

О ТЕЧЕНИИ СКВОЗЬ ТОНКИЙ ПОРИСТЫЙ СЛОЙ (РЕШЕТКУ)

А. М. ВАЙСМАН, М. А. ГОЛЬДШТИК

(Новосибирск)

В работе дана точная гидродинамическая формулировка задачи о потоке сквозь решетку, рассматриваемую как предел тонкого пористого слоя. В сформулированные условия сопряжения на решетке вошли две ее характеристики: коэффициент сопротивления и показатель преломления, между которыми установлена универсальная связь, не зависящая от закона сопротивления решетки и характера течения. В качестве иллюстрации рассмотрены задачи о слабозмущенном потоке жидкости, проходящем сквозь решетку в плоском канале. Дано качественное объяснение рассчитанных эффектов.

Выравнивающие сетки, распределительные и поддерживающие решетки, например, в аппаратах с неподвижным или псевдокипящим слоем, тонкие пористые тепловыделяющие слои имеют широкое применение. Взаимодействие потока с выравнивающей сеткой изучалось ранее [1] в гидравлической постановке. При этом сетка служила лишь источником перепада давления и характеризовалась одним коэффициентом сопротивления. Между тем сетка (решетка), представляющая собой тонкий структурный слой, вообще говоря, оказывает также преломляющее действие на поток. Действительно, при наклонном падении струя стремится развернуться в сторону меньшего сопротивления, т. е. перпендикулярно слою. Существенно, что такое ускорение потока внутри слоя нельзя описать в рамках модели Дарси, которая предполагает безынерционность движения. В связи с этим ниже на основе предложенной ранее [1] модели, учитывающей инерционные эффекты, дается точная гидродинамическая формулировка задачи о потоке сквозь решетку, рассматриваемую как поверхность разрыва.

Запишем уравнения стационарного движения несжимаемой жидкости в изотропной среде (см. сноску)

$$(1) \quad \operatorname{div}(\varepsilon \mathbf{v}) = 0, \quad (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p - \alpha \mathbf{v}$$

В качестве кинематической переменной здесь выбрана скорость \mathbf{v} в среднем относительном проходном сечении. Через p и ρ обозначены давление и плотность жидкости, ε — порозность. Вне слоя жидкость считается идеальной, а ее взаимодействие с ним характеризуется коэффициентом трения α , который предполагается линейно зависящим от скорости

$$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 |\mathbf{v}|$$

В частности, если пористая среда образована сферическими частицами диаметра d , то на основании формул, приведенных, например, в [2], для α_1 и α_2 можно записать выражения

$$\alpha_1 = 150\mu(1-\varepsilon)^2/d^2\rho\varepsilon^3, \quad \alpha_2 = 1.7(1-\varepsilon)/d\varepsilon^3$$

где μ — вязкость жидкости.

Чтобы сформулировать условия сопряжения на решетке, в общем случае криволинейной, нужно предварительно рассмотреть поток сквозь слой

¹ Вайсман А. М., Гольдштик М. А. Динамическая модель движения жидкости в пористой среде. Минск, 1976 (Препринт Ин-та теплообмена).

конечной толщины δ и перейти к пределу $\delta \rightarrow 0$. В силу локального характера этих условий достаточно решить простейшую одномерную задачу о первоначально однородном наклонном потоке сквозь неограниченную плоскопараллельную пористую пластину. Следует заметить, что когда толщина пластины сравнима с масштабом микроструктуры пористой среды, анизотропия составляющих ее структурных элементов и плоский характер их упаковки могут привести к локальной анизотропии. При этом в плоскости пластины тензор коэффициентов трения может оставаться изотропным в случае хаотичности упаковки, так что его анизотропия будет характеризоваться отношением γ коэффициентов трения в продольном и поперечном направлениях к пластине.

Введем систему координат с началом на передней границе пластины, направив ось x по ее внутренней нормали.

Учитывая анизотропию пластины, запишем уравнения движения (1) применительно к рассматриваемой одномерной задаче

$$(2) \quad \begin{aligned} \frac{du}{dx} &= 0, & \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} &= -(\alpha_1 + \alpha_2 \sqrt{u^2 + v^2})u, \\ u \frac{dv}{dx} &= -\gamma(\alpha_1 + \alpha_2 \sqrt{u^2 + v^2})v \end{aligned}$$

Здесь u и v — нормальная и касательная составляющие скорости v .

Эти уравнения необходимо дополнить условиями сопряжения на границах пластины. Такие условия были установлены в работе А. М. Вайсмана, М. А. Гольдштика (см. стр. 79) для среды с линейным законом сопротивления ($\alpha_2 = 0$), однако нетрудно показать, что они сохраняются и в общем случае. Их можно записать в виде

$$\begin{aligned} u_- &= \varepsilon u_0, & v_- &= v_0, & p_- &= p_0 + \frac{1}{2}\rho(1 - \varepsilon^2)u_0^2 \\ u_+ &= \varepsilon u_b, & v_+ &= v_b, & p_+ &= p_b + \frac{1}{2}\rho(1 - \varepsilon^2)u_b^2 \end{aligned}$$

Здесь минусом (плюсом) отмечены величины перед (за) слоем, а нулем (дельтой) — значения переменных на соответствующих внутренних сторонах границ пластины.

Подстановка в эти условия решения уравнений (2) и последующий предельный переход $\delta \rightarrow 0$ при фиксированных произведениях $\alpha_1 \delta$ и $\alpha_2 \delta$ дают соотношения

$$(3) \quad u_- = u_+, \quad v_- = n(v_-)v_+, \quad p_- - p_+ = \frac{1}{2}\xi(v_-)\rho u_-^2.$$

$$(4) \quad n = \exp(\frac{1}{2}\gamma\varepsilon^2\xi)$$

Величины n и ξ выражаются как функции скорости и структурных параметров при помощи формулы

$$\begin{aligned} \ln \frac{1 - \operatorname{cosec} \vartheta_-}{1 - \operatorname{cosec} \vartheta_+} + \frac{\xi_1 u_-^{-1} + \xi_2}{\xi_1 u_-^{-1} - \xi_2} \ln \frac{1 + \operatorname{cosec} \vartheta_-}{1 + \operatorname{cosec} \vartheta_+} - \\ - \frac{2\xi_1 u_-^{-1}}{\xi_1 u_-^{-1} - \xi_2} \ln \frac{\xi_1 u_-^{-1} + \xi_2 \operatorname{cosec} \vartheta_-}{\xi_1 u_-^{-1} + \xi_2 \operatorname{cosec} \vartheta_+} = \gamma\varepsilon^2(\xi_1 u_-^{-1} + \xi_2) \\ \vartheta_- = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\varepsilon v_-}{u_-}, \quad \vartheta_+ = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\varepsilon v_+}{u_-}, \quad \xi_1 = 2\varepsilon^{-1} \lim_{\delta \rightarrow 0} \alpha_1 \delta \\ \xi_2 = 2\varepsilon^{-2} \lim_{\delta \rightarrow 0} \alpha_2 \delta \end{aligned}$$

Величины ξ и n относятся к решетке. Согласно (3) они имеют смысл коэффициента сопротивления и показателя преломления, равного отноше-

нию тангенсов углов падения и преломления потока. Хотя ζ и n в общем случае — функции скорости, соотношение (4) между ними не зависит от вида течения или закона сопротивления. В частности, в соответствии с этим соотношением степень анизотропии решетки легко определить путем независимых измерений ζ и n (естественно допустить, что решетка, составленная из сферических частиц, близка к изотропной ($\gamma=1$), что все же нуждается в экспериментальной проверке).

Явные выражения для ζ , а следовательно, и для n могут быть указаны в следующих случаях:

1) малые углы падения ($v_- \ll u_-$). С точностью до членов порядка v_-^2/u_-^2 получим

$$(5) \quad \zeta = \zeta_1 u_-^{-1} + \zeta_2$$

2) линейный закон сопротивления ($\zeta_2=0$)

$$(6) \quad \zeta = \zeta_1 u_-^{-1}$$

3) квадратичный закон сопротивления ($\zeta_1=0$)

$$(7) \quad \zeta = \zeta_2 + \frac{2}{\gamma \varepsilon^2} \ln \left[1 + \frac{1 - \exp(-\gamma \varepsilon^2 \zeta_2)}{2} (\operatorname{cosec} \theta_- - 1) \right]$$

Полученные условия сопряжения на решетке совместно с краевыми условиями полностью определяют течение.

Кроме скорости и давления на решетке испытывают разрыв также другие гидродинамические переменные. Например, для функции Бернулли и вихря (плоская задача), $H = p / \rho + v^2 / 2$, $\omega = \partial v / \partial x - \partial u / \partial y$ соответствующие выражения, как нетрудно показать, имеют вид

$$H_- - H_+ = \frac{1}{2} \zeta_1 u_+^2 + \frac{1}{2} (n^2 - 1) v_+^2$$

$$\omega_+ - \omega_- = \zeta_1 u_+' + (n^2 - 1) \frac{v_+ v_+'}{u_+} + \frac{1}{2} \frac{\zeta_1'}{u_+} (u_+^2 + \gamma \varepsilon^2 n^2 v_+^2)$$

Здесь штрих означает дифференцирование вдоль границы решетки.

Представляют интерес также условия сопряжения на удерживающей решетке, поставленной за пористой средой. В частности, в случае линейного закона сопротивления они имеют вид (ε_- — порозность среды)

$$(8) \quad \varepsilon_- u_- = u_+, \quad v_- = n v_+, \quad p_- - p_+ = \frac{1}{2} \rho \zeta_1 u_+^{-1/2} \rho (u_-^2 - u_+^2)$$

Рассмотрим два примера, иллюстрирующих влияние решетки на поток. Пусть слабозмущенный однородный поток жидкости в плоском горизонтальном канале высоты $2h$ проходит сквозь вертикальную решетку. Для упрощения формул удобно перейти к безразмерным переменным, сохранив для них те же обозначения и выбрав в качестве характерных размера и скорости соответственно h / π и скорость U равномерного движения.

Потребуем, чтобы при $x \rightarrow \infty$ поток был горизонтальным, а давление постоянным

$$u_- = 1 + \lambda w(y), \quad w(y) = w(-y) = \sum_{s=1}^{\infty} w_s \cos sy, \quad v_- = 0, \quad p_- = p_0 = \text{const}$$

Через w_s здесь обозначены коэффициенты Фурье функции $w(y)$, описывающей начальное возмущение потока, λ — параметр малости ($\lambda \ll 1$).

Предполагая, что за решеткой давление также выравнивается с ростом x , будем считать функцию тока ψ_+ асимптотически зависящей только от y . Кроме того, потребуем обращения v в нуль на стенках канала.

Уравнениям и краевым условиям в первом приближении по λ удовлетворяют выражения

$$(9) \quad \begin{aligned} \psi_- &= y + \lambda \Sigma s^{-1} w_s (1 - c_- e^{sx}) \sin sy, & \psi_+ &= y + \lambda \Sigma s^{-1} w_s (k + c_+ e^{-sx}) \sin sy \\ u_- &= 1 + \lambda w(y) - \lambda c_- \Sigma w_s e^{sx} \cos sy, & u_+ &= 1 + \lambda k w(y) + \lambda c_+ \Sigma w_s e^{-sx} \cos sy \\ v_- &= \lambda c_- \Sigma w_s e^{sx} \sin sy, & v_+ &= \lambda c_+ \Sigma w_s e^{-sx} \sin sy \\ p_- &= p_0 + \lambda c_- \Sigma w_s e^{sx} \cos sy, & p_+ &= p_1 - \lambda c_+ \Sigma w_s e^{-sx} \cos sy \end{aligned}$$

где неопределенные константы c_{\pm} , p_1 , k должны быть найдены из алгебраических уравнений, которые получаются подстановкой (9) в условия сопряжения, записанные в требуемом приближении по λ .

Эти уравнения имеют вид

$$(10) \quad u_- = u_+, \quad v_- = n v_+, \quad p_- - p_+ = \frac{1}{2} \xi + \xi_* (u_+ - 1)$$

$$(11) \quad \xi = \xi_1 + \xi_2, \quad \xi_* = \frac{1}{2} \xi_1 + \xi_2, \quad n = \exp(\frac{1}{2} \gamma \epsilon^2 \xi)$$

Подставляя (9) в (10) и решая получающуюся алгебраическую систему, находим

$$(12) \quad c_+ = \frac{\xi_*}{1+n(1+\xi_*)}, \quad c_- = n c_+, \quad k = \frac{1+n-\xi_*}{1+n(1+\xi_*)}, \quad p_1 = p_0 - \frac{1}{2} \xi$$

Формулы (9) и (12) дают решение поставленной задачи. Из вида решения следует, в частности, что возмущение горизонтальной скорости при $x=0$ подобно начальному возмущению с положительным коэффициентом подобия k_- , а вертикальные градиенты давления разного знака по обе стороны решетки, причем решетка ослабляет градиенты в n раз. Действительно, согласно (9) и (12) при $x=0$ будем иметь

$$\begin{aligned} u_- = u_+ &= 1 + \lambda k_- w(y), & k_- &= \frac{1+n}{1+n(1+\xi_*)} \\ p_- = p_0 + n \frac{\lambda \xi_* w(y)}{1+n(1+\xi_*)}, & p_+ &= p_0 - \frac{1}{2} \xi - \frac{\lambda \xi_* w(y)}{1+n(1+\xi_*)} \end{aligned}$$

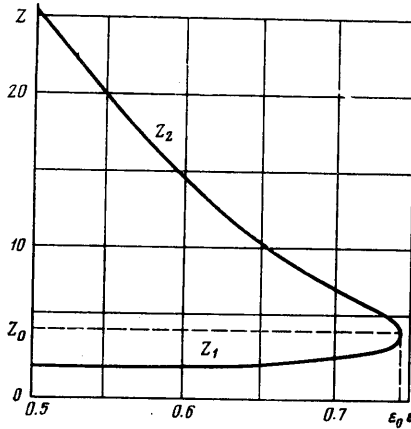
Различие асимптотических профилей скорости характеризует коэффициент ослабления начального возмущения k . Переходя к его анализу, будем рассматривать для простоты решетку с квадратичным законом сопротивления ($\xi = \xi_* = \xi_2$). Легко заметить, что $|k| < 1$ при любых ξ , т. е. за решеткой амплитуда возмущения всегда меньше начальной. При выполнении условия

$$\xi = 1 + n$$

решетка вообще не пропускает возмущения, т. е. поток за ней асимптотически-однороден. Такое условие может выполняться, очевидно, только при $\xi \geq 2$. При больших ξ и фиксированном $\gamma \neq 0$ значение k асимптотически стремится к нулю, оставаясь положительным. Однако для резко анизотропной решетки, не преломляющей потока ($\gamma=0$, т. е. $n=1$), $k \rightarrow -1$ при $\xi \rightarrow \infty$. Такая решетка будет «обращать» слабовозмущенный профиль без изменения амплитуды. В этом случае коэффициент ослабления определяется фор-

мулой $k = (2 - \xi)/(2 + \xi)$, которая совпадает с уже известной [1], полученной в рамках гидравлической модели.

В случае изотропной решетки ($\gamma = 1$) существует предельное значение порозности ($\epsilon_0 = 0.746$), такое, что $k > 0$ при $\epsilon > \epsilon_0$. Когда $\epsilon = \epsilon_0$, $k > 0$ для



всех ξ , кроме $\xi = Z_0 = 4.591$. В этой точке коэффициент ослабления обращается в нуль, причем Z_0 является двукратным корнем. Это означает, что имеется возможность достичь повышенной степени однородности потока за выравнивающей решеткой при не слишком большом сопротивлении.

При $\epsilon < \epsilon_0$ у k есть два корня $Z_{1,2}$ и $k < 0$ в интервале $Z_1 < \xi < Z_2$. Зависимость $Z_{1,2}$ от ϵ представлена на фигуре.

Анализ анизотропного случая при $\gamma \neq 0$ сводится к проведенному выше за заменой $\epsilon \rightarrow \gamma^{-1/2}\epsilon$ в формуле для n .

Нетрудно дать качественное объяснение особенностей полученного реше-

ния. Быстрые струи, тормозящиеся вследствие большего трения о решетку, расширяются, что вызывает сужение и ускорение более медленных. Перед решеткой этот процесс тем интенсивнее, чем больше ее сопротивление. На некотором расстоянии за ней он будет продолжаться в силу инерции, причем в случае непреломляющей решетки, как отмечалось [1], всегда происходит «обращение» профиля, если только ее сопротивление достаточно велико. В общем случае скорость расширения (сужения) струй ослабляется в результате преломления в n раз, и, поскольку величина n экспоненциально зависит от коэффициента сопротивления, она будет максимальной за решеткой при некотором конечном сопротивлении. Если ее величина достаточно велика, эффект обращения профиля также имеет место, но только в определенном интервале сопротивлений.

В качестве другого примера рассмотрим поток сквозь пористую вставку с удерживающей решеткой на задней кромке. Вставка занимает в канале область $x < 0$, а решетка с линейным законом сопротивления, по-прежнему находится на оси y .

В окрестности границ пористой вставки образующие ее частицы располагаются более упорядоченно, что приводит к изменению сопротивления таких областей. Для качественного учета этого эффекта рассмотрим вставку с переменным по сечению коэффициентом трения $\alpha_1(y)$. Эффективный коэффициент сопротивления решетки $\xi_1(y)$, в котором учитывается неоднородность ближайших слоев частиц также будет переменным. Вариации коэффициентов сопротивления вставки и решетки будем считать малыми.

Как и в предыдущей задаче, рассмотрение удобно проводить в безразмерных переменных. Тогда уравнения движения (1) для пористой вставки примут вид

$$u_- \frac{\partial u_-}{\partial x} + v_- \frac{\partial u_-}{\partial y} = - \frac{\partial p_-}{\partial x} - U^{-1} \alpha_1(y) u_-,$$

$$u_- \frac{\partial v_-}{\partial x} + v_- \frac{\partial v_-}{\partial y} = - \frac{\partial p_-}{\partial y} - U^{-1} \alpha_1(y) v_-$$

$$U^{-1} \alpha_1(y) = \sigma(1 + \lambda \varphi(y)), \quad \varphi(y) = \sum_{s=1}^{\infty} \varphi_s \cos sy$$

Здесь σ — среднее значение безразмерного коэффициента трения, функция $\varphi(y)$ описывает изменение сопротивления по сечению, φ_s — ее фурье-коэффициенты.

Подобно коэффициенту трения, запишем $\xi_1(y)$ в форме

$$\xi_1(y) = \xi(1 + \lambda f(y)), \quad f(y) = \sum_{s=1}^{\infty} f_s \cos sy$$

где ξ и $f(y)$ аналогичны по смыслу σ и $\varphi(y)$.

Краевые условия задачи заключаются в условиях непроницаемости на стенках канала и следующих асимптотических условиях:

$$\psi_{\pm} \rightarrow \psi_{\pm}(y), \quad x \rightarrow \pm\infty; \quad p_{-} \rightarrow p_0 - \sigma \varepsilon^{-1} x, \quad x \rightarrow -\infty$$

Уравнениям задачи и данным краевым условиям в первом приближении по λ удовлетворяют соотношения

$$\varepsilon_{-} \psi_{-} = y - \lambda \Sigma s^{-1} (w_s^{-} + c_s^{-} e^{sx}) \sin sy$$

$$\psi_{+} = y - \lambda \Sigma s^{-1} (w_s^{+} - c_s^{+} e^{-sx}) \sin sy$$

$$\varepsilon_{-} u_{-} = 1 - \lambda w_{-}(y) - \lambda \Sigma c_s^{-} e^{sx} \cos sy, \quad u_{+} = 1 - \lambda w_{+}(y) + \lambda \Sigma c_s^{+} e^{-sx} \cos sy$$

$$\varepsilon_{-} v_{-} = \lambda \Sigma c_s^{-} e^{sx} \sin sy, \quad v_{+} = \lambda \Sigma c_s^{+} e^{-sx} \sin sy$$

$$(13) \quad p_{-} = p_0 - \sigma \varepsilon^{-1} x + \lambda \varepsilon^{-1} \Sigma (\varepsilon^{-1} + \sigma s^{-1}) c_s^{-} e^{sx} \cos sy$$

$$p_{+} = p_0 - 1/2 \xi + 1/2 (\varepsilon^{-2} - 1) - \lambda \Sigma c_s^{+} e^{-sx} \cos sy$$

$$(14) \quad w_{-}(y) = \varphi(y) = \Sigma w_s^{-} \cos sy, \quad w_{+}(y) = \Sigma w_s^{+} \cos sy$$

Здесь $w_{\pm}(y)$ — функции, характеризующие асимптотику течения.

Подставим (13), (14) в условия сопряжения (8). Приняв во внимание формулы (10) и положив в них $\xi_2 = 0$, найдем выражения неопределенных констант

$$(15) \quad w_s^{-} = \varphi_s, \quad w_s^{+} = w_s^{-} + (1 + n \varepsilon_{-}) c_s^{+}$$

$$c_s^{-} = n \varepsilon_{-} c_s^{+}, \quad c_s^{+} = \frac{(\varepsilon_{-}^{-2} - 1) \varphi_s + 1/2 \xi (f_s - \varphi_s)}{1 + n (\sigma s^{-1} + 1/2 \xi \varepsilon_{-} + \varepsilon_{-})}$$

Интересно отметить, что в полученном решении асимптотические профили скорости, вообще говоря, не подобны один другому. Их удобно характеризовать относительным изменением коэффициентов w_s^{\pm} .

Обозначив

$$\xi_s = (w_s^{+} - w_s^{-}) / w_s^{-}, \quad \eta_s = (f_s - \varphi_s) / \varphi_s$$

где η_s определяют сравнительную неравномерность сопротивлений среды и решетки, из (15) получим

$$\xi_s = \frac{(\varepsilon_{-}^{-2} - 1 + 1/2 \xi \eta_s) (1 + n \varepsilon_{-})}{[1 + n (\sigma s^{-1} + 1/2 \xi \varepsilon_{-} + \varepsilon_{-})]}$$

Приведенные выше формулы содержат в качестве предельного случая ($\sigma \rightarrow 0$, $\varepsilon_{-} \rightarrow 1$) решение задачи о потоке сквозь неоднородную решетку. Если набегающий поток асимптотически-однороден, соответствующие

Формулы имеют вид

$$\begin{aligned} \psi_- &= y - \lambda c_- \Sigma s^{-1} f_s e^{sx} \sin sy, & \psi_+ &= y + \lambda \Sigma s^{-1} f_s (k_1 + c_+ e^{-sx}) \sin sy \\ u_- &= 1 - \lambda c_- \Sigma f_s e^{sx} \cos sy, & u_+ &= 1 + \lambda k_1 f(y) + \lambda c_+ \Sigma f_s e^{-sx} \cos sy \\ v_- &= \lambda c_- \Sigma f_s e^{sx} \sin sy, & v_+ &= \lambda c_+ \Sigma f_s e^{-sx} \sin sy \\ p_- &= p_0 + \lambda c_- \Sigma f_s e^{sx} \cos sy, & p_+ &= p_0 - \frac{1}{2} \xi - \lambda c_+ \Sigma f_s e^{-sx} \cos sy \\ k_1 &= -(1+n) \xi / [2+n(2+\xi)] \end{aligned}$$

Здесь величины c_{\pm} совпадают с введенными ранее (см. формулы (12)).

Таким образом, при отсутствии пористой среды профиль возмущения скорости на большом расстоянии за решеткой оказывается в рассматриваемом приближении подобным «профилю» $f(y)$ коэффициента сопротивления решетки с коэффициентом подобия k_1 . Нетрудно видеть, что $|k_1| < 2$.

В случае непреломляющей решетки ($\gamma=0$, $n=1$) $k_1 = -2\xi / (4+\xi)$.

Решение этой задачи дает представление о том, как нужно «профилировать» сопротивление решетки, чтобы создать требуемый по конструктивным соображениям профиль скорости, и, наоборот, позволяет судить о степени неоднородности решетки по измеренному за ней профилю скорости.

Поступила 8 II 1977

ЛИТЕРАТУРА

1. *Идельчик И. Е.* Аэродинамика промышленных аппаратов. М.—Л., «Энергия», 1964.
2. *Мясников В. П., Котелкин В. Д.* Гидродинамическая модель химического реактора с неподвижным слоем катализатора. В сб. «Аэромеханика (К 60-летию академика В. В. Струминского)». М., «Наука», 1976.