

ЛИНЕЙНАЯ ТЕОРИЯ СВЕРХЗВУКОВОГО ОБТЕКАНИЯ
ЛИНЕЙЧАТЫХ ТЕЛ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ КОНФИГУРАЦИИ

М. И. ФОЛЛЭ

(Москва)

С использованием формулы для сопротивления, полученной ранее автором [1], решена в линейной постановке задача обтекания тел с линейчатой поверхностью, соединяющей n -лучевую звезду в начальном сечении с круговым миделевым сечением.

Тела рассматриваемого класса дают существенный выигрыш в волновом сопротивлении по сравнению с эквивалентным конусом, а для не очень тонких тел — также и по сравнению с телом оживальной формы Кармана. Сопротивление рассмотренных тел слабо зависит от n .

1. Рассматривается сверхзвуковое обтекание удлиненного тела с расходящимися лучами от центра острыми передними кромками, плавная поверхность соединяет их с круговым миделевым сечением. В [1] получена в линейном приближении формула волнового сопротивления для таких тел

$$(1.1) \quad \frac{2X}{\rho U^2} = \frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^4 I_i - \left(\int_{C_*} \varphi_0 \frac{\partial \varphi_0}{\partial \nu} d\tau \right)_{s=1} + c_{pB} S(0)$$

$$I_1 = \int_0^1 \int_0^1 S''(s) S''(\sigma) \ln \frac{1}{|s-\sigma|} ds d\sigma, \quad I_2 = -S'(1) \int_0^1 S''(s) \ln \frac{1}{1-s} ds$$

$$I_3 = 2S'(0) \int_0^1 S''(s) \ln \frac{1}{s} ds, \quad I_4 = [S'(0)]^2 \ln \frac{2}{BR}$$

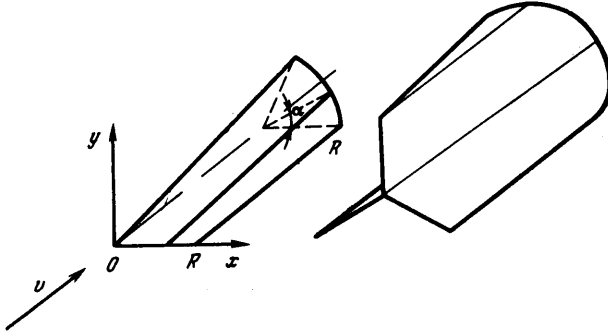
Здесь X — волновое сопротивление, ρ и U — плотность и скорость набегающего потока, $S(s)$ — площадь поперечного сечения тела — функция продольной координаты, $B = (M^2 - 1)^{1/2}$, где M — число Маха, R — радиус кругового сечения и одновременно длина луча звезды, c_{pB} — коэффициент донного давления, C_* — контур звезды, φ_0 — потенциал в плоскости звезды, ν и τ — нормаль и касательная к контуру в поперечной плоскости при $s=1$. При выводе формулы (1.1) использовалась теорема обращения потока и фактически обтекалось следующее тело: бесконечный цилиндр (последнее круговое сечение при $s=0$); плавная поверхность, звезда ($s=1$).

Предположим теперь, что точки n -лучевой звезды соединены с точками окружности отрезками прямых. Направим ось x параллельно одному из лучей звезды в задней плоскости, y — перпендикулярно к ней, s — вниз по потоку (фиг. 1), введем в плоскости $s=0$ полярный угол α и рассмотрим один сектор ($-\pi/n \leq \alpha \leq \pi/n$). Поверхность можно описать, соединяя

прямыми точки на окружности $(R \cos \alpha, R \sin \alpha, 0)$ с точками на луче $(Ru(\alpha), 0, 1)$. При $-\pi/n \leq \alpha \leq \pi/n$ получаем параметрическую запись

$$(1.2) \quad x=R[su(\alpha)+(1-s)\cos\alpha], \quad y=R(1-s)\sin\alpha$$

Функция $u(\alpha)$ описывает, какая именно точка луча $Ru(\alpha)$ соединена с точкой на окружности с полярным углом α , $u(\alpha)$ — монотонно убываю-



Фиг. 1

щая функция, $u(0)=1$, $u(\pi/n)=0$, в остальном функция произвольна. В силу симметрии

$$\frac{S(s)}{2n} = R^2 \int_{y'=y}^{y'=y(s,n)} [su(\alpha) + (1-s)\cos\alpha - y' \operatorname{ctg}(\pi/n)] dy'$$

$$y(s, n) = (1-s) \sin(\pi/n)$$

или

$$(1.3) \quad S(s) = R^2(1-s) [2nF(u)s + \pi(1-s)], \quad F(u) = \int_{\alpha=0}^{\alpha=\pi/n} u(\alpha) \cos \alpha d\alpha$$

Подставляя (1.3) в формулы (1.1), получим для линейчатого тела

$$(1.4) \quad \begin{aligned} S'(0) &= 2R^2(nF(u) - \pi), & S'(1) &= -2nR^2F(u) \\ I_1 &= 6R^4(2nF(u) - \pi)^2, & I_2 &= -4R^4nF(u)(2nF(u) - \pi) \\ I_3 &= -8R^4(nF(u) - \pi)(2nF(u) - \pi), & I_4 &= 4R^4 \ln \frac{2}{BR} (nF(u) - \pi)^2 \end{aligned}$$

2. В контурном интеграле в формуле (1.1) потенциал φ_0 является обобщением урдовского потенциала φ_0 [2] на случай особенности при $s=0$ [1]. Для урдовского потенциала известно [2]

$$\partial\varphi_0 / \partial v = dv / ds$$

Задавая параметрически поверхность трехмерного тела $x=x(s, \alpha)$ $y=y(s, \alpha)$, $s=s(s, \alpha)$, легко получить (фиг. 2)

$$\frac{dv}{ds} = \operatorname{tg} \beta = \frac{n_s}{[n_x^2 + n_y^2]^{1/2}}$$

Здесь n_x , n_y , n_s — проекции нормали. Выписав вектор нормали как векторное произведение касательных к поверхности векторов $(\partial x / \partial s, \partial y / \partial s, 1)$ и $(\partial x / \partial \alpha, \partial y / \partial \alpha, 0)$, получим граничное условие для φ_0 или

для ψ_0 . Эти две функции удовлетворяют условиям Коши — Римана в поперечной плоскости [1]

$$\frac{\partial \psi_0}{\partial \tau} = \frac{\partial \psi_0}{\partial v} = \left(\frac{\partial x}{\partial s} \frac{\partial y}{\partial \alpha} - \frac{\partial x}{\partial \alpha} \frac{\partial y}{\partial s} \right) \left[\left(\frac{\partial y}{\partial \alpha} \right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial \alpha} \right)^2 \right]^{-1/2}$$

$$d\tau = \left[\left(\frac{\partial y}{\partial \alpha} \right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial \alpha} \right)^2 \right]^{1/2} d\alpha$$

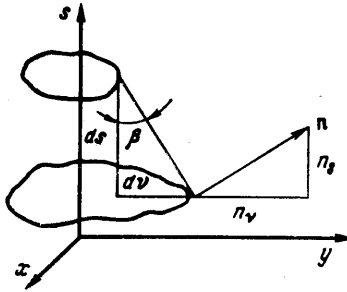
(2.1)

$$\psi_0(s, \alpha) = \int_0^\alpha \left(\frac{\partial x}{\partial s} \frac{\partial y}{\partial \alpha} - \frac{\partial x}{\partial \alpha} \frac{\partial y}{\partial s} \right) d\alpha$$

Подставляя в (2.1) формулы (1.2) и полагая $s=1$, получим при $-\pi/n \leq \alpha \leq \pi/n$

$$(2.2) \quad \frac{\partial \psi_0}{\partial \alpha} = R^2 u'(\alpha) \sin \alpha, \quad \psi_0(u) = R^2 \int_1^u \sin \alpha(u) du$$

Однако для полной формулировки граничных условий необходимо найти $\psi_0(\alpha)$ или $\partial \psi_0 / \partial \alpha$ при любых α , докажем, что это периодические функции с периодом $2\pi/n$. Общая параметрическая запись поверхности для любого α , обобщающая формулы (1.2)



Фиг. 2

$$(2.3) \quad \frac{1}{R}(x+iy) =$$

$$= \frac{z}{R} = (1-s) \exp i\alpha + s u_*(\alpha),$$

$$z = x + iy$$

$$u_*(\alpha) = u(\alpha) [\cos(2\pi m/n) + i \sin(2\pi m/n)] =$$

$$= u(\alpha) \exp(2\pi m i/n),$$

$$m = E(\alpha n / 2\pi), \quad 0 \leq m \leq n-1$$

(2.4)

Здесь $u_*(\alpha)$ — комплексная функция, описывающая звезду. Здесь использована линейчатость поверхности — произвольное поперечное сечение будет содержать звезду (конечное сечение) и круг (начальное сечение) с весами s и $1-s$ соответственно. Звезду естественно описывать, поочередно умножая комплексные координаты концов ее лучей на действительную функцию $u(\alpha)$. При $\pi/n \leq \alpha \leq 3\pi/n$

$$x = (1-s) \cos \alpha + s u(\alpha) \cos(2\pi/n), \quad y = (1-s) \sin \alpha + s u(\alpha) \sin(2\pi/n)$$

Подставляя в (2.1), получим аналогично (2.2)

$$\frac{1}{R^2} \frac{\partial \psi_0}{\partial \alpha} = u'(\alpha) \sin \left(\alpha - \frac{2\pi}{n} \right) = u' \left(\alpha - \frac{2\pi}{n} \right) \sin \left(\alpha - \frac{2\pi}{n} \right)$$

Последнее преобразование следует из геометрических соображений: тело, а следовательно и параметрическая функция $u(\alpha)$, имеет период $2\pi/n$. Ясно, что подобное доказательство легко повторить для любого интервала. Так как исходное тело симметрично относительно плоскости $y=0$, то $u(\alpha)$ — четная функция, ее производная нечетна, следовательно, $\partial \psi_0 / \partial \alpha$ — четная, а $\psi_0(\alpha)$ — вновь нечетная функции (полагаем $\psi_0(0) = 0$). Таким образом, достаточно рассмотреть интервал $0 \leq \alpha \leq \pi/n$,

а $\psi_0(\alpha)$ вне его будет выражаться через значения $\psi_0(\alpha)$ на этом отрезке

$$(2.5) \quad \psi_0(\alpha) = (k-1) \int_0^{\pi/n} \frac{\partial \psi_0}{\partial \alpha} d\alpha + \frac{(-1)^{k-1} + 1}{2} \int_0^{\alpha - (k-1)\pi/n} \frac{\partial \psi_0}{\partial \alpha} d\alpha + \\ + \frac{(-1)^{k+1}}{2} \int_{k\pi/n - \alpha}^{\pi/n} \frac{\partial \psi_0}{\partial \alpha} d\alpha, \quad k = E(\alpha n/\pi) + 1, \quad 1 \leq k \leq 2n.$$

Здесь $\partial \psi_0 / \partial \alpha$ определяется по формуле (2.2).

Итак, необходимо найти гармоническую функцию $\psi_0(x, y)$, удовлетворяющую граничному условию (2.5). Заметим, что угол α — только параметр и не является полярным углом в плоскости звезды.

3. Для решения подобной краевой задачи требуется найти конформное отображение физической плоскости $z = x + iy$, в данном случае — внешности n -лучевой звезды с лучами длиной R на внешность единичного круга в фиктивной плоскости ζ . При этом контур звезды C^* перейдет в окружность C^* . Такое отображение задается функцией [3]

$$(3.1) \quad \frac{z}{R} = \frac{1}{\sqrt[n]{4}} \frac{(\zeta^n + 1)^{2/n}}{\zeta}$$

В частном случае $n=2$ получаем отображение Жуковского. Введем полярные координаты в плоскости ζ , $\zeta = \rho \exp(i\theta)$, получим для первого луча

$$u(\alpha)R = R \cos^{2/n} \frac{\theta n}{2}, \quad du = -\sin \frac{\theta n}{2} \left(\cos \frac{\theta n}{2} \right)^{2/n-1} d\theta$$

Следовательно, можно ввести функцию $\psi^*(\theta) = \psi_0(\alpha)$, гармоничную вне единичного круга. Условие (2.5) примет вид

$$(3.2) \quad \frac{\psi^*(\theta)}{R^2} = (k-1) \int_0^{\pi/n} G(\theta) d\theta + \frac{(-1)^{k-1} + 1}{2} \int_0^{\theta - (k-1)\pi/n} G(\theta) d\theta + \\ + \frac{(-1)^{k+1}}{2} \int_{k\pi/n - \theta}^{\pi/n} G(\theta) d\theta, \quad k = E(\theta n/\pi) + 1$$

$$(3.3) \quad G(\theta) = -\sin \frac{\theta n}{2} \sin \alpha(u) u^{1-n/2}, \quad u = \left(\cos \frac{n\theta}{2} \right)^{2/n}$$

Граничные условия (2.5) и (3.2) имеют похожий вид. Очевидно, что функции $\psi_0(\alpha)$ и $\psi^*(\theta)$ имеют одинаковый период $2\pi/n$, а точки $\alpha = m\pi/n$ ($0 \leq m \leq 2n$) переходят соответственно в точки $\theta = m\pi/n$. Внутренние точки секторов, вообще говоря, одна в другую не переходят, их соответствие зависит от произвольной функции $u(\alpha)$.

Имеется граничное условие (3.2), (3.3) для гармонической функции $\psi^*(\rho, \theta)$. Этого условия было бы достаточно, если бы соответствующий комплексный потенциал $w(z) = w^*(\zeta) = w^*(\rho, \theta)$ был ограничен. Однако ограничены лишь действительная часть и коэффициент при мнимой части соответствующих комплексных производных, так как именно они имеют физический смысл. Другими словами, $w^*(\zeta)$ имеет логарифмическую часть, потенциал $w(z)$ имеет вид [1, 2]

$$w(z) - b_0(z) = a_0(1) \ln z + W(z)$$

Здесь $W(z)$ ограничена на бесконечности. Потенциалом, записанным в такой форме, как показано в [1], можно пользоваться «почти везде», кроме непосредственной окрестности особенности ($s=0$). Подставляя формулу (3.1), получим для $w^*(\xi)$

$$(3.4) \quad w^*(\xi) = a_0(1) \ln R\xi + W^*(\xi)$$

где $W^*(\xi)$ ограничена на бесконечности. Интересно, что мощность логарифмического источника сохранилась. Это легко доказать в общем случае

$$(3.5) \quad 2\pi a_0^* = \int_{c^*} \frac{\partial \varphi^*}{\partial \nu} d\tau = \int_{c^*} d\psi^* = \int_{c^*} d\psi_0 = \int_{c^*} \frac{\partial \varphi_0}{\partial \nu} d\tau = 2\pi a_0$$

Итак, прежде чем использовать граничное условие (3.2), (3.3), следует вычесть из правой части (1.5) $a_0(1)\theta = S'(1)\theta/2\pi = -nF(u)R^2\theta/\pi$.

Введем для ограниченной части потенциала заглавные буквы вместо строчных ($W^*(\xi) = \Phi^*(\xi) + i\Psi^*(\xi)$), следовательно

$$(3.6) \quad \Psi^*(\theta) = \psi^*(\theta) + R^2 nF(u)\theta/\pi$$

Для $\Psi^*(\xi) = \Psi^*(\rho, \theta)$ можно записать интеграл Пуассона

$$(3.7) \quad \Psi^*(\rho, \theta) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Psi^*(\beta) \frac{\rho^2 - 1}{\rho^2 - 2\rho \cos(\beta - \theta) + 1} d\beta, & \rho > 1 \\ \Psi^*(\theta), & \rho = 1 \end{cases}$$

Теперь можно подсчитать контурный интеграл в формуле (1.1). Хотя конформное отображение (3.1) допускает обратное преобразование, удобнее использовать не плоскость z , а фиктивную плоскость ξ . Аналогично (3.5) получим

$$\int_{c^*} \varphi_0 \frac{\partial \varphi_0}{\partial \nu} d\tau = \int_{c^*} \varphi_0 d\psi_0 = \int_{c^*} \varphi^* d\psi^* = \int_{c^*} \varphi^* \frac{\partial \varphi^*}{\partial \nu} d\tau$$

Заметим, что конформность преобразования обязательна $\partial \varphi^*/\partial \tau = \partial \varphi^*/\partial \nu$ также и на контуре C^* .

Выделяя в формуле (3.4) для $w^*(\xi)$ действительную и мнимую части, воспользуемся условиями Коши — Римана и тем, что C^* — единичная окружность, в результате получим

$$(3.8) \quad \int_{c^*} \varphi^* \frac{\partial \varphi^*}{\partial \nu} d\tau = \frac{[S'(1)]^2}{2\pi} \ln R - a_0(1) \int_0^{2\pi} I(\theta) d\theta - \\ - \int_0^{2\pi} I(\theta) \frac{\partial \Psi^*}{\partial \theta} \Big|_{\rho=1} d\theta, \quad I(\theta) = \int_0^{\theta} \frac{\partial \Psi^*}{\partial \rho} \Big|_{\rho=1} d\theta$$

4. Следовательно, в основную формулу для сопротивления войдут два члена порядка $R^4 \ln R^{-1}$, остальные имеют порядок R^4 . Ясно, что члены порядка $R^4 \ln R^{-1}$ асимптотически, т. е. для очень тонких тел, будут определяющими. Итак, для очень тонких тел (здесь звездочка означает учет только асимптотических членов)

$$(4.1) \quad D = (2X/\rho_1 U^2)^* = (2/\pi) R^4 \ln(2/BR) [n^2 F^2(u) + (nF(u) - \pi)^2]$$

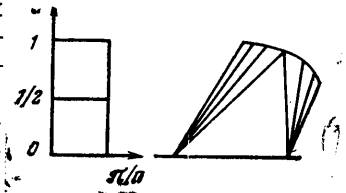
Из (1.4) следует $0 \leq nF(u) \leq \pi$. Очевидно, что минимум выражения (4.1) достигается при $nF(u) = \pi/2$. Конечно, это условие не определяет однозначно функцию $u(\alpha)$ и, следовательно, геометрию тела. Это может быть, например, тело с фиг. 3. Интересно сравнить это тело с конусом, который тоже находится среди допустимых тел. Так как для конуса $u(\alpha) \equiv 0$ и, следовательно, $F(u) \equiv 0$, то из (4.1) получаем известную асимптотическую формулу для волнового сопротивления конуса D_c , а также асимптотически оптимального тела D_m

$$(4.2) \quad D_c = 2\pi R^4 \ln(2/BR), \quad D_m = \pi R^4 \ln(2/BR)$$

Таким образом, сопротивление асимптотически оптимального тела составляет половину сопротивления эквивалентного конуса. Вообще с асимптотической точки зрения конус — одна из наихудших поверхностей в рассматриваемом классе, она имеет наибольшее сопротивление.

Будем теперь полагать, что $u(\alpha)$ задает равномерное распределение отрезков прямых, соединяющих звезду с окружностью

$$(4.3) \quad \alpha(u) = (1-u)\pi/n$$



Фиг. 3

Геометрически это означает, что проекции всех образующих на поперечную плоскость параллельны проекции образующей, соединяющей точку $u=0$ (основание луча) с точкой $\alpha=\pi/n$ на окружности. Используя (1.3), получим

$$(4.4) \quad F(u) = F_n = n(1 - \cos(\pi/n))/\pi$$

Из (4.4) и данных, приведенных ниже, видно что при равномерном распределении $u(\alpha)$ параметр nF стремится к $\pi/2$ по мере роста числа n . Однако и при небольших значениях $n=2$ и 3 значения сопротивления по асимптотической формуле (4.1) близки к оптимальному значению — половине сопротивления конуса.

n	F	nF	D/D_c
2	$2/\pi$	$4/\pi=1.272$	0.518
3	$3/2\pi$	$9/2\pi=1.434$	0.504
∞	0	$\pi/2=1.571$	0.5

Перейдем теперь к рассмотрению сопротивления по полной линейной формуле (1.1) при $u(\alpha)$, заданной по формуле (4.3). Используя (3.3), получим

$$(4.5) \quad G(\theta) = \sin \frac{\pi}{n} \cos \left(\frac{\pi}{n} t^{2/n} \right) - \cos \frac{\pi}{n} \sin \left(\frac{\pi}{n} t^{2/n} \right), \quad t = \cos \frac{n\theta}{2}$$

$$(4.6) \quad \int_{\alpha}^{\beta} G(\theta) d\theta = \frac{n}{\pi} \left[\sin \frac{\pi}{n} (\sin \beta_1 - \sin \alpha_1) + \cos \frac{\pi}{n} (\cos \beta_1 - \cos \alpha_1) \right]$$

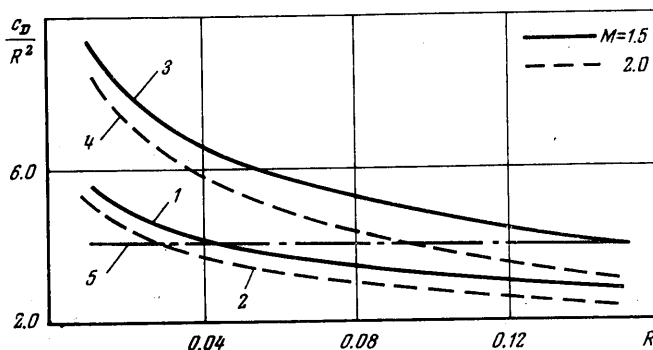
$$\alpha_1 = (\pi/n) (\cos n\alpha/2)^{2/n}, \quad \beta_1 = (\pi/n) (\cos n\beta/2)^{2/n}$$

При $n=2$ формулы (4.5), (4.6) упрощаются

$$(4.7) \quad G(\theta) |_{n=2} = -\sin \theta \cos \left(\frac{\pi}{2} \cos \theta \right)$$

$$\int_{\alpha}^{\beta} G(\theta) d\theta = \frac{2}{\pi} \left[\sin \left(\frac{\pi}{2} \cos \beta \right) - \sin \left(\frac{\pi}{2} \cos \alpha \right) \right]$$

Подставляя (4.5)–(4.7) и (3.2) в (3.6), можно получить общую формулу для $\Psi^*(\theta)$. Нетрудно, однако, показать, что $\Psi^*(\theta)$ — периодическая нечетная функция (следует из нечетности $\psi_0(\alpha)$), и, следовательно, достаточно иметь формулу для ее вычисления в первой половине первого периода, т. е. при $0 \leq \theta \leq \pi/n$. Доказательство периодичности $\Psi^*(\theta)$ для простоты проведем для $n=2$, и рассмотрим (3.2) и (3.6) при $0 \leq \theta_0 < \pi/2$,



Фиг. 4

$\theta_1 = \theta_0 + \pi$. Коэффициент при третьем слагаемом в (3.2) равен нулю, так как $k(\theta_0) = 1$, $k(\theta_1) = 3$, верхний предел у второго интеграла в (3.2) одинаков для θ_0 и θ_1 . Первый интеграл равен нулю для θ_0 и $-4/\pi$ для θ_1 , однако, как следует из (3.6), это компенсируется изменением последнего слагаемого, следовательно, $\Psi^*(\theta_0) = \Psi^*(\theta_1)$, для остальных периодов доказательство аналогично. Итак, при $0 \leq \theta \leq \pi/n$

$$(4.8) \quad \frac{\Psi^*(\theta)}{R^2} = \frac{n}{\pi} \left\{ \cos \left[\frac{\pi}{n} \left(1 - \left(\cos \frac{n\theta}{2} \right)^{2/n} \right) \right] - 1 + \frac{n}{\pi} \left(1 - \cos \frac{\pi}{n} \theta \right) \theta \right\}$$

при $n=2$, в частности, получим

$$(4.9) \quad \frac{\Psi^*(\theta)}{R^2} = \frac{4\theta}{\pi^2} - \frac{2}{\pi} + \frac{2}{\pi} \sin \left(\frac{\pi}{2} \cos \theta \right), \quad 0 \leq \theta \leq \pi/2$$

После подстановки (4.8), (4.9) в (3.7), (3.8) и (1.1) задача полностью сведена к квадратурам. Расчет сопротивления по этим формулам показал слабую зависимость от n — разница всегда не превышала 2%, хотя сопротивление при $n=3$ при малых R было меньше, чем при $n=2$. На фиг. 4 приведено сравнение нормированного волнового сопротивления $c_D/R^2 = 2X/\rho_1 U^2 \cdot \pi R^4$ для тел рассматриваемого класса (кривая 1— $M=1.5$, кривая 2— $M=2$) с волновым сопротивлением эквивалентного конуса (соответственно кривые 3 и 4) и тела оживальной формы Кармана (кривая 5, сопротивление не зависит от числа Маха). Как и в асимптотическом случае, тела рассматриваемого класса имеют существенное преимущество перед конусом, хотя это преимущество несколько уменьшается с ростом R . В линейной теории известно, что даже сопротивление конуса меньше, чем сопротивление оживала Кармана при $RB > 0.164$. Однако это происходит при таких значениях входящих параметров, при которых само применение классической линейной теории становится сомнительным. (В [4] ука-

зано на неприменимость формул линейной теории при $M > 2-2.5$. Это ограничение связано, в частности, с тем, что неучтенный в формуле для c_p член Φ^2 имеет коэффициент M^2-1 .) Не очень тонкие тела пространственной конфигурации, рассматриваемые в этой работе, дают выигрыш в волновом сопротивлении и перед оживалом Кармана, причем в области, где классическая линейная теория заведомо применима.

Выходя за рамки рассмотренной задачи, следует отметить, что в турбулентном режиме обтекания (для удлиненных тел при небольших числах Маха, которые здесь рассматриваются) существенно сопротивление трения. Так как рассматриваемые тела пространственной конфигурации имеют при этом существенно большую поверхность по сравнению с осесимметричными, то очевидно, что сопротивление трения у них больше. Экспериментальные исследования [5] при $M=2.04$, $R=0.18$, 0.13 показывают приблизительно равное сопротивление конуса и линейчатых тел пространственной конфигурации. При увеличении числа Маха до умеренных сверхзвуковых и гиперзвуковых значений роль сопротивления трения уменьшается и линейчатые тела пространственной конфигурации дают существенный выигрыш в полном сопротивлении по сравнению с осесимметричными [5].

Поступила 19 IX 1977

ЛИТЕРАТУРА

1. Фоллз М. И. Формула сопротивления для удлиненных головных частей летательных аппаратов. Изв. АН СССР, МЖГ, 1977, № 3.
2. Ward G. N. Supersonic flow past slender pointed bodies. Quart. J. Mech. and Appl. Math., 1949, vol. 2, pt 1.
3. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного. М., «Наука», 1973.
4. Васильченко В. И., Пригуло М. Ф. Высшие приближения к точному решению задачи обтекания тела вращения сверхзвуковым потоком газа. Тр. ЦАГИ, 1975, вып. 1666.
5. Гусаров А. А., Деев А. А., Левин В. А., Пиллюгин Н. Н., Черный Г. Г. Оптимальные аэродинамические формы тел, летящих с гиперзвуковыми скоростями. В кн. «4-й Всесоюзный съезд по теоретической и прикладной механике. Аннотации докладов». Киев, «Наукова думка», 1976.