МЕХАНИКА ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 5 • 1978

УДК 532.5.011

НЕСКОЛЬКО ПРИМЕРОВ ИНВАРИАНТНЫХ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ МЕХАНИКИ ЖИДКОСТИ

В. А. СЫРОВОЙ

(Москва)

Рассмотрены инвариантные решения уравнений плоского движения, записанных в системе координат, связанной с заранее неизвестными линиями тока. В качестве моделей сплошной среды взяты несжимаемая жидкость, которая может быть вязкой и проводящей, сжимаемый газ и электронная плазма с нулевой температурой.

В настоящее время в механике сплошной среды хорошо известен метод [1, 2] построения точных решений, основанный на изучении групповых свойств соответствующих уравнений, с помощью которого за последние два десятилетия получены новые результаты и систематизированы многие ранее известные факты [3]. В пространстве (x, u, p) при этом исследуемая система уравнений определяет гиперповерхность, от вида которой зависят все сохраняющие ее преобразования. Набор независимых переменных x отнесен обычно к некоторой заданной системе отсчета (чаще всего декартовой).

В [4] исследование групповых свойств трехмерного пограничного слоя на произвольной поверхности приводится к задаче о специализации произвольного элемента, которая в смысле постановки аналогична задаче об уравнении нелинейной теплопроводности [2].

В [5] задача о расчете пространственной вязкой сверхзвуковой струи сформулирована в координатах x^i, связанных с заранее неизвестной геометрией течения. При таком подходе уравнения механики жидкости должны быть дополнены условиями эвклидовости пространства, а компоненты метрического тензора g_{ik} являются искомыми функциями наряду с обычными гидродинамическими переменными. Система включает в себя также дифференциальные уравнения, связывающие декартовы и криволинейные координаты. В [5] приведен краткий обзор работ, в той или иной форме использующих «геометризацию».

Ниже на примере плоского движения жидкости будет показано, что этот прием приводит к новой системе уравнений для описания хорошо известных явлений, которая определяет гиперповерхность с некоторыми новыми свойствами и обладает рядом новых точных решений.

1. «Геометризованные» уравнения плоского движения. В дальнейшем для удобства будем употреблять нижние индексы у криволинейных координат; это не может привести к ошибкам, так как последующее изложение не связано с тензорными выкладками.

Учет того, что несжимаемая жидкость может быть проводящей, в рамках подхода [6] приводит к следующей системе уравнений:

$$\frac{V^2}{h_1}\frac{\partial \ln h_2}{\partial x_1}=\frac{1}{h_1}\frac{\partial}{\partial x_1}\left(p+\frac{1}{2}H^2\right)-\frac{\mu}{h_2}\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{1}{h_1h_2}\frac{\partial h_1V}{\partial x_2}\right) \tag{1.1}$$

$$\frac{V^2}{h_2}\frac{\partial \ln h_1}{\partial x_2}=\frac{1}{h_2}\frac{\partial}{\partial x_2}\left(p+\frac{1}{2}H^2\right)+\frac{\mu}{h_1}\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{1}{h_1h_2}\frac{\partial h_1V}{\partial x_2}\right) \tag{1.2}$$

$$\frac{\partial h_2VH}{\partial x_1}=\eta\left[\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{h_2}{h_1}\frac{\partial H}{\partial x_1}\right)+\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{h_1}{h_2}\frac{\partial H}{\partial x_2}\right)\right], \quad \frac{\partial h_2V}{\partial x_1}=0 \tag{1.3}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{1}{h_1}\frac{\partial h_2}{\partial x_1}\right)+\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{1}{h_2}\frac{\partial h_1}{\partial x_2}\right)=0 \tag{1.4}$$

Здесь V — единственная отличная от нуля физическая компонента скорости; p — давление; H — компонента магнитного поля, перпендикулярная плоскости течения; h_1, h_2 — коэффициенты Ляме в системе x_1, x_2; μ, η — обычная и магнитная вязкость. Несущественные для дальнейшего константы (ρ, 4π и т. д.) опущены.

Уравнения (1.1) и (1.2) — проекции уравнений движения на линию тока и ортогональную ей ось; (1.3) — уравнение для напряженности магнитного поля и уравнение неразрывности; (1.4) — единственное нетривиальное в двумерном случае тождество Ляме.

Уравнения Эйлера получаются из (1.1) — (1.4) при $\mu=0$; в случае непроводящей жидкости магнитное поле H отсутствует. Приближение пограничного слоя следует из (1.1) — (1.4), если в (1.2) — (1.4) положить $\partial/\partial x_1=0$. Уравнения в этой форме в случае, когда x_2 тождественна функции тока Ψ, при $H=0$ предложены в [7]. Отметим, что пренебрежение первой группой членов в условии эвклидовости (1.4) означает, что плоское движение заменяется движением по некоторой поверхности, которая неотличима от плоскости в рамках приближения пограничного слоя.

При $x_2\equiv\Psi$, $H=0$ уравнения пограничного слоя принимают вид

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{1}{2h_2^2}+p\right)=\mu\frac{h_1}{h_2}\frac{\partial}{\partial x_2}\left[\frac{1}{h_1h_2}\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{h_1}{h_2}\right)\right]$$

$$(1.5)\qquad \frac{1}{h_2^2}\frac{\partial\ln h_1}{\partial x_2}=\frac{\partial p}{\partial x_2},\quad \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{1}{h_2}\frac{\partial h_1}{\partial x_2}\right)=0,\quad V=\frac{1}{h_2}$$

Исключая p из уравнений (1.5), получаем полностью геометризованную форму: задача будет состоять в нахождении метрики h_1, h_2, через которую выражаются V и p.

В [8] проведен групповой анализ адиабатического движения сжимаемого газа. Стационарные течения на плоскости в координатах x_1, x_2 описываются уравнениями (1.4) и

$$\rho V\frac{\partial V}{\partial x_1}=-\frac{\partial p}{\partial x_1},\quad \rho V^2\frac{\partial\ln h_1}{\partial x_2}=\frac{\partial p}{\partial x_2}$$

$$(1.6)\qquad \frac{\partial}{\partial x_1}(h_2\rho V)=0,\quad V\frac{\partial p}{\partial x_1}+\frac{A(p,\rho)}{h_2}\frac{\partial h_2V}{\partial x_1}=0$$

Для политропических течений ($\varkappa$ — показатель политропы) первое и четвертое уравнения из (1.6) принимают вид

$$(1.7)\qquad \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{V^2}{2}+\frac{\varkappa}{\varkappa-1}\frac{p}{\rho}\right)=0,\quad \frac{\partial}{\partial x_1}(p\rho^{-\varkappa})=0$$

Геометризованные уравнения Навье — Стокса и пограничного слоя для сжимаемого газа в двумерном случае сформулированы в [6]. Для течений на плоскости приближение пограничного слоя описывается уравнениями

$$\frac{\rho V}{h_1}\frac{\partial V}{\partial x_1}=-\frac{1}{h_1}\frac{\partial p}{\partial x_1}+\frac{\mu}{h_2}\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{1}{h_2}\frac{\partial V}{\partial x_2}\right),\quad \rho V^2\frac{\partial\ln h_1}{\partial x_2}=\frac{\partial p}{\partial x_2}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_1}(h_2\rho V)=0,\quad \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{1}{h_2}\frac{\partial h_1}{\partial x_2}\right)=0,\quad p=R^*\rho T$$

$$\frac{c_v\rho V}{h_1}\frac{\partial T}{\partial x_1}=\frac{\lambda}{h_2}\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{1}{h_2}\frac{\partial T}{\partial x_2}\right)-\frac{p}{h_1h_2}\frac{\partial h_2V}{\partial x_1}+\mu\left(\frac{1}{h_2}\frac{\partial V}{\partial x_2}\right)^2 \tag{1.8}$$

$$\mu,\lambda,c_v,R^*=\mathrm{const}$$

В уравнениях [6], предназначенных для сквозного счета струи, необходимо использовать полное уравнение (1.4).

Электронную плазму при нулевой температуре (электронный пучок) при отсутствии внешнего магнитного поля H_0 можно трактовать как сжимаемую среду с дифференциальным уравнением состояния

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\varphi-\frac{1}{2}V^2\right)=0,\quad V^2\frac{\partial\ln h_1}{\partial x_2}=-\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}+H_0h_2V$$

$$\frac{\partial}{\partial x_1}(h_2\rho V)=0,\quad \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{h_2}{h_1}\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\right)+\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{h_1}{h_2}\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}\right)=h_1h_2\rho \tag{1.9}$$

Здесь φ — скалярный потенциал, ρ — плотность пространственного заряда. Система (1.9) должна быть дополнена уравнением (1.4). Объемный характер сил, действующих на пучок со стороны самосогласованного электрического поля, делает уравнения движения для пучка тождественными уравнениям Эйлера в случае $\rho=\mathrm{const}$. Аналогия оказывается довольно глубокой: в нестационарном случае уравнения пучка допускают ту же бесконечную группу с произвольными функциями времени [9], что и уравнения вязкой проводящей жидкости при $\rho=\mathrm{const}$ [10]. Преобразования, полученные в [10], сохраняют, разумеется, уравнения Навье — Стокса в обычной (не магнитной) гидродинамике и уравнения Эйлера (см. также [11]).

Одним из наиболее важных случаев является потенциальное электростатическое течение ($H_0=0$), допускающее две формы полной геометризации. Первая из них хорошо известна в теории однокомпонентных течений [12] и получается на основе уравнения неразрывности последовательным исключением всех гидродинамических переменных при $V=1/h_1$

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\left\{\frac{1}{h_1^2}\left[\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{h_2}{h_1^4}\frac{\partial h_1}{\partial x_1}\right)+\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{1}{h_1^2h_2}\frac{\partial h_1}{\partial x_2}\right)\right]\right\}=0 \tag{1.10}$$

Вторая следует из уравнения Пуассона после введения функции тока $x_2\equiv\Psi$, $\rho=h_1/h_2$

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{h_2}{h_1^4}\frac{\partial h_1}{\partial x_1}\right)+\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{1}{h_1^2h_2}\frac{\partial h_1}{\partial x_2}\right)=-2h_1^2 \tag{1.11}$$

Связь декартовых координат x, y с криволинейными x_1, x_2 в случае плоского движения может быть выражена посредством квадратур

$$\theta=-\int_{x_1^0}^{x_1}\frac{1}{h_2}\frac{\partial h_1}{\partial x_2}dx_1+\int_{x_2^0}^{x_2}\left(\frac{1}{h_1}\frac{\partial h_2}{\partial x_1}\right)_{x_1=x_1^0}dx_2+\mathrm{const}$$

$$x+iy=\int_{x_1^0}^{x_1}h_1e^{i\theta}dx_1+i\int_{x_2^0}^{x_2}(h_2e^{i\theta})_{x_1=x_1^0}dx_2+\mathrm{const} \tag{1.12}$$

Здесь θ — угол наклона линии тока к оси x; x_1^0, $x_2^0=\mathrm{const}$.

2. Групповые свойства геометризованных уравнений. Применение метода [1, 2] к вычислению основной группы уравнений Эйлера для непроводящей жидкости приводит к следующему результату:

$$X_1 = f(x_1)\frac{\partial}{\partial x_1} - f'(x_1)h_1\frac{\partial}{\partial h_1}, \qquad X_2 = g(x_2)\frac{\partial}{\partial x_2} - g'(x_2)h_2\frac{\partial}{\partial h_2} \tag{2.1}$$

$$X_3 = h_1\frac{\partial}{\partial h_1} + h_2\frac{\partial}{\partial h_2}, \qquad X_4 = V\frac{\partial}{\partial V} + 2p\frac{\partial}{\partial p}, \qquad X_5 = \frac{\partial}{\partial p} \tag{2.2}$$

Существование бесконечной группы (2.1) имеет очевидную геометрическую интерпретацию. Оно означает инвариантность расстояния между двумя точками относительно преобразований $x_1'=F(x_1)$, $x_2'=G(x_2)$.

Уравнения Навье – Стокса при $\rho=\mathrm{const}$ и любой проводимости и уравнения Эйлера для проводящей жидкости инвариантны относительно преобразований с операторами X_1, X_2, X_5 и растяжения

$$X_3^* = h_1\frac{\partial}{\partial h_1} + h_2\frac{\partial}{\partial h_2} - V\frac{\partial}{\partial V} - 2p\frac{\partial}{\partial p} - H\frac{\partial}{\partial H} \tag{2.3}$$

Уравнения пограничного слоя, получаемые из (1.1) – (1.4), имеют более широкую группу за счет оператора

$$X_4^* = 2h_1\frac{\partial}{\partial h_1} + h_2\frac{\partial}{\partial h_2} \tag{2.4}$$

Для системы (1.5) кроме X_1, X_5 имеем

$$X_2^{**}=x_2\frac{\partial}{\partial x_2} + 2h_1\frac{\partial}{\partial h_1}, \qquad X_3^{**}=h_1\frac{\partial}{\partial h_1} + h_2\frac{\partial}{\partial h_2} - 2p\frac{\partial}{\partial p}, \qquad X_4^{**} = \frac{\partial}{\partial x_2} \tag{2.5}$$

Уравнения адиабатического движения сжимаемого газа (1.6) при произвольной $A(p,\rho)$ допускают группу X_1, X_2, X_3 из (2.1), (2.2). Специализации произвольного элемента A, приводящие к расширению группы, перечислены в [8] и могут быть перенесены на рассматриваемый случай при $\partial/\partial t=0$. Так, для политропического газа с уравнениями (1.7) основная группа расширяется [8] за счет растяжений X_4 из (2.2) и

$$Y_5 = \rho\frac{\partial}{\partial \rho} + p\frac{\partial}{\partial p} \tag{2.6}$$

Уравнения Навье – Стокса для сжимаемого газа допускают преобразования X_1, X_2 из (2.1) и растяжения

$$Y_3=h_1\frac{\partial}{\partial h_1} + h_2\frac{\partial}{\partial h_2} - p\frac{\partial}{\partial p} - \rho\frac{\partial}{\partial \rho}, \qquad Y_4=V\frac{\partial}{\partial V} + p\frac{\partial}{\partial p} - \rho\frac{\partial}{\partial \rho} + 2T\frac{\partial}{\partial T} \tag{2.7}$$

Уравнения пограничного слоя (1.8) имеют более широкую группу, включающую в себя оператор X_4^* из (2.4).

Уравнения пучка (1.9) при $H_0=0$ инвариантны относительно преобразований X_1, X_2 из (2.1) и

$$Z_3=h_1\frac{\partial}{\partial h_1} + h_2\frac{\partial}{\partial h_2} - 2\rho\frac{\partial}{\partial \rho}, \qquad Z_4=V\frac{\partial}{\partial V} + 2\varphi\frac{\partial}{\partial \varphi} + 2\rho\frac{\partial}{\partial \rho}, \qquad Z_5 = \frac{\partial}{\partial \varphi} \tag{2.8}$$

При отличном от нуля внешнем магнитном поле группа оказывается менее широкой. Вместо операторов Z_3, Z_4 из (2.8) имеет смысл только их сумма $(Z_3^*=Z_3+Z_4)$.

Для потенциальных электростатических течений, описываемых уравнениями (1.9) при $V=1/h_1$ имеют место преобразование X_2 из (2.1) и

$$Z_1^{**} = x_1\frac{\partial}{\partial x_1} - h_1\frac{\partial}{\partial h_1} + 2\rho\frac{\partial}{\partial \rho}$$

$$Z_3^{**} = h_1\frac{\partial}{\partial h_1} + h_2\frac{\partial}{\partial h_2} - 4\rho\frac{\partial}{\partial \rho}, \qquad Z_4^{**} = \frac{\partial}{\partial x_1} \tag{2.9}$$

Система (1.11), (1.4) инвариантна относительно преобразований

$$(2.10)\qquad \begin{aligned} &Z_1^\circ = 3x_1\frac{\partial}{\partial x_1} + h_1\frac{\partial}{\partial h_1} + 4h_2\frac{\partial}{\partial h_2} \\ &Z_2^\circ = 3x_2\frac{\partial}{\partial x_2} + h_1\frac{\partial}{\partial h_1} - 2h_2\frac{\partial}{\partial h_2}, \qquad Z_3^\circ = \frac{\partial}{\partial x_1}, \qquad Z_4^\circ = \frac{\partial}{\partial x_2} \end{aligned}$$

3. Примеры инвариантных решений. При рассмотрении инвариантных решений, которые можно построить с использованием приведенных в п. 2 операторов, наиболее важным является вопрос, удовлетворяют ли эти решения граничным условиям, характерным для изучаемой модели сплошной среды. В случае уравнений Эйлера это условие непротекания на стенках, автоматически выполняемое на линиях x_2=const. Любое решение этих уравнений тем самым может описывать течение в криволинейном канале.

Условия прилипания для вязкой жидкости и термоэмиссии для пучка требуют обращения скорости на некоторой поверхности в нуль. С математической точки зрения эти условия приводят к особенности типа точки ветвления для h_2 в первом случае и h_1 — во втором. Оставшийся коэффициент Ляме должен быть регулярной функцией, не исчезающей на особой поверхности, чтобы эта поверхность не выродилась в особую точку. Тип особенности и структура асимптотического ряда вблизи особой кривой определяются из хорошо известного поведения скорости вблизи обтекаемой поверхности $V\sim n$ и эмиттера $V\sim n^{2/3}$ (n — расстояние, отсчитанное по нормали). Для пучков имеют смысл также решения, которые определяются регулярными функциями и описывают области течения, удаленные от катода. Подобно уравнениям Эйлера из любого течения может быть взята конечная «вырезка» по линиям тока. Реализация такой «вырезки» связана с созданием специальных внешних электродов, методы расчета которых хорошо разработаны.

После этих предварительных замечаний перейдем к анализу наиболее интересных инвариантных решений геометризованных уравнений. Произвольные функции f, g в (2.1) удобно определить формулами

$$(3.1)\qquad f(x_1) = \frac{a(x_1)}{a'(x_1)}, \qquad g(x_2) = -\frac{b(x_2)}{b'(x_2)}$$

Для плоских течений единственной отличной от нуля компонентой ротора скорости будет z-компонента

$$(3.2)\qquad \omega = -\frac{1}{h_1h_2}\frac{\partial h_1 V}{\partial x_2}$$

Уравнения Эйлера при ρ=const. Рассмотрим вихревые течения невязкой, несжимаемой и непроводящей жидкости, описываемые решением

$$(3.3)\qquad \begin{aligned} &\xi=ab, \quad h_1=a^{\alpha-1}a'H_1, \quad h_2=b^{-\alpha-1}b'H_2, \quad V=a^\beta U, \quad p=a^{2\beta}P \\ &\alpha, \beta=\text{const} \end{aligned}$$

Здесь и ниже H_1, H_2, U, P — функции ξ. Решение (3.3) определяется следующей системой обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$(3.4)\qquad \begin{aligned} &P+U^2/2=\xi^{-2\beta}, \quad U^2H_1'=H_1P', \quad H_2U=\xi^{-\beta} \\ &\xi^{-\alpha+1}H_2'/H_1+\xi^{\alpha+1}H_1'/H_2=c \quad (c=0, \pm1) \end{aligned}$$

Две постоянные интегрирования, отличные от нуля, приравнены единице, третья постоянная ($|c|$) может быть нулем или единицей в силу того, что система (S/H) для (3.3) допускает группу

$$X_1=U\frac{\partial}{\partial U}+2P\frac{\partial}{\partial P},\quad X_2=H_1\frac{\partial}{\partial H_1}+H_2\frac{\partial}{\partial H_2},\quad X_3=\xi\frac{\partial}{\partial \xi}+H_2\frac{\partial}{\partial H_2}.$$

Видно, что трансляция по ξ для (3.4) не имеет места, поэтому отдельно следует рассмотреть случаи, когда интегрирование начинается с $\xi_0=0$ и $\xi_0\neq0$. В первом из них в качестве начальной поверхности $x_1=0$ при $c=0$ получаем плоскость $x=0$, линии тока вблизи которой представляют собой неконцентрические окружности с радиусом, пропорциональным расстоянию до начала координат, причем скорость при $x=0$ меняется как $y^{\beta/\alpha}$.

Таблица 1

№	ξ	h_1	h_2	V	p	H
1°	ab	$a^{2\alpha+\beta-1}a'H_1$	$b^{-\alpha-1}b'H_2$	$a^\beta U$	$a^{2\beta}P$	$a^\beta K$
2°	ab	$a^{2\alpha-1}a'H_1$	$b^{-\alpha-1}b'H_2$	U	$\beta\ln a+P$	K
3°	x_2	$a^{2\alpha+\beta-1}a'H_1$	$a^\alpha H_2$	$a^\beta U$	$a^{2\beta}P$	$a^\beta K$
4°	x_2	$a^{2\alpha-1}a'H_1$	$a^\alpha H_2$	U	$\beta\ln a+P$	K

При $\xi_0\neq0$ сетка x_1, x_2 может быть найдена после решения системы (3.4) при некоторых начальных данных для метрики. Начальные условия, а также α, β являются параметрами, определяющими геометрию этого семейства вихревых течений. Функции $b(x_2)$ будет придан ясный физический смысл, если на начальной поверхности $x_1=0$ отождествить x_2 с длиной дуги l, отсчитываемой от x_2^0, и произвольно задать начальное распределение скорости $U_0(x_2)$. Из условия $h_2(0,x_2)=1$ и уравнения неразрывности из (3.4) имеем

$$b=\left[-(\alpha+\beta)\int U_0(x_2)\,dx_2\right]^{-1/(\alpha+\beta)},\quad \alpha+\beta\neq0$$

$$b=\exp\left[\int U_0(x_2)\,dx_2\right],\quad \alpha+\beta=0 \tag{3.5}$$

Выше считалось, что $a(0)=1$. От конкретного вида $a(x_1)$ решение не зависит.

Уравнения пограничного слоя при $\rho=\text{const}$. Для системы (1.1)–(1.4) в приближении пограничного слоя рассмотрим решения, приведенные в табл. 1.

Неизвестные функции в 1° удовлетворяют следующим уравнениям:

$$\frac{U^2H_2'}{H_2}=\xi^{-2\beta}(\xi^{2\beta}P)'-\mu\xi^\alpha\frac{H_1}{H_2}\left[\xi^{\alpha+1}\frac{(H_1U)'}{H_1H_2}\right]'$$

$$U^2H_1'=H_1P',\quad H_2U=\xi^{-\beta},\quad \xi^{\alpha+1}H_1'=cH_2\quad (c=\pm1) \tag{3.6}$$

Без ограничения общности можно считать, что $b\sim x_2$ вблизи $x_2=0$; в этой же окрестности

$$H_2\sim x_2^{\nu},\quad n\sim h_2x_2\sim x_2^{-\alpha+\nu},\quad V\sim x_2^{-\beta-\nu}\sim n \tag{3.7}$$

Последнее соотношение следует из уравнения неразрывности в (3.6). Из (3.7) и сказанного в начале п. 3 видно, что вблизи обтекаемой поверхности имеет место следующая асимптотика:

$$H_1=A_0(1+A_1\xi^\varepsilon+A_2\xi^{2\varepsilon}+\ldots),\quad H_2=B_0\xi^\nu(1+B_1\xi^\varepsilon+B_2\xi^{2\varepsilon}+\ldots)$$
$$U=U_0\xi^\varepsilon(1+U_1\xi^\varepsilon+U_2\xi^{2\varepsilon}+\ldots),\quad P=P_0\xi^\tau(1+P_1\xi^\varepsilon+\ldots)+P_{00}$$
$$\nu=(\alpha-\beta)/2,\quad \varepsilon=-(\alpha+\beta)/2 \tag{3.8}$$

Подставляя (3.8) в (3.6), можно найти связь между первыми коэффициентами разложений

$$\tau=3\varepsilon,\quad P_0={}^1/_3U_0{}^2A_1,\quad 2\beta P_{00}=\mu\varepsilon^2U_0B_0{}^{-2}(A_1-B_1+2U_1)$$
$$U_0B_0=1,\quad B_1+U_1=0,\quad \varepsilon A_0A_1=cB_0 \tag{3.9}$$

Асимптотика коэффициентов Ляме, следующая из вида 1° и (3.8), позволяет получить уравнение поверхности, на которой могут быть выполнены условия прилипания

$$h_1=A_0a^{2\alpha+\beta-1}a'(1+A_1\xi^\varepsilon+\ldots),\quad h_2=B_0b^{-\alpha-1}b'\xi^\nu(1+B_1\xi^\varepsilon+\ldots) \tag{3.10}$$

Применяя (1.12), получаем с учетом (3.9) для угла наклона касательной к $x_2=0$

$$\theta=\begin{cases}-c(\alpha+\beta+1)^{-1}a^{\alpha+\beta+1}, & \alpha+\beta+1\neq0\\ -c\ln a, & \alpha+\beta+1=0\end{cases} \tag{3.11}$$

Параметрические уравнения $x_2=0$ при $\alpha+\beta+1\neq0$ имеют вид

$$x+iy=\frac{A_0}{\alpha+\beta+1}\int t^{(\alpha-1)/(\alpha+\beta+1)}e^{-i\,ct/(\alpha+\beta+1)}dt \tag{3.12}$$

При $(\alpha-1)/(\alpha+\beta+1)=k$, где k — целое неотрицательное число, уравнение поверхности выражается через элементарные функции. При $k=0$ получаем окружность, при $k=1$ — эвольвенту окружности и т. д. При $\alpha+\beta+1=0$ имеем

$$x+iy=\frac{A_0}{\alpha-ic+1}a^{\alpha+1}e^{i\theta} \tag{3.13}$$

Комплексную константу в правой части можно включить в постоянную, определяющую начало отсчета θ в (1.12). Переходя к полярным координатам r, ψ, получаем в качестве поверхности логарифмическую спираль, вырождающуюся при $\beta=0$ в окружность

$$r=r_*e^{\beta\psi/k},\quad r_*=\text{const} \tag{3.14}$$

Для решения 2° условия прилипания выполнены на поверхностях (3.12) при $\beta\to0$ в этой формуле.

Решение 3° удовлетворяет следующей системе уравнений:

$$\alpha U^2=2\beta P-\mu\frac{H_1}{H_2}\left[\frac{(H_1U)'}{H_1H_2}\right]'$$
$$U^2H_1'=H_1P',\ H_1'=H_2,\ \alpha+\beta=0 \tag{3.15}$$

Примечательно, что уравнение неразрывности для 3° выродилось в алгебраическую связь между α и β. Отметим также, что система (3.15) инвариантна относительно трансляции по ξ. Решение (3.15) в силу этого вблизи поверхности $\xi=\text{const}$ имеет тот же вид, что и в окрестности $\xi=0$. В этой последней области имеем

$$H_1=A_0(1+A_1\xi^\varepsilon+\ldots),\quad H_2=B_0\xi^{\varepsilon-1}(1+B_1\xi^\varepsilon+\ldots)$$
$$U=U_0\xi^\varepsilon(1+U_1\xi^\varepsilon+\ldots),\quad P=P_0\xi^{3\varepsilon}(1+P_1\xi^\varepsilon+\ldots)+P_{00} \tag{3.16}$$

Здесь ε — любое положительное число. Соответствующая (3.16) асимптотика коэффициентов Ляме приводит с использованием (1.12) к следующим характеристикам поверхности $x_2=0$:

$$\theta=-\ln a,\quad x+iy=\frac{A_0}{\alpha-i}a^{\alpha}e^{i\theta},\quad r=r_*e^{-\alpha\psi} \tag{3.17}$$

Таким образом, $x_2=0$ представляет собой логарифмическую спираль, вырождающуюся в окружность при $\alpha=0$. Такую же форму будет иметь поверхность $x_2=\mathrm{const}$, разумеется, с точностью до поворотов и трансляций. В силу недоопределенности системы (3.15) поле скоростей $V(x_1, x_2)$ может быть задано произвольно с учетом асимптотики (3.16) для U. Решение 3° при этом будет описывать течение в узком канале, стенки которого образованы логарифмическими спиралями. Появление спиралей в приближении пограничного слоя — факт, ранее не известный [13].

Для несжимаемой жидкости исследование уравнений пограничного слоя на основе (1.1)—(1.4) и (1.5) с $x_2\equiv\Psi$ дает не полностью тождественные результаты. Рассмотрим решение уравнений (1.5) вида

$$\xi=a^{-\alpha}x_2,\quad h_1=a^{2\alpha+\beta-1}a'H_1,\quad h_2=a^{\beta}H_2,\quad p=a^{-2\beta}P \tag{3.18}$$

Можно показать, что условия прилипания для него выполнены на поверхности ($\alpha\neq0$)

$$x+iy=\frac{A_0}{\alpha}\int t^{(\alpha+\beta)/\alpha}e^{-it}dt \tag{3.19}$$

Сравнивая (3.12) и (3.19), обнаруживаем, что решение 1° удовлетворяет условиям прилипания на эвольвенте окружности при $\beta=-2$ и любом α, т. е. определяет поток с градиентом давления вдоль стенки; в (3.19) та же кривая получается при $\beta=0$, а это случай безградиентного обтекания. Последнее решение (как автомодельное в криволинейных координатах) подробно рассмотрено в [7].

Таблица 2

№	ξ	h_1	h_2	V	p	ρ	T
1°	ab	$a^{\alpha+2\beta+\gamma-1}a'H_1$	$b^{-\beta-1}b'H_2$	$a^{\gamma}U$	$a^{\alpha+2\gamma}P$	$a^{\alpha}R$	$a^{2\gamma}\Theta$
2°	x_2	$a^{\alpha+2\beta+\gamma-1}a'H_1$	$a^{\beta}H_2$	$a^{\gamma}U$	$a^{\alpha+2\gamma}P$	$a^{\alpha}R$	$a^{2\gamma}\Theta$
3°	x_1	$b^{-\alpha-2\beta-\gamma}H_1$	$b^{-\beta-1}b'H_2$	$b^{-\gamma}U$	$b^{-\alpha-2\gamma}P$	$b^{-\alpha}R$	$b^{-2\gamma}\Theta$

При $\alpha=0$ в (3.18) снова получаем логарифмическую спираль. Можно показать, что при $\beta=0$, $\alpha>0$ и $\xi\to\infty$ для решения (3.18) завихренность убывает быстрее любой степенной функции.

Переходя к рассмотрению сжимаемого газа, отметим, что для политропических течений (1.7) имеют место, например, следующие инвариантные решения:

1°. $\xi=ab,\quad h_1=a^{\alpha-1}a'H_1,\quad h_2=b^{-\alpha-1}b'H_2,\quad V=a^{\beta}U,\quad p=a^{2\beta+\gamma}P,\quad \rho=a^{\gamma}R$

2°. $\xi=x_2,\quad h_1=a^{\alpha-1}a'H_1,\quad h_2=a^{\alpha}H_2,\quad V=a^{\beta}U,\quad p=a^{2\beta+\gamma}P,\quad \rho=a^{\gamma}R$

Решения уравнений Навье — Стокса при $\rho\neq\mathrm{const}$ так же, как и для несжимаемой жидкости, не дают ранее неизвестных поверхностей, на которых можно удовлетворить условиям прилипания.

Уравнения пограничного слоя при $\rho\neq\mathrm{const}$. В табл. 2 приведен функциональный вид наиболее интересных инвариантных решений системы (1.8).

Подобно тому, как это было сделано для несжимаемой жидкости, можно показать, что асимптотика прилипания требует следующих разложений вблизи $x_2=0$ функций, определяющих решение 1°

$$H_1=A_0(1+A_1\xi^\varepsilon+\ldots),\ H_2=B_0\xi^\nu(1+B_1\xi^\varepsilon+\ldots),\ U=U_0\xi^\varepsilon(1+U_1\xi^\varepsilon+\ldots),$$
$$P=P_0(1+P_3\xi^{3\varepsilon}+\ldots),\quad R=R_0(1+R_1\xi^\varepsilon+\ldots),\quad \Theta=\Theta_0(1+\Theta_1\xi^\varepsilon+\ldots) \tag{3.20}$$

Условия прилипания могут быть выполнены на поверхностях

$$x+iy=\int t^{\beta/(\alpha+\beta+\gamma)}e^{it}dt,\quad \alpha+\beta+\gamma\neq 0 \tag{3.21}$$

В противном случае получается логарифмическая спираль.

Решение 2° удовлетворяет следующей системе обыкновенных уравнений:

$$\gamma RU^2=-(\alpha+2\gamma)P'+\mu\frac{H_1}{H_2}\left(\frac{U'}{H_2}\right)',\quad RU^2H_1'=H_1P'$$
$$P=R^*R\Theta,\quad H_1'=cH_2,\quad \alpha+\beta+\gamma=0 \tag{3.22}$$
$$2\gamma c_v\frac{RU\Theta}{H_1}=\frac{\lambda}{H_2}\left(\frac{\Theta'}{H_2}\right)'-(\beta+\gamma)\frac{PU}{H_1}+\mu\left(\frac{U'}{H_2}\right)^2$$

Система (3.22) аналогична по свойствам (3.15), так что все сделанные выше утверждения остаются здесь в силе.

Уравнения пучка. Инвариантные решения, представляющие наибольший интерес, сведены в табл. 3.

Таблица 3

№	ξ	h_1	h_2	V	φ	ρ
1°	x_1b	$x_1^{\beta-1}H_1$	$b^{-\beta-1}b'H_2$	—	—	$x_1^{2-4\beta}R$
2°	$e^{x_1}b$	$e^{(\beta-1)x_1}H_1$	$b^{-\beta-1}b'H_2$	—	—	$e^{-4\beta x_1}R$
3°	ab	$a^{\alpha-1}a'H_1$	$b^{-\alpha-1}b'H_2$	$a^\beta U$	$a^{2\beta}\Phi$	$a^{-2\alpha+2\beta}R$
4°	ab	$a^{\alpha-1}a'H_1$	$b^{-\alpha-1}b'H_2$	U	$b\ln a+\Phi$	$a^{-2\alpha}R$
5°	ab	$a^{\alpha-1}a'H_1$	$b^{-\alpha-1}b'H_2$	$a^\alpha U$	$a^{2\alpha}\Phi$	R
6°	ab	$a^{\alpha-1}a'H_1$	$b^{-\alpha-1}b'H_2$	U	$\beta\ln a+\Phi$	R

Решения 1°, 2° отвечают потенциальным электростатическим течениям, в которых $2\varphi=V^2$, $V=1/h_1$; 3°, 4° — вихревым потокам при $H_0=0$, 5°, 6° — вихревым движениям в однородном внешнем магнитном поле.

Рассмотрим вихревое электростатическое течение 3°, определяемое системой уравнений

$$\Phi-\frac{U^2}{2}=\xi^{-2\beta},\quad -U^2H_1'=H_1\Phi',\quad H_2RU=\xi^{2\alpha-3\beta},$$
$$\xi^{-\alpha+1}\frac{H_2'}{H_1}+\xi^{\alpha+1}\frac{H_1'}{H_2}=c \tag{3.23}$$
$$\left[\xi^{-\alpha+1}\frac{H_2}{H_1}(\xi^{2\beta}\Phi)'\right]'+\xi^{2\beta}\left[\xi^{\alpha+1}\frac{H_1}{H_2}\Phi'\right]'=\xi^{-\alpha+2\beta-1}H_1H_2R$$

Система (3.23) допускает решение, имеющее аналогичную интерпретацию с решением (3.4). На неизвестной заранее начальной поверхности

$x_1=0$ зададим плотность тока эмиссии $J(x_2)$ как функцию длины дуги l, считая, что $x_2=l$ на $x_1=0$ и $a(0)=1$. Используя уравнение неразрывности из (3.23), можно выразить произвольную функцию $b(x_2)$ через полный ток, эмиттированный участком начальной поверхности $(0, l)$

$$b=\left[\int J(x_2)\,dx_2\right]^{1/(\alpha-3\beta)}, \quad \alpha-3\beta\neq0; \quad b=\exp\left[\int J(x_2)\,dx_2\right], \quad \alpha-3\beta=0$$

Вид начальной поверхности и линий тока определится после решения системы (3.23) и применения формул (1.12).

Аналогичные решения могут быть построены и для 4°—6°. Подчеркнем, что все функции при этом являются регулярными, скорость нигде не обращается в нуль.

Можно показать, что решение 1° при $c=0$ в условии эвклидовости описывает эмиссию в режиме полного пространственного заряда с плоскости $x=0$, плотность тока на которой меняется по степенному закону. Решение это не совпадает с каким-либо из ранее известных.

Поступила 1 VII 1977

ЛИТЕРАТУРА

1. *Овсянников Л. В.* Группы и инвариантно-групповые решения дифференциальных уравнений. Докл. АН СССР, 1958, т. 118, № 3.
2. *Овсянников Л. В.* Групповые свойства уравнения нелинейной теплопроводности. Докл. АН СССР, т. 125, № 3.
3. *Овсянников Л. В., Ибрагимов Н. Х.* Групповой анализ дифференциальных уравнений. В сб. Общая механика, т. 2, М., 1975.
4. *Ланкерович М. Я.* Групповые свойства уравнений трехмерного пограничного слоя на произвольной поверхности. В сб. «Динамика сплошной среды», вып. 7. Новосибирск, 1971.
5. *Борисов Н. Ф., Сыровой В. А.* Об уравнениях вязких сверхзвуковых струй с большой степенью нерасчетности. Изв. АН СССР, МЖГ, 1977, № 2.
6. *Сыровой В. А.* О «естественных координатах» и уравнениях сверхзвуковой вязкой струи с большим значением нерасчетности. Тр. ЦАГИ, 1976, вып. 1756.
7. *Jen K. T., Toba K.* A theory of the two-dimensional laminar boundary layer over a curved surface. J. Aerospace Sci., 1961, vol. 28, No. 11.
8. *Овсянников Л. В.* Групповые свойства дифференциальных уравнений. Новосибирск, Изд-во АН СССР, 1962.
9. *Сыровой В. А.* Инвариантно-групповые решения уравнений нестационарного пучка заряженных частиц. ПМТФ, 1964, № 1.
10. *Пащенко Н. Т., Сыровой В. А.* Исследование групповых свойств уравнений движения несжимаемой проводящей жидкости. Магнитная гидродинамика, 1967, № 4.
11. *Berker R.* Integration des equations du mouvement d'un fluide vesqueux incompressible. Handbuch Physik, Bd 8/2, Berlin, Springer – Verlag, 1963.
12. *Сыровой В. А.* К теории регулярных электростатических пучков заряженных частиц. ПМТФ, 1966, № 1.
13. *Павловский Ю. Н.* Исследование некоторых инвариантных решений уравнений пограничного слоя. Ж. вычислит. мат. и матем. физ., 1961, т. 1, № 2.