

## РАСПРОСТРАНЕНИЕ ТРЕХМЕРНЫХ АКУСТИЧЕСКИХ ВОЗМУЩЕНИЙ В ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ КАНАЛАХ МЕДЛЕННО ИЗМЕНЯЮЩЕГОСЯ ПОПЕРЕЧНОГО СЕЧЕНИЯ

А. А. ОСИПОВ

(Москва)

Рассмотрена задача о распространении трехмерных акустических возмущений в двумерном потоке газа в осесимметричном канале, площадь поперечного сечения которого медленно изменяется вдоль оси канала. Исследование представляет интерес, например, с точки зрения оценки уровня шума, выносимого из газотурбинного двигателя через сопло или воздухозаборник. Метод решения задачи основан на использовании линеаризованных относительно малых возмущений параметров уравнений трехмерного изэнтропического неустановившегося движения идеального газа. Зависимость параметров течения от времени представлена в виде гармонических колебаний около стационарных значений. Рассмотрен случай безвихревого двумерного стационарного потока, такого, что линейный масштаб  $l_*$ , характеризующий пространственную неоднородность стационарных параметров течения из-за непостоянства площади поперечного сечения канала, много больше характерного поперечного размера канала  $r_*$ . Использовано решение уравнений стационарного течения, линеаризованных относительно малого параметра  $\delta = r_*/l_*$ . Для анализа нестационарных возмущений использовано высокочастотное приближение [1], справедливое в тех случаях, когда длина акустических волн много меньше масштаба  $l_*$ . Найденное в результате такого подхода решение локально представляет собой нормальные продольно-поперечные акустические моды для цилиндрического канала, но в отличие от последних содержит параметрическую зависимость амплитуды от координаты вдоль оси симметрии канала. При этом волны, распространяющиеся вверх и вниз по потоку, взаимодействуют лишь в окрестности того сечения канала, где частота равна так называемой частоте отсечки. Указанное явление аналогично существованию точек поворота в теории ВКБ-приближения. Приведены примеры расчетов на основании полученных соотношений, иллюстрирующие изменение амплитуды колебаний параметров течения вдоль канала в тех случаях, когда всюду в канале частота больше частоты отсечки. Результаты расчетов показали, что учет двумерности стационарного потока может существенно повлиять на рассматриваемые акустические характеристики.

Задачи, связанные с распространением пространственных акустических возмущений в различных волноводах, рассматривались во многих работах, причем в последнее время для их решения широко используются численные подходы, основанные на методах конечных элементов, Галеркина, взвешенных невязок. В то же время в тех случаях, когда возмущения распространяются в неоднородном потоке газа, непосредственное применение использованных в этих работах методов оказывается затруднительным из-за существенного усложнения соответствующей системы уравнений. По этой причине опубликовано лишь несколько работ, в которых исследуется распространение трехмерных акустических волн в неоднородном потоке. В настоящей работе использован тот же подход, что и в [2, 3]. Однако в последних работах, как и в [4-8], отсутствует полный учет двумерности стационарного потока в канале переменного сечения. В работе [9] задача о распространении многомодовых акустических возмущений в неоднородном потоке газа в канале решена численно с помощью метода Галеркина. Преимуществом исследования, проведенного в настоящей работе, является то, что в результате получены простые соотношения, дающие универсальную зависимость амплитуды возмущения любой моды от числа Маха стационарного потока, вычисленного в одномерном приближении, и приведенной частоты и не требующие сложных расчетов. Эти соотношения позволяют выявить важные особенности, возникающие при частотах, близких к частоте отсечки, и в дальней-

шем могут быть использованы для расчета отражения пространственных акустических мод, наблюдающегося при таких частотах в опытах [10]. Указанные особенности необходимо учитывать при построении численных алгоритмов решения задач рассматриваемого типа.

1. Рассмотрим трехмерное изэнтропическое неустановившееся движение идеального газа в осесимметричном канале с изменяющейся по его длине площадью поперечного сечения. В цилиндрической системе координат, ось  $x$  которой совпадает с осью симметрии канала, уравнения течения могут быть записаны в следующем виде:

$$(1.1) \quad \begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \left( \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r} + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \varphi} \right) + v \frac{\partial \rho}{\partial r} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{w}{r} \frac{\partial \rho}{\partial \varphi} &= 0 \\ \rho \left( \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial r} + u \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{w}{r} \frac{\partial v}{\partial \varphi} - \frac{w^2}{r} \right) &= - \frac{\partial p}{\partial r} \\ \rho \left( \frac{\partial w}{\partial t} + v \frac{\partial w}{\partial r} + u \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{w}{r} \frac{\partial w}{\partial \varphi} + \frac{vw}{r} \right) &= - \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \varphi} \\ \rho \left( \frac{\partial u}{\partial t} + v \frac{\partial u}{\partial r} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{w}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} \right) &= - \frac{\partial p}{\partial x} \end{aligned}$$

Здесь  $u, v, w$  — составляющие вектора скорости газа соответственно вдоль осей  $x, r, \varphi$ ;  $\rho$  — плотность,  $p$  — давление газа. Система (1.1) замыкается условием изэнтропичности, которое для совершенного газа с постоянными теплоемкостями можно записать в виде

$$\rho/\rho^{\kappa} = \text{const}$$

где  $\kappa$  — показатель адиабаты.

Все переменные в уравнениях (1.1) можно считать безразмерными. Пусть величины с размерностью длины отнесены к радиусу канала в критическом сечении  $r_*$ , скорости — к критической скорости звука  $a_*$ , времени — к  $r_*/a_*$ , плотности — к критической плотности  $\rho_*$ , а давления — к произведению  $\rho_* a_*^2$ .

Будем рассматривать малые периодические по времени колебания всех параметров течения около их средних значений, которые обозначим соответствующими буквами  $U, V, W, P, R$ , а через  $A$  обозначим среднее значение скорости звука. Указанные величины удовлетворяют уравнениям стационарного осесимметричного течения. Пусть последнее таково, что  $W=0$ , а все остальные средние параметры течения зависят только от  $x$  и  $r$ .

Введем малый параметр  $\varepsilon \ll 1$ , характеризующий амплитуду возмущений, и представим все параметры течения с точностью до  $\varepsilon$  в виде

$$(1.2) \quad \begin{aligned} u &= U + \varepsilon u', & v &= V + \varepsilon v', & w &= \varepsilon w' \\ \rho &= R + \varepsilon \rho', & p &= A^2 (\kappa^{-1} R + \varepsilon p') \end{aligned}$$

Здесь величины со штрихами являются функциями времени и трех координат.

Введем характерный линейный размер  $l_*$  и безразмерную координату  $\xi = r_* x / l_*$  такую, что во всем канале выполняется условие  $dM/d\xi \ll 1$ , где  $M$  — число Маха стационарного потока. Пусть  $r = r_w(x)$  — уравнение стенки канала, и во всем канале  $r_w$  составляет величину порядка единицы, а число Маха  $M$  не слишком близко к нулю.

Ограничимся далее рассмотрением таких случаев, когда  $\delta = r_* / l_* \ll 1$ . Тогда из определения  $l_*$  и одномерных соотношений следует, что  $dr_w/dx =$

$=O(\delta)$  или  $dr_w/dx = \delta dr_w/d\xi$ , где  $dr_w/d\xi = O(1)$ . Из условия непротекания на стенке канала следует, что  $V = O(\delta)$ , а дифференцирование соотношения непротекания при условии, что контур стенки не содержит участков очень большой кривизны ( $d^2r_w/dx^2 = O(\delta)$ ), приводит к оценке  $\partial V/\partial x = O(\delta^2)$ , в то время как  $\partial V/\partial r = O(\delta)$ . Далее, используя уравнение безвихренности и другие уравнения стационарного потока, можно показать, что частные производные по  $r$  от всех остальных параметров течения составляют величины порядка  $\delta^2$ .

В результате с точностью до  $\delta$  стационарные параметры течения можно представить в виде

$$(1.3) \quad U = U_0, \quad V = \delta V_1, \quad R = R_0, \quad A = A_0$$

Здесь нижним индексом 0 обозначены одномерные значения параметров, производные от которых по  $x$  порядка  $\delta$ , а  $V_1(x, r)$  дает в первом приближении учет двумерности потока.

Если поставить выражение (1.3) для стационарных параметров течения в уравнения (1.1) и выписать члены порядка  $\delta$ , то можно получить соотношение

$$(1.4) \quad \frac{V_1}{r} + \frac{\partial V_1}{\partial r} = \frac{2(M^2 - 1)}{2 + (\kappa - 1)M^2}$$

Здесь  $M$  — число Маха, рассчитанное по осевой скорости и одномерным соотношениям, через  $V_1$  обозначен тот же параметр в (1.3), деленный на  $A_0$ .

Интегрируя (1.4) и используя условие осесимметричности течения, получим

$$(1.5) \quad V_1 = r \frac{M^2 - 1}{2 + (\kappa - 1)M^2} \frac{dM}{d\xi}$$

Заметим, что приближенные выражения для параметров стационарного течения, определяемые соотношениями (1.3) и (1.5), совпадают с соответствующими членами разложений в работе [11], где в качестве масштаба  $l$  взят параметр  $\sqrt{rR_0}$ ,  $R_0$  — радиус кривизны стенки канала в минимальном сечении.

Как и в [1, 3], представим нестационарные возмущения, например,  $u'$  в виде

$$(1.6) \quad u'(t, x, r, \varphi) = u''(x, r) e^{i(\theta - \omega t - m\varphi)}$$

Здесь  $\theta = \theta(x)$  и  $d\theta/dx = k(x)$ , где  $k$  имеет смысл осевого волнового числа;  $\omega$  — заданная постоянная частота колебаний, а постоянная  $m$  должна быть целым числом из условия периодичности решения по углу  $\varphi$ ;  $i$  — мнимая единица.

Ограничимся далее случаем применимости высокочастотного приближения, когда  $k \sim 1$ . В этом случае характерная размерная длина волны возмущения в направлении оси  $x$ , равная  $r/k$ , много меньше характерного масштаба неоднородности стационарного потока  $l$  в силу условия  $\delta \ll 1$ .

Изменение амплитуды возмущений параметров течения по длине канала является следствием изменения площади его поперечного сечения. Другими словами, масштабом, характеризующим изменение  $u''$  по  $x$ , является  $l$ . Поэтому величину  $u''$  будем рассматривать как функцию  $u'' = u''(\delta, \xi, r)$ , которую представим в виде ряда

$$(1.7) \quad u'' = u_0(\xi, r) + \delta u_1(\xi, r) + \dots$$

В результате для параметров  $u$  и  $v$  и их частных производных с точностью до  $\varepsilon\delta$  можно записать следующие выражения:

$$(1.8) \quad \begin{aligned} u &= U_0(\xi) + \varepsilon [u_0(\xi, r) + \delta u_1(\xi, r)] e^{i\vartheta} \\ v &= \delta V_1(\xi, r) + \varepsilon [v_0(\xi, r) + \delta v_1(\xi, r)] e^{i\vartheta} \\ \frac{\partial u}{\partial t} &= -\varepsilon i\omega (u_0 + \delta u_1) e^{i\vartheta} \quad \frac{\partial v}{\partial t} = -\varepsilon i\omega (v_0 + \delta v_1) e^{i\vartheta} \\ \frac{\partial u}{\partial x} &= \delta \frac{\partial U_0}{d\xi} + \varepsilon \left[ ik(u_0 + \delta u_1) + \delta \frac{\partial u_0}{\partial \xi} \right] e^{i\vartheta} \\ \frac{\partial v}{\partial x} &= \varepsilon \left[ ik(v_0 + \delta v_1) + \delta \frac{\partial v_0}{\partial \xi} \right] e^{i\vartheta}, \quad \frac{\partial u}{\partial r} = \varepsilon \left( \frac{\partial u_0}{\partial r} + \delta \frac{\partial u_1}{\partial r} \right) e^{i\vartheta} \\ \frac{\partial v}{\partial r} &= \delta \frac{\partial V_1}{\partial r} + \varepsilon \left( \frac{\partial v_0}{\partial r} + \delta \frac{\partial v_1}{\partial r} \right) e^{i\vartheta} \quad (\vartheta = \theta - \omega t - m\varphi) \end{aligned}$$

Для  $\rho$  и  $w$  можно записать аналогичные соотношения. Заметим, что в силу обезразмеривания и предположения относительно величины  $k$  частота  $\omega$  составляет величину порядка единицы.

2. Подставив разложение вида (1.8) в исходные уравнения (1.1) и выписывая члены с одинаковыми степенями  $\varepsilon$  и  $\delta$ , для членов порядка  $\varepsilon$  получим соотношения

$$(2.1) \quad \begin{aligned} Wu_0 + k\rho_0 &= 0, \quad iWv_0 + \frac{\partial \rho_0}{\partial r} = 0, \quad Ww_0 - \frac{m}{r}\rho_0 = 0 \\ iW\rho_0 + iku_0 + \frac{\partial v_0}{\partial r} + \frac{v_0}{r} - i\frac{m}{r}w_0 &= 0 \quad \left( W = Mk - \frac{\omega}{A_0} \right) \end{aligned}$$

Здесь и далее через  $u_0$ ,  $v_0$ ,  $w_0$  обозначены первоначально введенные значения этих параметров, деленные на  $A_0$ , а через  $\rho_0$  — отношение  $\rho_0/R_0$ .

Условие непротекания на стенке канала в рассматриваемом приближении эквивалентно соотношению

$$(2.2) \quad v_0(\xi, r_w) = 0$$

Ограниченное решение уравнений (2.1) имеет вид

$$(2.3) \quad \begin{aligned} \rho_0 &= D(\xi) J_m(\lambda r), \quad u_0 = -kD(\xi) J_m(\lambda r) / W \\ v_0 &= i\lambda D(\xi) J_m'(\lambda r) / W, \quad w_0 = mD(\xi) J_m(\lambda r) / rW \end{aligned}$$

Здесь  $\lambda = \sqrt{W^2 - k^2}$ ,  $J_m(\lambda r)$  — функция Бесселя первого рода порядка  $m$ , а  $J_m'$  — ее производная по аргументу;  $D(\xi)$  — произвольная функция.

Значение параметра  $\lambda$  в каждом сечении канала определяется из уравнения (2.2), которое принимает вид

$$(2.4) \quad J_m'(\lambda r_w) = 0$$

Известное значение  $\lambda$  позволяет вычислить  $k$ , для которого получим соотношение

$$(2.5) \quad k = \frac{-\omega M \pm \sqrt{\omega^2 - \lambda^2(1 - M^2)} A_0^2}{(1 - M^2) A_0}$$

Найденное решение в нулевом приближении по виду совпадает с соответствующим решением для цилиндрического канала [12]. Однако в отличие от последнего оно содержит параметрическую зависимость от  $x$  через  $D$ ,  $\lambda$ ,  $k$ ,  $W$ .

Для членов порядка  $\varepsilon\delta$  получим уравнения

$$(2.6) \quad \begin{aligned} Wu_1 + k\rho_1 &= iQ_1, & iWv_1 + \frac{\partial \rho_1}{\partial r} &= Q_2, & Ww_1 - \frac{m}{r}\rho_1 &= iQ_3 \\ iW\rho_1 + iku_1 + \frac{\partial v_1}{\partial r} + \frac{v_1}{r} - i\frac{m}{r}w_1 &= Q_4. \end{aligned}$$

Функции  $Q_j$  в (2.6) имеют вид

$$(2.7) \quad \begin{aligned} Q_1 &\equiv M \frac{\partial u_0}{\partial \xi} + V_1 \frac{\partial u_0}{\partial r} + \frac{\partial \rho_0}{\partial \xi} + (N_1 u_0 - 2N_2 \rho_0) \frac{dM}{d\xi} \\ Q_2 &\equiv -M \frac{\partial v_0}{\partial \xi} - V_1 \frac{\partial v_0}{\partial r} + N_3 v_0 \frac{dM}{d\xi}, & Q_3 &\equiv M \frac{\partial w}{\partial \xi} + V_1 \frac{\partial w_0}{\partial r} - N_3 w_0 \frac{dM}{d\xi} \\ Q_4 &\equiv -M \frac{\partial \rho_0}{\partial \xi} - V_1 \frac{\partial \rho_0}{\partial r} - \frac{\partial u_0}{\partial \xi} + N_4 u_0 \frac{dM}{d\xi} \\ N_1 &\equiv N[2 - (\kappa - 1)M^2], & N_2 &\equiv (\kappa - 1)MN \\ N_3 &\equiv 1 - N(1 + M^2), & N_4 &\equiv (\kappa + 1)MN \\ N &\equiv [2 + (\kappa - 1)M^2]^{-1} \end{aligned}$$

В формулах (2.6) первоначально введенные значения параметров  $u_1$ ,  $v_1$ ,  $w_1$  из (1.8) отнесены к  $A_0$ , а  $\rho_1$  — к  $R_0$ .

Условие непротекания на стенке в приближении  $\varepsilon\delta$  приводит к соотношению

$$(2.8) \quad v_1(\xi, r_w) = u_0(\xi, r_w) dr_w/d\xi$$

Система (2.6) может быть сведена к одному уравнению второго порядка

$$(2.9) \quad \begin{aligned} \frac{\partial^2 \rho_1}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \rho_1}{\partial r} + \left( \lambda^2 - \frac{m^2}{r^2} \rho_1 \right) &= Q \\ Q &\equiv \frac{\partial Q_2}{\partial r} + \frac{Q_2}{r} - i \left( kQ_1 - \frac{m}{r} Q_3 + WQ_4 \right) \end{aligned}$$

Решение (2.3), а следовательно и решение системы (2.6), содержит функцию  $D(\xi)$ , которая должна быть найдена из (2.8). С этой целью умножим (2.9) на  $rJ_m$  и проинтегрируем по  $r$  от 0 до  $r_w$ . Обозначив через  $\Lambda$  аргумент функции Бесселя  $\lambda r$ , получим

$$J_m(\Lambda_w) \Lambda_w \frac{\partial \rho_1(\xi, \Lambda_w)}{\partial \Lambda} = \frac{1}{\lambda^2} \int_0^{\Lambda_w} \Lambda Q J_m d\Lambda, \quad \Lambda_w \equiv \lambda r_w$$

Выразив  $v_1(\xi, r_w)$  в (2.8) через  $\partial \rho_1 / \partial r$  из (2.6), с помощью формул

(2.3) и (2.7) можно получить следующее уравнение, определяющее функцию  $D(\xi)$

$$(2.10) \quad \frac{d \ln D}{d \xi} = P_0 \frac{d \ln M}{d \xi}$$

$$P_0 = \frac{1}{2q^2(\Omega^2 + M^2 - 1)} \{ N(1 - M^2)(\Omega^2 + M^2) - Mq(K - N_2\Omega) + \\ + q(K - Mq)[Kq(2MN_2 + 1) + M(K^2N_1 - N_2M)] \}$$

$$(2.11) \quad \Omega = \frac{\omega}{\lambda A_0}, \quad K = \frac{k}{\lambda} = \frac{-\Omega M \pm \sqrt{\Omega^2 + M^2 - 1}}{1 - M^2}, \quad q = MK - \Omega$$

Из соотношения (2.4) следует, что  $\Lambda_w = \lambda r_w = \text{const}$ , поэтому в конечном счете  $\Omega$  является известной функцией  $M$ , которая в силу безразмеривания имеет вид

$$(2.12) \quad \Omega = \Omega_0 [(\kappa + 1)^{-1} (2 + (\kappa - 1)M^2)]^{(3\kappa - 1)/4(\kappa - 1)} M^{-1/2}, \quad \Omega_0 = \omega / \Lambda_w$$

Таким образом, все параметры в (2.10), а следовательно и  $D$ , являются функциями только двух независимых переменных  $\Omega_0$  и  $M$ , а функция  $\bar{D} = D(\Omega_0, M)$  является универсальной функцией, описывающей изменение амплитуды возмущений в нулевом приближении вдоль произвольного канала и для любой моды с учетом двумерности стационарного потока.

Без учета двумерности, т. е. при  $V_1 = 0$ , аналогичная формула имеет вид

$$(2.13) \quad \frac{d \ln D}{d \xi} = (P_0 + P_1) \frac{d \ln M}{d \xi}, \quad P_1 = \frac{NM(1 - M^2)}{q(K - Mq)} (1 + K^2) \frac{m^2 / \Lambda_w^2}{1 - m^2 / \Lambda_w^2}$$

Величина  $P_1$  определяет отличие расчетных формул для двумерного и одномерного стационарных потоков. Видно, что в  $P_1$  входит еще один независимый параметр  $m^2 / \Lambda_w^2$ . При  $m = 0$  указанного отличия нет, а при  $m \neq 0$  оно уменьшается с ростом  $\Lambda_w$ , что соответствует росту номера радиальной моды.

3. Как и в случае цилиндрического канала, двум знакам в (2.5) при положительном подкоренном выражении соответствуют две волны, распространяющиеся соответственно вниз и вверх по потоку. В каждой из этих волн зависимость возмущений от координат в поперечном направлении в виде  $J_m(\Lambda) \exp(im\varphi)$  представляет собой вращающуюся моду. Последняя, однако, может рассматриваться как суперпозиция двух вращающихся цилиндрических волн, если функцию Бесселя представить в виде суммы функций Ганкеля первого и второго рода [13]. Вектор фазовой скорости этих волн можно определить, воспользовавшись асимптотическим выражением для функций Ганкеля при  $\Lambda \gg m$ . Более строго, выражение  $J_m(\Lambda) \times \exp(im\varphi)$  можно разложить на гармоники в прямоугольной системе координат в плоскости поперечного сечения канала. При этом величина волнового вектора в указанной плоскости для всех гармоник оказывается равной  $\lambda^{-1}$ .

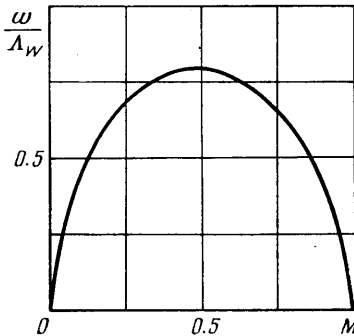
Зная ориентацию волнового фронта, можно найти вектор фазовой скорости. Обозначим через  $u_x$  его проекцию на ось  $x$ . Тогда для  $u_x$  получим формулу

$$(3.1) \quad u_x = [(1 - M^2) \sqrt{\Omega^2 + M^2 - 1}] [\pm \Omega - M \sqrt{\Omega^2 + M^2 - 1}]^{-1}$$

<sup>1</sup> Соответствующее исследование было выполнено недавно А. Н. Крайко и В. А. Широшовым.

Здесь верхний (нижний) знак соответствует волне, распространяющейся вниз (вверх) по потоку.

Обозначим через  $k_1$  ( $k_2$ ) значения  $k$ , когда в формуле (2.5) берется верхний (нижний) знак. При заданном  $\Omega_0$  может существовать такое значение  $M=M_1$ , при котором  $k_1=0$ , а  $k_2 \neq 0$ . При этом нарушается основное предположение высокочастотного приближения о том, что  $k \sim 1$ . Однако если в (1.6) положить  $\theta=0$  и провести соответствующий анализ такого решения в малой окрестности  $M_1$ , то оказывается, что в нулевом приближении  $u'=0$ , амплитуды возмущений остальных параметров течения



Фиг. 1

становится комплексной величиной, а полученное решение принимает вид так называемой неоднородной волны, в которой амплитуда возмущений экспоненциально изменяется в осевом направлении. На фиг. 1 построена кривая  $M=M_2(\Omega_0)$ .

В окрестности  $M_2$  полученное решение становится несправедливым. Дело в том, что, вообще говоря, искомое решение должно быть представлено в виде суперпозиции двух волн, распространяющихся вниз и вверх по потоку и соответствующих волновым числам  $k_1$  и  $k_2$ . Обозначим через  $\theta_1$  и  $\theta_2$  значения  $\theta$  для этих двух волн. Можно показать, что вне окрестности  $M_2$  из-за быстрых осцилляций множителя  $\exp[i(\theta_1 - \theta_2)]$  взаимодействием указанных волн в нулевом приближении можно пренебречь и распространение каждой из них описывается независимо соотношениями (2.3) и (2.10).

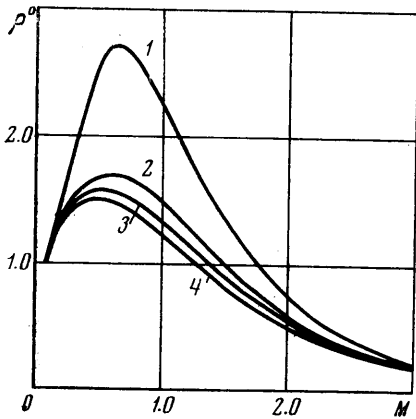
Однако вблизи  $M_2$  величина  $\Omega^2 + M^2 - 1$  становится сколь угодно малой, а производная  $d \ln D / dM$  в (2.10) неограниченно возрастает. Указанная особенность связана с тем, что при  $M=M_2$  значения  $k_1$  и  $k_2$  равны друг другу и  $\exp[i(\theta_1 - \theta_2)]$  не является быстро осциллирующей функцией. Поэтому пренебрегать взаимодействием волн в окрестности точки  $M_2$  нельзя. Об особом поведении решения в указанной области говорит также тот факт, что  $u_j$  при  $M=M_2$  равно нулю и волны не распространяются в осевом направлении. Наличие взаимодействия волн указывает на то, что падающая волна, вообще говоря, порождает отраженную волну. Вне окрестности точки  $M_2$ , где взаимодействие в нулевом приближении отсутствует, распространение волн происходит без отражения.

Рассмотренная ситуация аналогична существованию точек поворота в теории ВКБ-приближения [14]. Аппарат этой теории позволяет связать решение по обе стороны от точки поворота без исследования решения в малой окрестности этой точки, где ВКБ — решение несправедливо.

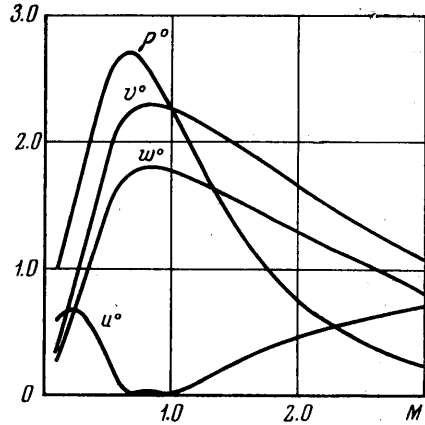
Траекторию распространяющейся в канале акустической волны можно изобразить на фиг. 1 в виде отрезка прямой линии  $\Omega_0 = \text{const}$  от значения

в указанной окрестности отличны от нуля, и все полученные в п. 2 формулы формально остаются справедливы в точке  $M=M_1$ . Значение  $u_j$  в этой точке, соответствующее верхнему знаку в (3.1), равно  $M$ . Рассматриваемая волна при этом становится чисто поперечной и распространяется в осевом направлении лишь за счет сноса стационарным потоком.

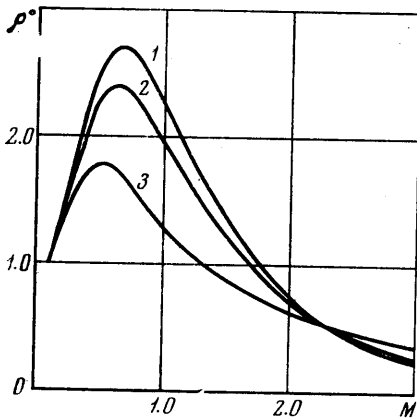
Далее, могут существовать такие значения  $M=M_2$  при заданном  $\Omega_0$ , при которых становится равным нулю подкоренное выражение в (2.5), (2.11) и (3.1). Согласно акустической терминологии [12] при этом частота равна частоте отсечки. При переходе через  $M=M_2$  волновое число  $k$



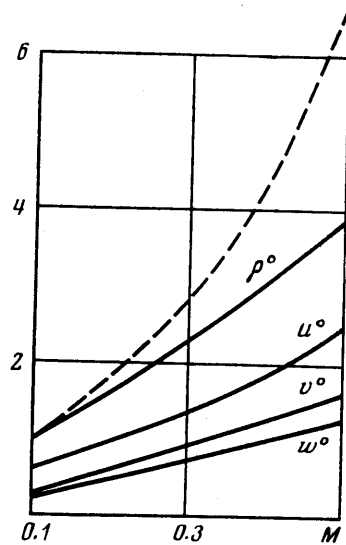
Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4



Фиг. 5

$M$  на входе в канал до значения на выходе. Точки пересечения этого отрезка с кривой  $M=M_2(\Omega_0)$  имеют смысл упомянутых точек поворота. Точки отрезка, расположенные вне области, ограниченной кривой  $M=M_2(\Omega_0)$ , соответствуют распространению бегущей волны, которая отражается в окрестности точки поворота. Коэффициент отражения определяется шириной указанной области при заданном  $\Omega_0$  и монотонно стремится к нулю с ростом  $\Omega_0$ . Для вычисления коэффициента отражения необходимо дальнейшее исследование.

Таким образом, при распространении в канале медленно изменяющегося поперечного сечения трехмерные акустические моды отражаются главным образом в окрестности того сечения канала, где частота равна местной частоте отсечки. Местоположение этого сечения в канале известно.

Отметим еще, что когда  $M$  близко к единице,  $k_1$  остается конечным и соответствующее ему решение не имеет особенностей в окрестности критического сечения канала. Величина же  $k_2$  при этом неограниченно возрастает. Можно показать, что ограниченное решение, соответствующее



волне, бегущей вверх по потоку, в нулевом приближении тождественно равно нулю. Это означает, что в рассматриваемом приближении волна, бегущая вниз по потоку, от критического сечения не отражается.

4. Для оценки влияния двумерности стационарного потока на распространение акустических возмущений вида (2.3) и иллюстрации полученных выше соотношений были выполнены расчеты.

Рассмотрим следующие параметры, описывающие изменение амплитуды возмущений вдоль линий  $\Lambda = \text{const}$  и являющиеся функциями  $M$  и  $\Omega_0$

$$(4.1) \quad \rho^\circ \equiv R_0 D, \quad u^\circ \equiv -A_0 DK/q, \quad v^\circ \equiv iA_0 D/q, \quad w^\circ \equiv A_0 Dm/\Lambda_w q$$

На фиг. 2 показана зависимость  $\rho^\circ$  от  $M$  в волне, распространяющейся вниз по потоку, рассчитанная с учетом двумерности стационарного течения для значений  $\Omega_0$ , равных 1, 2, 3, 10 (кривые 1–4 соответственно). Во всех расчетах значение  $\kappa = 1.4$ . Видно, что влияние  $\Omega_0$  наиболее значительно для малых значений этого параметра и быстро исчезает при его возрастании.

На фиг. 3 построены кривые зависимости от  $M$  всех параметров (4.1) при  $\Omega_0 = 1$ . Точки нулевой амплитуды возмущений осевой скорости соответствуют вырождению волны в чисто поперечную.

Влияние двумерности стационарного потока для значений  $m/\Lambda_w$ , равных 0, 0.54, 0.78 (кривые 1–3), показано на фиг. 4. С ростом параметра  $m/\Lambda_w$  это влияние растет и может стать значительным.

На фиг. 5 построены кривые зависимости от  $M$  всех параметров (4.1) при  $\Omega_0 = 1$  в волне, распространяющейся вверх по потоку. Штриховая линия соответствует расчету  $\rho^\circ$  без учета двумерности стационарного течения.

Автор признателен А. Н. Крайко за помощь в выполнении работы.

Поступила 8 VI 1977

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Блохинцев Д. И. Акустика неоднородной движущейся среды. М.—Л., Гостехиздат, 1946.
2. Nayfeh A. H., Telionis D. P., Lekoudis S. G. Acoustic propagation in ducts with varying cross sections and sheared mean flow. AIAA paper, 1973, No. 1008.
3. Nayfeh A. H., Kaiser J. E., Telionis D. P. Transmission of sound through annular ducts of varying cross sections. AIAA Journal, 1975, vol. 13, No. 1.
4. Zinn B. T., Crocco L. Periodic finite — amplitude oscillations in slowly converging nozzles. Astronaut. Acta, 1968, vol. 13, No. 5/6.
5. Zinn B. T., Crocco L. The nozzle boundary condition in the nonlinear rocket instability problem. Astronaut. Acta, 1968, vol. 13, No. 5/6.
6. Tam C. K. W. Transmission of spinning acoustic modes in a slightly nonuniform duct. J. Sound and Vibration, 1971, vol. 18, No. 3.
7. Hogge H. D., Ritz E. W. Theoretical studies of sound emission from aircraft ducts. AIAA paper, 1973, No. 1012.
8. Руденко А. Н., Шлыкова И. С., Энштейн В. Л. Акустическая проводимость сверхзвуковых сопел с конической выходной частью при продольных и продольно-поперечных колебаниях. Акуст. ж., 1974, т. 20, вып. 4.
9. Eversman W. A multi-modal solution for the transmission of sound in nonuniform ducts. AIAA paper, 1976, No. 497.
10. Руденко А. Н. Экспериментальное исследование частотных характеристик сопел по отношению к продольным и продольно-поперечным колебаниям. Акуст. ж., 1974, т. 20, вып. 6.
11. Kliegel J. R., Quan V. Convergent — divergent nozzle flows. AIAA Journal, 1968, vol. 6, No. 9.
12. Nayfeh A. H., Kaiser J. E., Telionis D. P. Acoustics of aircraft engine — duct systems. AIAA Journal, 1975, vol. 13, No. 2.
13. Скучик Е. Основы акустики. М., «Мир», 1976.
14. Фреман Н., Фреман П. ВКБ-приближение. М., «Мир», 1967.