{a^{(12)}}{\Delta}\left(-ms\frac{\partial p^{(1)}}{\partial X_i}\right) + \frac{a^{(13)}+a^{(12)}}{\Delta}\left(-m(1-s)\frac{\partial p^{(2)}}{\partial X_i}\right) \end{aligned} \tag{4.4}$$

где $\Delta=(a^{(13)}+a^{(12)})(a^{(23)}+a^{(12)})-a^{(12)}a^{(12)}$.

При пренебрежимо малом эффекте увеличения одной жидкой фазы другой $a^{(12)}=0$ и выражения (4.4) переходят в обобщенный закон Дарси

$$\begin{aligned} \overset{(1)}{w_i}\ ms\overset{(1)}{v_i} &= -\frac{m^2s^2}{a^{(12)}}\frac{\partial p^{(1)}}{\partial X_i}, \qquad \frac{m^2s^2}{a^{(12)}} = k\frac{f^{(1)}(s)}{\mu^{(1)}} \\ \overset{(2)}{w_i} = m(1-s)\overset{(2)}{v_i} &= -\frac{m^2(1-s)^2}{a^{(23)}}\frac{\partial p^{(2)}}{\partial X_i}, \qquad \frac{m^2(1-s)^2}{a^{(23)}} = k\frac{f^{(2)}(s)}{\mu^{(2)}} \end{aligned} \tag{4.5}$$

Здесь $f^{(k)}(s)$ – относительная фазовая проницаемость [6], μ^k – вязкость k-й жидкой фазы.

Наконец, будем определять полную деформацию e_{ij} пористой среды матрицы согласно правилу аддитивности деформаций

$$e_{ij}=e_{ij}^f+e_{ij}^\rho+e_{ij}^s \tag{4.6}$$

где e_{ij}^f – деформация переупаковки, e_{ij}^ρ – деформация изменения плотности материала твердых частиц, e_{ij}^s – деформация матрицы из-за изменения капиллярных сил (например, набухания или усадки мягких грунтов).

Имеем для скорости полной деформации

$$e_{ij}^\bullet = {}^1/_2(\partial v_i^{(3)}/\partial X_j+\partial v_j^{(3)}/\partial X_i)$$

а также

$$e_{ij}^\rho=-{}^1/_3\beta_3\sigma_{kl}\delta_{kl}\delta_{ij}, \qquad e_{ij}^s=-{}^1/_3\beta_s\{p_c(s)-p_d(s_0)\}\delta_{ij} \tag{4.7}$$

Здесь β_3 – коэффициент изотермической сжимаемости материала индивидуальных частиц матрицы, β_s – коэффициент набухания ($e_{ij}^s\delta_{ij}>0$) или усадки ($e_{ij}^s\delta_{ij}<0$) матрицы при изменениях насыщенности в силу действия капиллярных сил.

Что касается деформаций e_{ij}^f, то они в случае упругого состояния матрицы будут связаны с эффективными напряжениями законом Гука

$$\delta_{ij}^f=(1-m_0)(\lambda_1'e_{kl}^f\delta_{kl}\delta_{ij}+2\lambda_2'e_{ij}^f) \tag{4.8}$$

Здесь и выше индексом 0 отмечены значения величин, характеризующих начальное состояние, λ_i' – коэффициенты Ламе.

Пластическое состояние матрицы описывается упругопластической дилатансионной моделью [10] при использовании в последней эффективных напряжений и деформаций переупаковки δ_{ij}^f, e_{ij}^f. Пластические деформации появляются, если эффективные напряжения удовлетворяют предельному условию по сдвигу или сжатию (затекание пор) $\Phi(\delta_{ij}^f)=0$. При растяжении могут появиться трещины отрыва, если $\delta_{ii}^f\geqslant\delta_*$, где δ_* – прочность на разрыв.

Вводя определения (4.7) и (4.8) в общее выражение (4.6), получим обобщенный закон Гука набухающей (swelling) пористой среды в виде

$$\delta_{ij}^f(1-m_0)(\lambda_1e\delta_{ij}+2\lambda_2e_{ij}+\beta_3KP\delta_{ij}+\beta_sK\{p_c(s)-p_c(s_0)\} \tag{4.9}$$

Здесь $K=K'/(1+\beta_3K')=\lambda_1+{}^2/_3\lambda_2$; $K'=\lambda_1'+{}^2/_3\lambda_2'$; $(1-m_0)\lambda_1$, $(1-m_0)\lambda_2$ – коэффициенты Ламе, $(1-m_0)K$ – модуль всестороннего сжатия сухой пористой среды. Обычные связи плотностей жидких фаз с их давлениями $\rho^{(k)}=\rho^{(k)}(p^{(k)})$ будут замыкать систему уравнений для изотермических движений.

Упомянем, что обобщенный закон Гука (4.9) согласуется с определяющими связями для адсорбирующих пористых материалов, рекомендованными в [11], где, однако, не конкретизировались феноменологические коэффициенты.

В линейном приближении построенная здесь система уравнений движения совпадает с предложенной в [12] (см. также [1]), если нужным образом выделить в последней эффекты капиллярных сил и правильно интерпретировать оставшиеся не определенными упругие коэффициенты. Частный случай необходимой системы уравнений формулировался в связи с задачей о распространении волн в пористой среде с наличием неподвижных (относительно твердой матрицы) пузырьков газа [13].

5. Напряжения, обусловленные капиллярными силами. Для иллюстрации возможностей сформулированной математической модели рассмотрим стационарную задачу о напряжениях во влажном полупространстве мягкого грунта, возникающих под действием капиллярных сил. При этом фаза 1 – вода, фаза 2 – воздух. Для мягких грунтов, когда эффектами сжимаемости материала матрицы можно пренебречь, закон Гука (4.9) принимает вид

$$\delta_{ij}^f=(1-m_0)(\lambda_1e\delta_{ij}+2\lambda_2e_{ij}+\beta_sK[p_c(s)-p_c(s_0)]\delta_{ij}) \tag{5.1}$$

Если задача одномерна, то все величины – функции только $X_1\geqslant0$ и не зависят от X_2, и выполнено условие одноосного деформирования $e_{22}=e_{33}=0$, а потому из (5.1) получаем

$$\sigma_{22}^f=\sigma_{33}^f=\frac{\lambda_1}{\lambda_1+2\lambda_2}\sigma_{11}^f+\frac{2\lambda_2}{\lambda_1+2\lambda_2}(1-m_0)\beta_sK[p_c(s)-p_c(s_0)] \tag{5.2}$$

Пусть на свободной поверхности отсутствуют усилия

$$\Gamma_{11}=\sigma_{11}^f-sp^{(1)}=0,\quad \Gamma_{12}=\sigma_{12}^f=0,\quad X_1=0$$

Здесь учтено, что $p^{(2)}=0$.

Тогда имеем

$$\sigma_{22}{}^{f}=\frac{\lambda_1}{\lambda_1+2\lambda_2}sp^{(1)}(s)+\frac{2\lambda_2}{\lambda_1+2\lambda_2}\beta_s K[p^{(1)}(s)-p^{(1)}(s_0)],\qquad s_0=0,\qquad X_1=0 \tag{5.3}$$

Если окажется, что при некоторой критической насыщенности $\sigma_{22}{}^{f}\geqslant\sigma_*$, то на свободной поверхности под действием капиллярных сил возникнут ортогональные к ней трещины разрыва. Это есть эффект поверхностного разрушения почвы при засухе. Для нахождения глубины проникания трещин в массив нужно вычислить боковое напряжение $\sigma_{22}{}^{f}$ по заданному распределению насыщенности s с глубиной

$$\frac{\lambda_1+2\lambda_2}{\lambda_1}\frac{\partial\sigma_{22}{}^{f}}{\partial X_1}-(1-m_0)\frac{\partial sp_c(s)}{\partial X_1}-\frac{2\lambda_2}{\lambda_1}\beta_s K(1-m_0)\frac{\partial p_c(s)}{\partial X_1}-$$
$$-mp_c(s)\frac{\partial s}{\partial X_1}+\rho^{(3)}(1-m)g_i=0 \tag{5.4}$$

Более точное решение задачи требует учета изменений m и $p_c(s)$ при деформировании среды, т. е. нахождение взаимосвязанных полей напряжений и насыщенности. Нахождение профиля насыщенности связано с использованием уравнения движения влаги. При этом существен и эффект переноса влаги потоком воздуха. Обзор работ в этом направлении дан в [14], в котором, в частности, предложено учитывать зависимость «потенциала влажности» по [15] (т. е. фактически $p_c(s)$) от объемных деформаций набухания. Последняя задавалась как функция насыщенности. Сопутствующее изменение напряженного состояния матрицы среды не рассматривалось.

Поступила 5 X 1977

ЛИТЕРАТУРА

1. *Николаевский В. Н., Басниев К. С., Горбунов А. Т., Зотов Г. А.* Механика насыщенных пористых сред. М., «Недра», 1970.
2. *Николаевский В. Н., Бондарев Э. А., Миркин М. И., Степанова Г. С., Терзи В. П.* Движение углеводородных смесей в пористой среде. М., «Недра», 1968.
3. *Fredlund D. G., Morgenstern N. R.* Stress state variables for unsaturated soils. J. Geotechn. Engng. Div., 1977, vol. 103, No. 5.
4. *Богачев Г. А., Николаевский В. Н.* Ударные волны в смеси материалов. Гидродинамическое приближение. Изв. АН СССР, МЖГ, 1976, № 4.
5. *Николаевский В. Н.* Движение двухфазной жидкости при упругом режиме фильтрации. ПМТФ, 1962, № 1.
6. *Чарный И. А.* Подземная гидрогазодинамика. М., Гостоптехиздат, 1963.
7. *Баренблатт Г. И.* Фильтрация двух несмешивающихся жидкостей в однородной пористой среде. Изв. АН СССР, МЖГ, 1971, № 5.
8. *Hallaire M.* Le potentiel efficace de l'eau dans le sol en régime de desséchement. Ann. agron., 1963, vol. 14, No. 4.
9. *Hassen R.* Mesures comparées du potential matriciel de l'eau dans le sol en cours de desséchement et à l'équilibre; vérification de l'existence d'un potential efficace. Compt. rend. Acad. sci., ser. D, 1972, t. 274, № 24.
10. *Николаевский В. Н., Сырников Н. М., Шефтер Г. М.* Динамика упругопластических дилатирующих сред. В сб. «Успехи механики деформируемых сред». М., «Наука», 1975.
11. *Creus G. J., Onat E. T.* Mechanics of porous-adsorbent materials. Intern. J. Engng Sci., 1972, vol. 10, No. 8.
12. *Brutsaert W.* The propagation of elastic waves in unconsolidated unsaturated granular mediums. J. Geophys. Res., 1964, vol. 69, No. 2.
13. *Золотарев П. П., Николаевский В. Н., Степанов В. П.* Особенности распространения упругих волн в пористых породах, насыщенных нефтью, газом и смесью жидкости и газа. В сб. «Теория и практика добычи нефти». М., «Недра», 1966.
14. *Philip J. R.* Flow in porous media. Annual Rev. Fluid Mech., vol. 2, Palo Alto, Calif., 1970.
15. *Buckingham E.* Studies on the movement of soil moisture. Washington, D. C., US Dept., Agr., Bur. Soils Bull., 1907, No. 38.