

ФОРМИРОВАНИЕ СЛЕДА ПРИ СХОДЕ УДАРНОЙ ВОЛНЫ
С КРОМКИ ПЛАСТИНЫ

Ю. А. ДЕМЬЯНОВ, А. Н. ПОКРОВСКИЙ, Л. Г. ФРОЛОВ

(Москва)

В работе исследовано формирование ламинарного следа в потоке за ударной волной при сходе последней с задней кромки полубесконечной пластины. Показано, что течение на пластине и в следе оказывается автомодельным, зависящим от двух безразмерных комбинаций переменных, причем течение на пластине, включая заднюю кромку, остается установившимся в системе координат, связанной с ударной волной (факт автомодельности течения в следе впервые отмечен в [1]). Получено аналитическое решение задачи о следе в окрестности задней кромки, из которого следует, что в области течения в отличие от [2] нет линии сингулярности уравнений нестационарного пограничного слоя. Этот факт подтверждается также анализом течения в окрестности линии отмеченных частиц, одновременно с ударной волной покинувших заднюю кромку. Поэтому рассматриваемая задача решена традиционными численными методами с использованием условий в начальном сечении (за которое принимается сечение в окрестности задней кромки), на оси следа и на бесконечном удалении от нее. Получены аппроксимационные формулы для профилей продольных скоростей во всем диапазоне интенсивностей ударной волны.

1. Пусть в момент времени $t=0$ с задней кромки полубесконечной пластины $x=0$ сходит распространяющаяся с постоянной скоростью U ударная волна, за которой имеет место однородный и равномерный (со скоростью V_∞) поток вязкого газа. Как известно [3, 4], при $t < 0$ пограничный слой на пластине является установившимся в системе координат, связанной с ударной волной. Предположим, что наличие образующегося следа (как и пограничного слоя на пластине) не приводит к изменению скоростей U и V_∞ . Тогда рассматриваемая задача при $t_1 > 0$ описывается в переменных t_1, x_1, η_1 уравнениями [3]

$$(1.1) \quad \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_1}{\partial \eta_1} = 0$$

$$(1.2) \quad \frac{\partial u_1}{\partial t_1} + u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + v_1 \frac{\partial u_1}{\partial \eta_1} = \frac{\partial}{\partial \eta_1} \left(\mu_1 \rho_1 \frac{\partial u_1}{\partial \eta_1} \right)$$

$$(1.3) \quad \frac{\partial g_1}{\partial t_1} + u_1 \frac{\partial g_1}{\partial x_1} + v_1 \frac{\partial g_1}{\partial \eta_1} = \frac{\partial}{\partial \eta_1} \left(\frac{\mu_1 \rho_1}{Pr} \frac{\partial g_1}{\partial \eta_1} \right) + \left(\frac{1}{Pr} - 1 \right) \frac{\partial}{\partial \eta_1} \left(\mu_1 \rho_1 u_1 \frac{\partial u_1}{\partial \eta_1} \right)$$

$$\eta_1 = \int_0^{\eta_1} \frac{\rho}{\rho_\infty} dy_1$$

с начальными и граничными условиями

$$(1.4) \quad u_1 = u_0(\eta_{11}), \quad g_1 = g_0(\eta_{11}), \quad t_1 = 0, \quad x_1 < 0, \quad \eta_{11} = \frac{\eta_1}{\sqrt{-x_1}},$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{\eta_{11}}{2} \frac{du_0}{d\eta_{11}} + \frac{dv_0}{d\eta_{11}} = 0 \\
 & \frac{d^2 u_0}{d\eta_{11}^2} = v_0 \frac{du_0}{d\eta_{11}} - \frac{\eta_{11}}{2} (U_1 - u_0) \frac{du_0}{d\eta_{11}} \\
 & u_0(0) = v_0(0) = 0, \quad u_0 \rightarrow 1, \quad g_0 \rightarrow 1, \quad \eta_{11} \rightarrow \infty \\
 & u_1 \rightarrow 1, \quad g_1 \rightarrow 1, \quad \eta_1 \rightarrow \infty, \quad -\infty < x_1 \leq U_1 t_1 \\
 (1.5) \quad & u_1 = v_1 = 0, \quad g = g_w = \text{const}, \quad \eta_1 = 0, \quad -\infty < x_1 < 0 \\
 & v_1 = \frac{\partial u_1}{\partial \eta_1} = 0, \quad \frac{\partial g_1}{\partial \eta_1} = 0, \quad \eta_1 = 0, \quad 0 < x_1 < U_1 t_1 \\
 & u_1 \rightarrow 1, \quad g_1 \rightarrow 1, \quad x_1 \rightarrow U_1 t_1 \\
 & u = V_\infty u_1, \quad g = g_\infty g_1, \quad v_1 = V_\infty \left(\frac{\partial \eta_1}{\partial t_1} + u_1 \frac{\partial \eta_1}{\partial x_1} + \rho_1^v \sqrt{\frac{l \rho_\infty}{\mu_\infty V_\infty}} \right) \\
 & \rho = \rho_\infty \rho_1, \quad x = l x_1, \quad t = \frac{l}{V_\infty} t_1, \quad y = \sqrt{\frac{\mu_\infty l}{\rho_\infty V_\infty}} y_1
 \end{aligned}$$

Здесь x, y — прямоугольная система координат, связанная с осью следа (точка $x=y=0$ соответствует задней кромке пластины); u, v — составляющие скорости вдоль осей x и y ; l — характерная длина; ρ — плотность; g — полная энтальпия газа; μ — динамический коэффициент вязкости; Pr — число Прандтля. Индекс ∞ соответствует параметрам в невязком течении за ударной волной, а w соответствует параметрам на пластине. В дальнейшем предполагается, что $\mu \sim \rho^{-1}$, а $\text{Pr} = 1$. Следовательно, имеет место интеграл $g_1 = g_{w1} + (1 - g_{w1}) u_1$. В связи с тем что характерная длина не входит в формулировку задачи, легко распространить на рассматриваемый случай анализ, проведенный в [5], для стационарного пограничного слоя на полубесконечной пластине и получить, что

$$\begin{aligned}
 u_1 &= u_2(\xi, \zeta), \quad v_1 = (U_1 t_1 - x_1)^{-0.5} v_2(\xi, \zeta) \\
 \xi &= (U_1 t_1 - x_1) t_1^{-1}, \quad \zeta = (U_1 t_1 - x_1)^{-0.5} \eta_1
 \end{aligned}$$

При этом система (1.1) — (1.5) примет вид

$$(1.6) \quad \frac{\partial v_2}{\partial \zeta} + \frac{\zeta}{2} \frac{\partial u_2}{\partial \zeta} - \xi \frac{\partial u_2}{\partial \xi} = 0$$

$$(1.7) \quad \xi (U_1 - \xi - u_2) \frac{\partial u_2}{\partial \xi} + \left[v_2 - \frac{\zeta}{2} (U_1 - u_2) \right] \frac{\partial u_2}{\partial \zeta} = \frac{\partial^2 u_2}{\partial \zeta^2}$$

$$(1.8) \quad u_2 = u_0(\zeta), \quad \xi \rightarrow \infty, \quad u_2 \rightarrow 1, \quad \zeta \rightarrow \infty, \quad 0 \leq \xi < \infty$$

$$u_2 = v_2 = 0, \quad \zeta = 0, \quad U_1 \leq \xi < \infty$$

$$v_2 = \frac{\partial u_2}{\partial \zeta} = 0, \quad \zeta = 0, \quad 0 \leq \xi < U_1$$

$$u_2 \rightarrow 1, \quad \xi \rightarrow 0, \quad 0 < \zeta < \infty$$

Вводя функцию $\omega = \partial u_2 / \partial \zeta$ и переменные ξ, u_2 , систему (1.6) — (1.8) приведем к следующей краевой задаче:

$$(1.9) \quad \xi (U_1 - u_2 - \xi) \frac{\partial \omega}{\partial \xi} = \omega^2 \frac{\partial^2 \omega}{\partial u_2^2} + 0.5 (U_1 - u_2) \omega$$

$$(1.10) \quad \omega = \omega_0(u_0), \quad \omega_0 \frac{d^2 \omega_0}{du_2^2} + 0.5(U_1 - u_0) = 0$$

$$\frac{d\omega_0}{du_2} = 0, \quad u_2 = 0, \quad \omega_0 = 0, \quad u_2 = 1, \quad \xi \rightarrow \infty$$

$$(1.11) \quad \omega(1) = 0, \quad 0 \leq \xi < \infty$$

$$(1.12) \quad \frac{d\omega}{du_2} = 0, \quad u_2 = 0, \quad U_1 < \xi < \infty$$

$$(1.13) \quad \omega = 0, \quad 2\xi(U_1 - u_2 - \xi) \frac{\partial u_2}{\partial \xi} = \frac{\partial \omega^2}{\partial u_2^2}, \quad u_2 = u_{2w}, \quad 0 \leq \xi < U_1$$

Полагая $\tau = \xi^{-1}$, уравнение (1.9) преобразуем к виду

$$(1.14) \quad [1 - (U_1 - u_2)\tau] \frac{\partial \omega}{\partial \tau} = \omega^2 \frac{\partial^2 \omega}{\partial u_2^2} + 0.5(U_1 - u_2)\omega$$

из которого видно, что в области τ , где

$$(1.15) \quad 1 - (U_1 - u_2)\tau > 0$$

по начальному условию (1.10) и граничным условиям (1.11), (1.12) может быть найдено единственное решение, и им является $\omega = \omega_0(u_2)$, удовлетворяющее этим условиям. Область изменения переменной ξ , где выполняется условие (1.15), очевидно, простирается от $\xi = U_1$ до бесконечности. Таким образом, приходим к важному результату, что для данной задачи течение на пластине (в том числе профиль продольной скорости u_2 при $x \rightarrow -0$) при всех временах будет установившимся в системе координат, связанной с ударной волной. Заметим, что установленный выше характер функции u_2 на задней кромке пластины в работе [1] постулировался.

2. Нахождение течения в области следа начнем с анализа решения в окрестности особой точки (задней кромки пластины), где испытывает разрыв напряжение трения при $\xi = 0$. Систему (1.1)–(1.5) путем введения функции Ψ $u_1 = \partial \Psi / \partial \xi_1$, $t_1^{1/2} v_1 = -\partial \Psi / \partial \xi_1$ и переменных $\xi_1 = x_1 / t_1$, $\zeta_1 = \eta_1 / \sqrt{t_1}$ приведем к виду

$$(2.1) \quad (\Psi' - \xi_1) \frac{\partial \Psi'}{\partial \xi_1} - \left(\frac{\xi_1}{2} + \frac{\partial \Psi}{\partial \xi_1} \right) \Psi'' = \Psi'''$$

$$\Psi' \rightarrow 1, \quad \zeta_1 \rightarrow \infty, \quad 0 < \xi_1 < U_1$$

$$(2.2) \quad \Psi = \Psi'' = 0, \quad \xi_1 = 0, \quad 0 < \xi_1 < U_1$$

$$\Psi' = u_0(\xi_1), \quad \xi_1 = 0, \quad \Psi' = 1, \quad \xi_1 \rightarrow U_1$$

Здесь и в дальнейшем штрихом обозначено дифференцирование по ξ_1 . В окрестности особой точки $\xi_1 = 0$ можно воспользоваться методом сращиваемых асимптотических разложений, учтя тот факт, что поле продольных скоростей $u_0(\xi_1)$, подвергнувшись лишь сдвигу по координате, сохранится как внешнее разложение при $\xi_1 > 0$; тем самым внутреннее разложение Ψ_B будет удовлетворять уравнению (2.1) и условиям

$$(2.3) \quad \Psi_B = \Psi_B'' = 0, \quad \xi_1 = 0, \quad \xi_1 > 0$$

$$(2.4) \quad \Psi_B' \rightarrow u_0[\zeta_1 - \lambda(\xi_1)], \quad \xi_1 \rightarrow 0$$

где неизвестная функция $\lambda(\xi_1)$ находится в процессе решения задачи. Условия (2.3), (2.4) фактически совпадают с условиями для определения ближнего следа по методу Гольдштейна [6]. Смысл появления функции

$\lambda(\xi_1)$ становится понятен, если рассматриваемую задачу решать в рамках взаимодействия пограничного слоя с внешним потоком, предполагая последний равномерным, текущим вдоль линии $\xi_1=0$. Тогда по аналогии с [7] поверхностью, на которой выполняются условия прилипания, будет не пластина, а некоторая кривая $\xi_1=\xi_{1w}(\xi_1)$, поверхностью же, на которой выполняется условие непротекания и равенства нулю напряжения трения, будет не ось следа, а некоторая кривая $\xi_2=\xi_{2w}(\xi_1)$, и которая поэтому отличается от ξ_{1w} . Легко показать, что условие непрерывного сопряжения поля скоростей при $\xi_1 > 0$ сведется к выполнению следующего асимптотического условия:

$$\Psi_0(\zeta - \xi_{1w}, \xi_1) \rightarrow \Psi_B(\zeta - \xi_{2w}, \xi_1) + \varphi(\xi_1)$$

Здесь функция $\varphi(\xi_1)$ в отличие от стационарного случая, где она тождественно равна нулю, выражается через ξ_{1w} , ξ_{2w} и их производные. Полагая $\zeta - \xi_{2w} = \zeta_3$, где $\zeta_3 = 0$ соответствует оси следа, приходим к условию (2.2) для срачивания продольных скоростей, где $\lambda = \xi_{1w} - \xi_{2w}$. Учитывая, что $u_0 = -d\Psi_0/d\zeta$ и функция $\Psi_0(\zeta)$ является решением задачи

$$\frac{d^3\Psi_0}{d\zeta^3} + \frac{1}{2}(U_1\zeta - \Psi_0)\frac{d^2\Psi_0}{d\zeta^2} = 0$$

$$\Psi_0 = \frac{d\Psi_0}{d\zeta} = 0, \quad \zeta = 0; \quad \frac{d\Psi_0}{d\zeta} \rightarrow 1, \quad \zeta \rightarrow \infty$$

получим при $\zeta = 0$

$$\frac{d^2\Psi_0}{d\zeta^2} \neq 0, \quad \frac{d^3\Psi_0}{d\zeta^3} = 0, \quad \frac{d^4\Psi_0}{d\zeta^4} = -\frac{U_1}{2} \frac{d^2\Psi_0}{d\zeta^2},$$

$$\frac{d^5\Psi_0}{d\zeta^5} = \frac{1}{2} \left[\frac{d^2\Psi_0}{d\zeta^2} \right]^2$$

поэтому

$$(2.5) \quad \frac{d\Psi_0}{d\zeta} \rightarrow \frac{d^2\Psi_0}{d\zeta^2} \Big|_{\zeta=0} (\zeta - \lambda) - \frac{U_1}{12} \frac{d^2\Psi_0}{d\zeta^2} \Big|_{\zeta=0} (\zeta - \lambda)^3 +$$

$$+ \frac{1}{48} \left[\frac{d^2\Psi_0}{d\zeta^2} \Big|_{\zeta=0} \right]^2 (\zeta - \lambda)^4 + \dots$$

Можно показать, так же как и в [6], что

$$\Psi_B = \xi_1^{3/2} [f_1(z) + \xi_1^{1/2} f_2(z) + \xi_1 f_3(z) + \dots]$$

где $z = \xi_1 \xi_1^{-1/2}$, а $f_1(z)$, $f_2(z)$, $f_3(z)$ удовлетворяют полученным соответственно из (2.1) – (2.3) уравнениям и граничным условиям

$$(2.6) \quad \frac{d^3 f_1}{dz^3} + \frac{2}{3} f_1 \frac{d^2 f_1}{dz^2} - \frac{1}{3} \left(\frac{df_1}{dz} \right)^2 = 0$$

$$\frac{d^3 f_2}{dz^3} + \frac{2}{3} f_1 \frac{d^2 f_2}{dz^2} - \frac{4}{3} \frac{df_1}{dz} \frac{df_2}{dz} + \frac{4}{3} \frac{d^2 f_1}{dz^2} f_2 + \frac{1}{3} \frac{df_1}{dz} + \frac{z}{6} \frac{d^2 f_1}{dz^2} = 0$$

$$\frac{d^3 f_3}{dz^3} + \frac{2}{3} f_1 \frac{d^2 f_3}{dz^2} - \frac{5}{3} \frac{df_1}{dz} \frac{df_3}{dz} + \frac{5}{3} \frac{d^2 f_1}{dz^2} f_3 = 0$$

$$f_1 = \frac{d^2 f_1}{dz^2} = f_2 = \frac{d^2 f_2}{dz^2} = f_3 = \frac{d^2 f_3}{dz^2} = 0, \quad z = 0$$

$$(2.7) \quad \frac{d^2 f_1}{dz^2} = \frac{1}{\sqrt{U_1}} \frac{\partial^2 \Psi_0}{\partial \zeta^2} \Big|_{\zeta=0}, \quad \frac{\partial f_2}{dz} \rightarrow -\frac{(z-\lambda_1)^3}{12\sqrt{U_1}} \frac{\partial^2 \Psi_0}{\partial \zeta^2} \Big|_{\zeta=0} +$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{U_1}} \frac{\partial^2 \Psi_0}{\partial \zeta^2} \Big|_{\zeta=0} C_1$$

$$\frac{df_3}{dz} \rightarrow \frac{(z-\lambda_1)^4}{48U_1^2} \left[\frac{\partial^2 \Psi_0}{\partial \zeta^2} \Big|_{\zeta=0} \right]^2 +$$

$$+ \frac{(z-\lambda_1)}{2U_1^{3/2}} \frac{\partial^2 \Psi_0}{\partial \zeta^2} \Big|_{\zeta=0} + \frac{C_1}{\sqrt{U_1}} \frac{\partial^2 \Psi_0}{\partial \zeta^2} \Big|_{\zeta=0}, \quad z \rightarrow \infty$$

Вводя новые функции и переменную

$$K = \frac{1}{\sqrt{U_1}} \frac{\partial^2 \Psi_0}{\partial \zeta^2} \Big|_{\zeta=0}, \quad z_1 = \left(\frac{K}{3} \right)^{1/2} z, \quad F_1 = (9K)^{-1/2} f_1$$

$$F_2 = \left(\frac{K}{3} \right)^{1/2} f_2, \quad F_3 = \frac{2}{3} (9K)^{-1/2} f_3$$

придем к системе уравнений с граничными условиями

$$(2.8) \quad \frac{d^3 F_1}{dz_1^3} + 2F_1 \frac{d^2 F_1}{dz_1^2} - \left(\frac{dF_1}{dz_1} \right)^2 = 0$$

$$\frac{d^3 F_2}{dz_1^3} + 2F_1 \frac{d^2 F_2}{dz_1^2} - 4 \frac{dF_1}{dz_1} \frac{dF_2}{dz_1} + 4 \frac{d^2 F_1}{dz_1^2} F_2 +$$

$$+ \frac{dF_1}{dz_1} + \frac{z_1}{2} \frac{d^2 F_1}{dz_1^2} = 0$$

$$\frac{d^3 F_3}{dz_1^3} + 2F_1 \frac{d^2 F_3}{dz_1^2} - 5 \frac{dF_1}{dz_1} \frac{dF_3}{dz_1} + 5 \frac{d^2 F_1}{dz_1^2} F_3 = 0$$

$$(2.9) \quad F_1 = F_2 = F_3 = \frac{d^2 F_1}{dz_1^2} = \frac{d^2 F_2}{dz_1^2} = \frac{d^2 F_3}{dz_1^2} = 0, \quad z_1 = 0$$

$$\frac{d^2 F_1}{dz_1^2} \rightarrow 1, \quad \frac{d^4 F_2}{dz_1^4} \rightarrow -1.5, \quad \frac{d^5 F_3}{dz_1^5} \rightarrow 1, \quad z_1 \rightarrow \infty$$

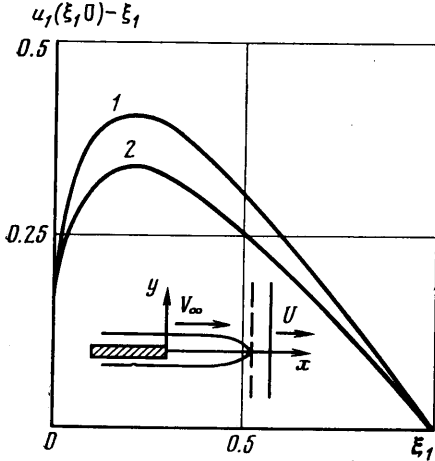
Интегральные кривые системы (2.8) с граничными условиями (2.9) представлены ниже.

z_1	0	0.3	0.6	0.9	1.2	1.5	1.8	2.1	2.4
$\frac{dF_1}{dz_1}$	1.117	1.172	1.327	1.556	1.829	2.120	2.419	2.718	3.018
$\frac{dF_2}{dz_1}$	-0.111	-0.185	-0.412	-0.811	-1.407	-2.232	-3.321		
$\frac{dF_3}{dz_1}$	0.220	0.276	0.442	0.727					

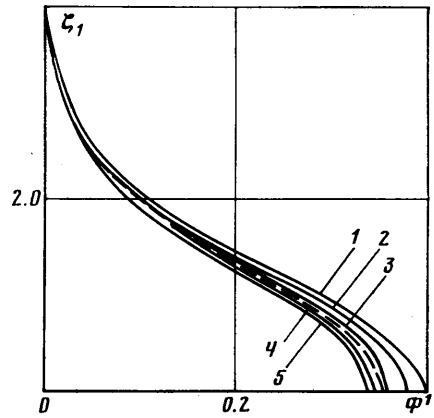
Из выражения для продольной оси скорости на оси следа

$$u_1(0, \xi_1) = a\xi_1^{1/2} + b\xi_1 + c\xi_1^{3/2} + \dots$$

вытекает, что при $\xi_1 > 0$ вся область решения располагается над линией $u_1(0, \xi_1) = \xi_1$. Покажем, что тот же факт имеет место в окрестности линии



Фиг. 1



Фиг. 2

отмеченных частиц $\xi_1=1$, одновременно с ударной волной покинувших заднюю кромку пластины. Как показано в [1], в области $1 \leq \xi_1 \leq U_1$ правее этой линии поток однороден и след еще не образуется. В окрестности линии отмеченных частиц на основании соображений размерности и подобия в [1] найдено решение

$$u_1 = 1 - (1 - \xi_1) \Phi'(\zeta_1)$$

где Φ удовлетворяет следующему уравнению и граничным условиям:

$$(2.10) \quad \Phi''' + (\Phi + 0.5\zeta_1) \Phi'' + (1 - \Phi') \Phi' = 0$$

$$\Phi(0) = \Phi''(0) = 0; \quad \Phi' \rightarrow 0, \quad \zeta_1 \rightarrow \infty$$

Решая краевую задачу (2.10), получим, что $\Phi'(0) = 0.355$. Заметим, что решение задачи (2.10) хорошо аппроксимируется выражением

$$\Phi' = 0.358 \exp[-0.324\zeta_1^2]$$

Ошибка не превышает 1.5% во всем диапазоне изменения ζ_1 . Легко убедиться, что и здесь решение лежит в области $u_1 > \xi_1$.

Таким образом, следует ожидать, что при всех $0 < \xi_1 < 1$ решение лежит в области $u_1 > \xi_1$, поэтому уравнение может быть решено традиционными способами, разработанными для уравнения параболического типа, когда заданы начальные (при некотором ξ_1) и граничные условия.

3. Для решения краевой задачи (2.1), (2.2) применим метод квазилинеаризации [8]. Заменяя частные производные по ξ_1 через их конечно-разностные выражения по двум предыдущим слоям ξ_{n-2} и ξ_{n-1} , получим

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \xi_1} = \frac{3\Psi_n - 4\Psi_{n-1} + \Psi_{n-2}}{2\Delta\xi_1} \quad \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \xi_1 \partial \zeta_1} = \frac{3\Psi_n' - 4\Psi_{n-1}' + \Psi_{n-2}'}{2\Delta\xi_1}$$

Подставляя их в уравнение (2.1) и используя метод квазилинеаризации, найдем

$$\Psi''' + \left[0.5\zeta_1 + {}^{(h)} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial \zeta_1} \right) \right] \Psi'' - {}^{(h)} \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial \xi_1 \partial \zeta_1} \right) \Psi' + \\ + \frac{3}{2\Delta\xi_1} \{ {}^{(h)} \Psi'' \Psi - ({}^{(h)} \Psi' - \xi_1) \Psi' \} =$$

$$= \frac{3}{2\Delta\xi_1} \{ {}^{(h)}\Psi'' {}^{(h)}\Psi - ({}^{(h)}\Psi' - \xi_1) {}^{(h)}\Psi' \} - \xi_1^{(h)} \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial \xi_1 \partial \zeta_1} \right)$$

где ${}^{(h)}\Psi$ — предыдущее приближение функции Ψ .

Граничные и начальные условия при этом не изменяются. Линейная краевая задача решается известным методом, и определяется новое приближение. Если оно совпадает с заданной точностью с предыдущим приближением, то полученное решение принимается за точное, в противном случае итерационный процесс повторяется. В таблице приведены профили скорости u_1 для двух предельных значений: $\alpha = V_\infty/U = 0$ (верхнее число) и $\alpha = 1$ (нижнее число) при различных ξ_1 . Наблюдается большое различие их при малых ξ_1 и сближение при $\xi_1 \rightarrow 1$.

ξ_1	$\xi_1=0$	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0	3.5	4.0
0.07	0.419 0.361	0.512 0.431	0.683 0.571	0.822 0.698	0.911 0.793	0.960 0.860	0.984 0.907	0.994 0.939	0.998 0.961
0.17	0.578 0.508	0.630 0.551	0.747 0.650	0.858 0.755	0.930 0.836	0.970 0.893	0.989 0.930	0.996 0.957	0.999 0.974
0.27	0.673 0.603	0.709 0.634	0.793 0.711	0.880 0.797	0.941 0.866	0.975 0.915	0.990 0.947	0.997 0.969	0.999 0.982
0.37	0.741 0.677	0.768 0.702	0.831 0.762	0.899 0.833	0.949 0.892	0.978 0.934	0.992 0.961	0.997 0.978	0.999 0.989
0.57	0.843 0.799	0.857 0.814	0.892 0.852	0.932 0.897	0.964 0.936	0.984 0.964	0.994 0.981	0.998 0.991	0.999 0.996
0.87	0.956 0.948	0.959 0.953	0.968 0.963	0.979 0.975	0.988 0.986	0.994 0.993	0.997 0.997	0.999 0.999	1.000 1.000

Распределение скорости вдоль оси следа показано на фиг. 1 для $\alpha=0$ и 1 (кривые 1 и 2 соответственно). Все другие промежуточные кривые $u_1(\xi_1, 0)$ для $0 \leq \alpha \leq 1$ хорошо описываются уравнением

$$\bar{u}_1^*(\xi_1, 0) = \varphi(\alpha, \xi_1) = \xi_1^{K(\xi_1^2 - \xi_1) + 0.3333}$$

где $K=0.1333-0.4057\alpha$.

Сравнение u_1^* , рассчитанного по этой формуле, с точным решением u_1 основных уравнений приведено ниже ($\alpha=0.3828$).

ξ_1	0.12	0.22	0.32	0.52	0.82
$u_1(\xi_1, 0)$	0.489	0.608	0.689	0.806	0.935
$u_1^*(\xi_1, 0)$	0.500	0.600	0.680	0.801	0.935

Зная $\varphi(\alpha, \xi_1)$ и эпюры скоростей при $\alpha=0$ и 1 в некотором сечении ξ_1 , можно определить распределение скоростей при произвольном α по следующей аппроксимационной формуле:

$$\begin{aligned} \bar{u}_1^*(\xi_1, \zeta_1) = & \varphi(\alpha, \xi_1) + [1 - \varphi(\alpha, \xi_1)] \times \\ & \times \left\{ \frac{\alpha [\Psi'(1, \zeta_1, \xi_1) - \varphi(1, \xi_1)]}{1 - \varphi(1, \xi_1)} + \right. \\ & \left. + \frac{(1 - \alpha) [\Psi'(0, \zeta_1, \xi_1) - \varphi(0, \xi_1)]}{1 - \varphi(0, \xi_1)} \right\} \end{aligned}$$

Сравнение эпюры скоростей u_1^* , рассчитанной по аппроксимационной формуле, с точным расчетом профиля u_1 при $\alpha=0.3828$ и $\xi_1=0.22$ приведено ниже.

ξ_1	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	1.2	1.4	1.6
u_1	0.608	0.615	0.635	0.665	0.704	0.745	0.787	0.826	0.861
u_1^*	0.602	0.609	0.629	0.659	0.697	0.739	0.780	0.818	0.852
ζ_1	1.8	2.0	2.2	2.4	2.6	2.8	3.0	3.2	3.4
u_1	0.891	0.915	0.935	0.951	0.964	0.973	0.981	0.986	0.990
u_1^*	0.882	0.906	0.926	0.942	0.954	0.964	0.972	0.978	0.983

Характер поведения решения при $\xi_1 \rightarrow 1$ показан на фиг. 2, где пунктиром изображено решение задачи (2.10). Результаты расчетов профилей скорости u_1 из уравнения (2.1) с условиями (2.2) обработаны в виде функции $\Phi' = (1-u_1)/(1-\xi_1)$ и представлены там же сплошными линиями. Кривые 1-3 соответствуют $\alpha=1$ и $\xi_1=0.87, 0.92, 0.97$, а кривые 4, 5 - $\alpha=0$ и значениям $\xi_1=0.87, 0.97$. Видно, что автомодельное решение Φ' (пунктир) является пределом, к которому стремится решение уравнения (2.1) при $\xi_1 \rightarrow 1$ для любого α .

Поступила 22 III 1977

ЛИТЕРАТУРА

1. Демьянов Ю. А., Киреев В. Т. О формировании стационарного смещения в аэродинамическом следе. Изв. АН СССР, МЖГ, 1967, № 3.
2. Демьянов Ю. А., Феоктистов В. В. Численное решение задачи формирования пограничного слоя на пластине за движущейся ударной волной. Изв. АН СССР, МЖГ, 1976, № 1.
3. Демьянов Ю. А. Формирование пограничного слоя на пластине с движущимся скачком уплотнения. ПММ, 1957, т. 21, вып. 3.
4. Mirels H. Boundary layer behind shock or thin expansion wave moving into stationary fluid. Nat. Advis. Comm. Aeronaut. Techn. Notes, 1956, No. 3712.
5. Седов Л. И. Методы подобия и размерности в механике. М., Гостехиздат, 1954.
6. Goldstein S. Concerning some solutions of the boundary layer equations in hydrodynamics. Proc. Cambr. Philos. Soc., 1930, vol. 26, pt. 1.
7. Демьянов Ю. А. Об одном способе построения решения уравнений типа Прандтля в окрестности точек нарушения аналитичности граничных условий. Ж. вычислит. матем. и матем. физ., 1969, т. 9, № 4.
8. Беллман Р. Е., Калаба Р. Е. Квазилинеаризация и нелинейные краевые задачи. М., «Мир», 1968.