МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 4 • 1978

УДК 532.529.5

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ДВУХФАЗНОГО ТЕЧЕНИЯ КУЭТТА

И. М. ЖЕЛЕВА, В. П. СТУЛОВ

(София, Москва)

Рассматривается плоское и цилиндрическое течение Куэтта для двухфазной среды. Движение среды описывается уравнениями, полученными в [1]. Столкновениями между частицами пренебрегается, а их движение кроме сил инерции определяется градиентом давления несущей фазы и силами вязкого взаимодействия между несущей фазой и частицами. Получены простые асимптотические решения указанных задач при малых и больших значениях безразмерных определяющих параметров. В ряде случаев решение имеет характер пограничного слоя на твердых стенках.

В качестве несущей фазы рассмотрим вязкую несжимаемую жидкость [1], внешними силами и теплообменом будем пренебрегать

$$
\begin{gathered}
\frac{\partial\rho}{\partial t}+\operatorname{div}\rho\mathbf{V}=0,\qquad \frac{\partial\rho_s}{\partial t}+\operatorname{div}\rho_s\mathbf{V}_s=0\\
\frac{\partial\mathbf{V}}{\partial t}+(\mathbf{V}\cdot\nabla)\cdot\mathbf{V}+\frac{1}{\rho^\circ}\nabla p+\frac{\rho_s}{\rho}\mathbf{f}=\frac{1}{\rho}\operatorname{div}\sigma\\
\frac{\partial\mathbf{V}_s}{\partial t}+(\mathbf{V}_s\cdot\nabla)\mathbf{V}_s+\frac{1}{\rho_s^\circ}\nabla p-\mathbf{f}=0,\qquad \rho^\circ=\mathrm{const}\\
\frac{\rho_s}{\rho_s^\circ}+\frac{\rho}{\rho^\circ}=1,\qquad \mathbf{f}=4.5\frac{\mu}{a^2\rho_s^\circ}(\mathbf{V}-\mathbf{V}_s)
\end{gathered}
\tag{0.1}
$$

Компоненты тензора σ вычисляются по обычным формулам Навье – Стокса. Здесь ρ°, ρ_s° – физические плотности несущей фазы и частиц соответственно, a – радиус частицы, индекс s относится к частицам, прочие обозначения общепринятые.

Согласно [1] невязкая составляющая силы воздействия жидкости на частицы вычисляется в предположении, что относительным движением можно пренебречь. Очевидно, учет присоединенной массы шара в четвертом уравнении (0.1) не изменит существенно его структуры, однако приведет к усложнению коэффициентов, так что некоторые из полученных ниже решений могут оказаться не столь простыми.

1. Плоское течение Куэтта. Рассмотрим течение двухфазной среды между параллельными пластинами; верхняя пластина движется со скоростью U. С нижней пластины происходит вдув частиц с заданной скоростью, а через верхнюю – частицы отсасываются. Такая задача с учетом теплообмена решена в [2] в пренебрежении объемом частиц. Для закона взаимодействия Стокса получено решение через бесселевы функции; для закона более общего вида получено численное решение. В работе [3] получено численное решение аналогичной задачи с учетом теплообмена.

Введем систему координат с началом на покоящейся стенке, осью x вдоль нее и осью y по нормали. Перейдем к безразмерным переменным, выбрав в качестве масштабов следующие величины: для продольных компонент скорости u, u_s—U, для v_s—v_{s0}, для ρ, ρ_s—$\rho_{s0}=Q/v_{s0}$, для p—$\rho_{s0}v_{s0}^2$, для x, y—h. Здесь Q – удельный расход частиц на поверхности вдува, v_{s0} – скорость вдуваемых частиц, h – ширина канала. Для безразмерных величин сохраним те же обозначения. Тогда для класса решений, зависящих только от поперечной координаты, получим уравнения со следующими граничными условиями:

$$\rho_s v_s=1,\quad v=0,\quad v_s v_s'+\beta p'+(\gamma/\mathrm{Re})v_s=0$$

$$p'-\frac{\gamma}{\alpha\,\mathrm{Re}}\frac{\rho_s}{\rho}v_s=0,\quad v_s u_s'-\frac{\gamma}{\mathrm{Re}}(u-u_s)=0$$

(1.1)

$$\gamma\rho_s(u-u_s)-u''=0,\quad \alpha\rho+\beta\rho_s=1$$

$$\gamma=4.5\frac{h^2}{a^2}\frac{\rho_{s0}}{\rho_s^\circ},\quad \mathrm{Re}=\frac{Qh}{\mu},\quad \alpha=\frac{\rho_{s0}}{\rho^\circ},\quad \beta=\frac{\rho_{s0}}{\rho_s^\circ}$$

$$u=0,\quad u_s=u_{s0},\quad v_s=1\quad (y=0),\quad u=1\quad (y=1)$$

Пусть в объеме порядка h^3 содержится n частиц. Тогда $\beta=na^3/h^3$, т. е. β имеет смысл отношения объемов частиц и среды. Пренебрежение объемом частиц соответствует условию $\beta\to0$. Число γ ограничено: так как $\beta_{\max}=1$, то $\gamma\leqslant4.5h^2/a^2$.

Исключая давление из третьего и четвертого уравнений (1.1), убедимся, что поперечное движение частиц определяется независимо от продольного. Получим

$$\frac{\gamma}{\mathrm{Re}}y=\beta\ln v_s+1-v_s,\quad \rho_s=\frac{1}{v_s},\quad p+v_s=p_0 \tag{1.2}$$

В качестве решения выбирается та ветвь двузначной кривой $v_s(y)$ (1.2), которая проходит через точку $y=0$, $v_s=1$. Из вида функции $v_s(y)$ получаем условие реализации стационарного решения

$$\mathrm{Re}\geqslant\frac{\gamma}{1-\beta(1-\ln\beta)} \tag{1.3}$$

Скорость вдува должна быть достаточно большой, чтобы частицы достигли противоположной стенки.

Уравнение и граничные условия для продольного движения принимают вид

(1.4)

$$\mathrm{Re}\,u_s'=\gamma\rho_s(u-u_s),\quad u''=\gamma\rho_s(u-u_s)$$

$$u=0,\quad u_s=u_{s0}\quad (y=0),\quad u=1\quad (y=1)$$

Рассмотрим некоторые предельные случаи. Отметим, что при $\beta\to0$ получаем решение работы [2] для закона Стокса; для v_s получаем линейную функцию $v_s=1-(\gamma/\mathrm{Re})y$.

Случай сильного взаимодействия между жидкостью и частицами в продольном направлении. Иначе говоря, рассмотрим гипотетическую среду, в которой вязкое сопротивление движению частицы вдоль канала во много раз больше вязкого сопротивления движению частицы поперек канала. В (1.4) заменим γ на γ° и положим $\gamma^\circ\to\infty$. Очевидно, в (1.2) нельзя положить $\gamma\to\infty$ из-за условия (1.3). Пусть $\varepsilon=1/\gamma^\circ$. Система (1.4) принимает вид уравнений с малым параметром при старшей производной. Используем метод пограничного слоя [4]. Гладкая часть решения получается при $\varepsilon=0$

$$u_e=u_{se}=\frac{1-\exp(\mathrm{Re}\,y)}{1-\exp(\mathrm{Re})}$$

Возникает невязка в граничном условии для u_s при $y=0$. Полное нулевое приближение (с точностью до членов $\sim\varepsilon$) имеет вид

$$u=u_e(y)+\varepsilon\,\mathrm{Re}^2\,u_{s0}[1-\exp(-y/\varepsilon\,\mathrm{Re})]$$
$$u_s=u_e(y)+u_{s0}\exp(-y/\varepsilon\,\mathrm{Re})$$

На поверхности вдува частиц образуется тонкий ($\delta\sim\varepsilon\,\mathrm{Re}$) пограничный слой для продольной скорости частиц.

Пусть $\mathrm{Re}\to\infty$. Тогда траектории частиц прямолинейны ($u_s=u_{s0}$, $v_s=1$). Профиль скорости жидкости описывается формулой

$$u=u_{s0}+\frac{(1-u_{s0}+u_{s0}e^{-\sqrt{\gamma}})e^{\sqrt{\gamma}y}-(1-u_{s0}+u_{s0}e^{\sqrt{\gamma}})e^{-\sqrt{\gamma}y}}{e^{\sqrt{\gamma}}-e^{-\sqrt{\gamma}}}$$

За счет очень большого расхода частиц при вдуве происходит значительное искажение профиля скорости жидкости.

Пусть $\gamma\to 0$. В этом случае движение жидкости и частиц происходит раздельно: $u=y$, $u_s=u_{s0}$, $v_s=1$.

Пусть $\gamma\to 0$, $\mathrm{Re}\to 0$ *так, что* $\gamma/\mathrm{Re}=\mathrm{const}$. Из второго уравнения (1.4) получаем $u=y$. Профиль продольной скорости частиц описывается интегралом

$$u_s=u_{s0}e^{-(w_s+\beta)}\int\limits_{-\beta}^{w_s}e^{\xi-w_s}y(\xi)\,d\xi$$

Здесь функция $y(\xi)$ задается параметрически

$$y=\frac{\mathrm{Re}}{\gamma}(\beta\ln v_s+1-v_s),\qquad \xi=w_s=-\left(\ln v_s+\frac{\beta}{v_s}\right)$$

В данном случае движение частиц не влияет на движение жидкости, так как частиц мало и скорость их вдува умеренна. Однако из-за большой вязкости траектория частиц имеет сложный вид.

Пусть $\gamma\to\infty$, $\mathrm{Re}\to\infty$ *так, что* $\gamma/\mathrm{Re}=\mathrm{const}$. Обозначим $\varepsilon=1/\gamma$. Второе уравнение (1.4) имеет малый параметр при старшей производной. Гладкое решение сводится к постоянной величине $u_e=u_{se}=u_{s0}$. Невязка для профиля скорости u возникает на верхней и нижней стенках. Решение в нулевом приближении имеет вид

$$u=u_{s0}-u_{s0}\exp\left(-\frac{y}{\sqrt{\varepsilon}}\right)+(1-u_{s0})\exp\left(-\sqrt{\rho_{s1}}\frac{1-y}{\sqrt{\varepsilon}}\right)$$

$$u_s=u_{s0}+\sqrt{\varepsilon}\frac{\gamma}{\mathrm{Re}}\left[u_{s0}\left(\exp\left(-\frac{y}{\sqrt{\varepsilon}}\right)-1\right)+\right.\tag{1.5}$$

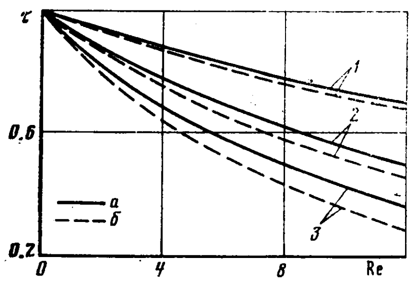
$$\left.+\sqrt{\rho_{s1}}(1-u_{s0})\left(C+\exp\left(-\sqrt{\rho_{s1}}\frac{1-y}{\sqrt{\varepsilon}}\right)\right)\right]$$

Здесь ρ_{s1} определяется из (1.2) при $y=1$. Для определения константы C нет граничных условий. Легко убедиться, что в нулевом приближении C не влияет на решение, так как входит в него с малым коэффициентом $\sqrt{\varepsilon}$, а при дифференцировании выпадает. Ее можно задать, например, из условия, что невязка в граничном условии на u_s при $y=0$ экспоненциально мала. Тогда $C=0$. В данных условиях имеет место релаксация движения газа и частиц, отмеченная также в [2].

Полученные выше приближенные решения можно использовать для определения некоторых важных характеристик течения, например напряжения трения на пластине. Как и следовало ожидать, приближенные решения дают неплохие результаты и при значениях определяющих параметров, отличающихся от предельных. Выражение для градиента скорости жидкости на нижней пластине при $\mathrm{Re}\to\infty$ имеет вид

$$\tau=\left.\frac{du}{dy}\right|_{y=0}=1+\frac{\sqrt{\gamma}-\mathrm{sh}\sqrt{\gamma}}{\mathrm{sh}\sqrt{\gamma}}+u_{s0}\frac{\mathrm{ch}\sqrt{\gamma}-\sqrt{\gamma}}{\mathrm{sh}\sqrt{\gamma}} \tag{1.6}$$

Сравнение формулы (1.6) с результатами [2] приведено на фигуре для $u_{s0}=0$. Линии *а* показывают результаты (1.6), линии *б* — данные работы [2]. Кривые *1—3* получены для значений параметра $\lambda=\gamma/\mathrm{Re}=0{,}2$, 0.4, 0.6 соответственно. Кроме того, формула (1.6) подтверждает вывод [2] относительно зависимости трения на стенке от u_{s0}: при больших положительных значениях u_{s0} трение увеличивается, а при близких к нулю или отрицательных — уменьшается.



2. Течение Куэтта между коаксиальными вращающимися цилиндрами. Пусть через стенки внутреннего цилиндра радиуса R_0 производится вдув частиц в канал между цилиндрами, заполненный вязкой жидкостью. Цилиндры вращаются с различными угловыми скоростями Ω_0 и Ω_1. Перейдем к безразмерным переменным, выбрав в качестве масштабов следующие величины: для продольных (вдоль канала) компонент скоростей u, u_s—U (например, $U=(\Omega_0R_0+\Omega_1R_1)/2$), для v_s—V (некоторое характерное значение поперечной скорости) для ρ, ρ_s—ρ_{s0} (например, $\rho_{s0}=Q/2\pi hV$, здесь ρ_{s0} не совпадает с плотностью среды частиц на поверхности вдува), для p—$\rho_{s0}V^2$, для r—h (например, $h=R_1-R_0$). Здесь Q — удельный расход частиц на поверхности вдува. Для безразмерных величин сохраним те же обозначения. Будем искать решение плоской задачи, зависящее только от радиальной координаты. Уравнения (0.1) и граничные условия принимают вид

$$\rho_s v_s r=1,\qquad v=0,\qquad W\frac{u^2}{r}=\alpha p'-\frac{\gamma}{\mathrm{Re}}\frac{\rho_s}{\rho}v_s$$

$$u''+\frac{1}{r}u'-\frac{1}{r^2}u=\gamma\rho_s(u-u_s),\qquad v_sv_s'-W\frac{u_s^2}{r}=-\beta p'-\frac{\gamma}{\mathrm{Re}}v_s$$

$$v_su_s'+\frac{u_sv_s}{r}=\frac{\gamma}{\mathrm{Re}}(u-u_s),\qquad \alpha\rho+\beta\rho_s=1 \tag{2.1}$$

$$u=u_0=\frac{\Omega_0R_0}{U},\quad u_s=u_{s0}=\frac{U_s+\Omega_0R_0}{U},\quad v_s=v_{s0}=\frac{V_s}{V}\quad\left(r=r_0=\frac{R_0}{h}\right)$$

$$u=u_1=\frac{\Omega_1R_1}{U}\quad\left(r=r_1=\frac{R_1}{h}\right),\quad \mathrm{Re}=\frac{Q}{2\pi\mu},\quad W=\frac{U^2}{V^2}$$

Здесь U_s, V_s — размерные значения компонент скорости вдува частиц относительно цилиндра. Исключая из (2.1) давление и плотности ρ, ρ_s, получим

$$v_s v_s' + \frac{W}{r}\left(\frac{\beta}{\alpha}u^2 - u_s^2\right) + \frac{\gamma}{\mathrm{Re}}\frac{u_s^2 r}{u_s r - \beta} = 0 \tag{2.2}$$

$$v_s u_s' + \frac{u_s v_s}{r} = \frac{\gamma}{\mathrm{Re}}(u - u_s), \quad u'' + \frac{1}{r}u' - \frac{1}{r^2}u = \frac{\gamma}{r v_s}(u - u_s)$$

В системе (2.2) связь между поперечным движением частиц и продольным движением смеси осуществляется главным образом через действие центробежных сил, относительная величина которых характеризуется параметром W. Рассмотрим несколько предельных случаев.

Пусть $\mathrm{Re}\to\infty$. Из второго уравнения (2.2) получаем $u_s = u_{s0} r_0/r$. Профиль поперечной скорости можно найти при $\beta=0$

$$v_s^2 = v_{s0}^2 + W u_{s0}^2 (1 - r_0^2/r^2) \tag{2.3}$$

В данном случае поперечное движение частиц определяется вдувом и центробежной силой. Для определения u получаем уравнение второго порядка с переменными коэффициентами. Из (2.3) видно, что решение с поперечным движением существует и при нулевой скорости вдува $v_{s0}=0$. Правда, в этом случае из уравнения неразрывности следует $\rho_s\to\infty$ при $r=r_0$. Кроме того, упомянутое выше уравнение для u имеет особую точку. Вместе с тем такое течение можно рассматривать как предельное при малых скоростях вдува.

Пусть $\gamma\to 0$. Продольные скорости описываются простыми соотношениями $u_s = u_{s0} r_0/r$, $u = C_1 r + C_2/r$. Для v_s имеем уравнение

$$v_s v_s' + \frac{W}{r}\left(\frac{\beta}{\alpha}u^2 - u_s^2\right) = 0 \tag{2.4}$$

Подставляя u_s и u, легко найти его решение. Отметим, что выражение в скобках в (2.4) содержит знакопостоянные функции с разными знаками, т. е. профиль v_s определяется двумя центробежными силами, действующими в противоположных направлениях. Очевидно, если центробежная сила жидкости (интеграл от $\beta u^2/\alpha$) превышает центробежную силу частиц, стационарное решение отсутствует.

Пусть $\gamma\to 0$, $\mathrm{Re}\to 0$ *так, что* $\gamma/\mathrm{Re}=\mathrm{const}$. Имеем $u = C_1 r + C_2/r$. Траектории частиц находятся в конечном виде при $W=0$, $\alpha=0$. Получим

$$v_s = v_{s0} + (\gamma/\mathrm{Re})(r_0 - r)$$

$$u_s = \frac{r_0}{r}\left[1 + \frac{\gamma}{\mathrm{Re}}(r_0 - r)\right]\left[u_{s0} + \frac{\gamma}{r_0}\int_{r_0}^{r}\frac{(C_1\xi^2 + C_2)\,d\xi}{(1 + (\gamma/\mathrm{Re})(r_0 - \xi))^2}\right]$$

В данном случае скорость поперечного движения частиц уменьшается за счет действия силы Стокса.

Пусть $\gamma\to\infty$, $\mathrm{Re}\to\infty$ *так, что* $\gamma/\mathrm{Re}=\mathrm{const}$. Обозначим $\varepsilon = 1/\gamma$. Как и в плоском течении, здесь происходит вырождение уравнения для продольной компоненты скорости жидкости. Применяем метод пограничного слоя. Гладкое решение описывается уравнениями

$$u_e = u_{se} = \frac{u_{s0} r_0}{r}, \quad v_{se} v_{se}' + \frac{W}{r}\left(\frac{\beta}{\alpha} - 1\right)\frac{u_{s0}^2 r_0^2}{r^2} + \frac{\gamma}{\mathrm{Re}}\frac{v_{se}^2 r}{v_{se} r - \beta} = 0$$

Возникает невязка в граничных условиях для u при $r=r_0$ и $r=r_1$. Интегрируя уравнения для погранслойных поправок, получим полное нулевое приближение в следующем виде:

$$u=u_e(r)+D_0\exp(-a_0)+D_1\exp(-a_1)$$

$$u_s=u_e(r)+\sqrt{\varepsilon}D_0b_0[1-\exp(-a_0)]+\sqrt{\varepsilon}D_1b_1[C_1-\exp(-a_1)]$$

$$v_s=v_{se}(r)+\sqrt{\varepsilon}d_0[2u_{e0}D_0(\exp(-a_0)-1)+0.5D_0^2(\exp(-2a_0)-1)]-$$
$$-\sqrt{\varepsilon}d_1[2u_{e1}D_1(\exp(-a_1)-C_1)+0.5D_1^2(\exp(-2a_1)-C_1)]$$

$$u_{ei}=u_e(r_i),\quad v_{sei}=v_{se}(r_i),\quad D_i=(\Omega_iR_i/U)-u_{ei}$$

$$a_i=\frac{(-1)^{i+1}(r_i-r)}{\sqrt{\varepsilon r_i v_{sei}}}\quad b_i=\frac{\gamma}{\mathrm{Re}}\sqrt{\frac{r_i}{v_{sei}}}\quad d_i=\frac{W}{\sqrt{r_i v_{sei}}}\frac{\beta}{\alpha}\quad i=0,1$$

Относительно константы C_1 справедливо замечание, сделанное после формул (1.5).

Пусть $\mathrm{Re}\to 0$, $W\to\infty$ *так, что* $\mathrm{Re}\,W=\mathrm{const}$. Обозначим $\mathrm{Re}=\varepsilon$. Первое и второе уравнения (2.2) имеют малый параметр при старшей производной. Гладкое решение описывается уравнениями

$$u_e=u_{se}=C_1r+C_2/r,\quad W\,\mathrm{Re}\left(\frac{\beta}{\alpha}-1\right)u_e^2+\gamma\frac{v_{se}^2r^2}{v_{se}r-\beta}=0$$

Константы C_1 и C_2 определяются с помощью граничных условий для u. При $\beta\neq 0$ уравнение для v_{se} имеет два действительных корня, причем меньший корень $\sim\beta$. В качестве единственного решения выберем больший корень, который при малых β близок к выражению $v_{se}=(W\,\mathrm{Re}/\gamma r)u_e^2$.

Возникает невязка в граничных условиях для v_s и u_s при $r=r_0$. Полное нулевое приближение нужно искать в следующем виде:

$$u_s=u_e(r)+u_s^*(\eta),\quad v_s=v_{se}(r)+v_s^*(\eta)$$
$$\text{(2.5)}$$
$$u=u_e(r)+\varepsilon^2u^*(\eta),\quad \eta=(r-r_0)/\varepsilon$$

Обычным путем получаются нелинейные уравнения для погранслойных поправок. Эти уравнения однородны по функциям со звездочками и их производным, поэтому можно ожидать, что существует решение, обладающее свойством локальности. В одном частном случае можно найти решение в явном виде. Положим $\beta=0$ и $u_{s0}=0$, т. е. рассматриваем нормальный вдув относительно внутреннего цилиндра. Тогда невязка в граничном условии для u_s обращается в нуль. Полное нулевое приближение нужно искать в следующем виде:

$$u_s=u_e,\quad v_s=v_{se}(r)+v_s^*,\quad u=u_e$$

Для определения v_s^* получаем следующую задачу:

$$(v_{se0}+v_s^*)v_s^{*\prime}+\gamma v_s^*=0,\quad v_s^*=v_{s0}-v_{se0},\quad (\eta=0)$$

Решение этой задачи

$$v_{se0}\ln(v_s^*/y_1)+v_s^*-y_1=-\gamma\eta,\quad y_1=v_{s0}-v_{se0}$$

обладает свойствами функции типа пограничного слоя. В частном случае $v_{s0}=0$ (принудительный вдув частиц отсутствует) имеем $d\eta/dv_s^*=0$. При этом частицы с поверхности внутреннего цилиндра вовлекаются в поток за счет действия центробежных сил. Из-за условия $\beta=0$ центробежные силы жидкости отсутствуют.

Пусть $\gamma\to\infty$, $W\to\infty$ *так, что* $\gamma/W=\text{const}$. Обозначим $\varepsilon=1/\gamma$. Теперь все исходные уравнения (2.2) имеют малый параметр при старшей производной. Гладкое решение описывается уравнениями

$$u_e=u_{se}=C_1r^{1+\mathrm{Re}}+\frac{C_2}{r},\qquad \frac{W\,\mathrm{Re}}{\gamma}\left(\frac{\beta}{\alpha}-1\right)u_e^2+\frac{v_{se}^2r^2}{v_{se}r-\beta}=0$$

Константы C_1 и C_2 находятся из граничных условий для u при $r=r_0$ и $r=r_1$. Полное нулевое приближение имеет следующую структуру:

$$u_s=u_e(r)+u_s^*(\eta),\qquad v_s=v_{se}(r)+v_s^*(\eta)$$

$$u=u_e(r)+\varepsilon u^*(\eta),\qquad \eta=(r-r_0)/\varepsilon$$

В отличие от предыдущего случая здесь поправка для u порядка ε (ср. с формулами (2.5)). В целом решение для данного случая аналогично предыдущему. Как и ранее, решение в явном виде находится при $\beta=0$ и $u_{s0}=0$.

Поступила 3 X 1977

ЛИТЕРАТУРА

1. *Крайко А. Н., Стернин Л. Е.* К теории течений двухскоростной сплошной среды с твердыми или жидкими частицами. ПММ, 1965, т. 29, вып. 3.
2. *Quan V.* Couette flow with particle injection. Int. J. Heat. and Mass Transfer, 1972, vol. 15, No 11.
3. *Васильков А. П., Мурзинов И. Н.* Двухфазное течение Куэтта. Изв. АН СССР, МЖГ, 1976, № 3.
4. *Вишик М. И., Люстерник Л. А.* Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром. Усп. матем. н., 1957, т. 12, вып. 5.