МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 4 • 1978

УДК 532.517.4+536.12

РАЗВИТИЕ ЗАТОПЛЕННОЙ ТУРБУЛЕНТНОЙ ИЗОТЕРМИЧЕСКОЙ СТРУИ И ПРИНЦИП МИНИМАЛЬНОГО ПРОИЗВОДСТВА ЭНТРОПИИ

И. С. БОРОВКОВ

(Москва)

На примере затопленной турбулентной изотермической струи показывается, что процесс турбулентного смешения газовых струй может развиваться в соответствии с принципом минимального производства энтропии.

При расчете смешения газовых струй в настоящее время используются экспериментальные значения или турбулентного числа Шмидта Sc, или коэффициента растяжения $\beta_{u\rho}$ профиля скорости относительно профиля плотности поперек струи ($\mathrm{Sc}\approx\beta_{u\rho}^2$). При этом для основных участков осесимметричных струй последнее значение считается равным приблизительно 0.8 независимо от рода смешивающихся газов, их исходных параметров и т. д. [1].

В настоящей работе предпринята попытка определить значение коэффициента $\beta_{u\rho}$, использовав принцип минимального производства энтропии.

Заметим, что вопрос аналитического определения турбулентных чисел Прандтля и Шмидта привлекал многих авторов и ему посвящено большое число работ. Однако обзор указанных работ за последние 25 лет [2] свидетельствует о том, что тот подход к решению этого вопроса, который развивается в настоящей работе, ранее не рассматривался.

1. Рассмотрим основной (автомодельный) участок затопленной осесимметричной турбулентной изотермической струи с дозвуковой начальной скоростью. При этом используем следующие общепринятые сейчас предположения [1].

Статическое давление и температура вдоль и поперек струи равны давлению и температуре в пространстве, куда происходит истечение.

Приведенные профили скорости и плотности поперек струи имеют вид

$$\Delta u^\circ=\frac{u}{u_m}=\exp\left[-\left(\frac{y}{y_u}\right)^2\ln 2\right] \tag{1.1}$$

$$\Delta\rho^\circ=\frac{\rho-\rho_2}{\rho_m-\rho_2}=\exp\left[-\left(\frac{y}{y_\rho}\right)^2\ln 2\right] \tag{1.2}$$

Соотношения между массовой концентрацией газа струи и приведенной плотностью определяются уравнением состояния совершенного газа

$$c_m=\frac{\Delta\rho_m^\circ}{n+(1-n)\Delta\rho_m^\circ},\quad \frac{c}{c_m}=\Delta\rho^\circ\frac{n+(1-n)\Delta\rho_m^\circ}{n+(1-n)\Delta\rho_m^\circ\Delta\rho^\circ} \tag{1.3}$$

$$n=\frac{\rho_2}{\rho_1},\quad \Delta\rho_m^\circ=\frac{\rho_m-\rho_2}{\rho_1-\rho_2} \tag{1.4}$$

В этих соотношениях u, ρ и c — осредненные по времени скорость, плотность и массовая концентрация; индексами m, 1 и 2 отмечены соответственно ось струи, начальное сечение струи и газ в пространстве, куда происходит истечение (газ затопленного пространства); y — радиус рассматриваемой точки в каком-либо сечении струи; y_u и y_ρ — радиусы точек, в которых соответственно $u/u_u=0.5$ и $(\rho-\rho_2)/(\rho_m-\rho_2)=0.5$.

Кроме перечисленных примем также предположение о том, что профили скорости и плотности в начальном сечении струи равномерные, т. е. что пограничным слоем в этом сечении можно пренебречь. Как будет видно из дальнейшего, учет начальной неравномерности в струе при любых заданных профилях Δu° и $\Delta\rho^\circ$ не связан с какими-либо принципиальными трудностями и может быть сделан без особого труда.

Отметим здесь также, что вместо величин y_u и y_ρ ниже используются величины y_u и $\beta_{u\rho}$, так как $\beta_{u\rho}=y_u/y_\rho$ и именно величина $\beta_{u\rho}$ подлежит определению.

2. Принцип минимального производства энтропии может быть сформулирован так же, как известная теорема Пригожина [3, 4]: стационарным состоянием термодинамической системы является состояние с минимально возможным при данных условиях производством энтропии. Однако теорема Пригожина доказана лишь для квазиравновесных состояний, для которых могут быть использованы феноменологические или обобщенные законы переноса с постоянными коэффициентами и соотношения взаимности Онзагера [3–5]. Когда же речь идет о принципе минимального производства энтропии, то предполагается использование сформулированного выше утверждения при рассмотрении неравновесного стационарного состояния термодинамической системы, в котором производство энтропии конечно.

Примеры установления в термодинамических системах стационарных состояний, существенно отличных от квазиравновесных и характеризуемых минимально возможной величиной производства энтропии, уже найдены [6, 7], причем число их будет, очевидно, расти. Определенный опыт использования принципа минимального производства энтропии также уже имеется. С помощью этого принципа объяснено существование критического режима работы газового эжектора [8] и найдены условия вибрационного горения в трубе, сопровождающегося продольными акустическими колебаниями [9].

3. Целесообразность использования принципа минимального производства энтропии при рассмотрении турбулентного смешения газа струи с газом затопленного пространства обусловлена следующими обстоятельствами. Турбулентные числа Прандтля и Шмидта определяются не столько термодинамическими параметрами смешивающихся газов, сколько параметрами самого турбулентного смешения [10]. Поэтому в случае турбулентного смешения имеется как бы некоторая внутренняя степень свободы и набор возможных совокупностей параметров смешения. Принцип же минимального производства энтропии позволяет по существу выбрать из множества возможных стационарных неравновесных состояний системы одно состояние, а именно состояние с минимально уменьшающейся степенью упорядоченности.

Для конкретизации принципа минимального производства в рассматриваемом случае полезно заметить, что при изотермическом смешении газа струи с газом затопленного пространства происходит передача количества движения от первого из этих газов ко второму. Поэтому характеристикой степени смешения может служить доля I начального количества движения, которое потеряно газом струи и приобретено газом затопленного пространства.

Любой процесс смешения, с другой стороны,— характерный необратимый процесс. Поэтому важнейшим следствием его является изменение потоков энтропии в газе струи и затопленного пространства Π^* и Π^{**} или изменение соответствующих производств энтропии между рассматриваемым и начальным сечениями струи $P^*=\Pi^*-\Pi_1^*$ и $P^{**}=\Pi^{**}-\Pi_1^{**}$.

С увеличением I в соответствии со вторым законом термодинамики общее производство энтропии в струе $P=P^*+P^{**}$ растет. По достижении значения $I=1$ процесс смешения заканчивается и рассматриваемая термодинамическая система приходит в равновесное состояние. Для этого состояния, как следует из принципа Гиббса (см., например, [11]), P имеет максимально возможное значение.

Таким образом, в конечном состоянии процесса смешения, когда $I=I_k=1$, значение $P=P_k$ является заданным. В некотором предшествующем ему состоянии, когда $I=I_{k-1}<I_k$, $P=P_{k-1}$. Следовательно, общее производство энтропии в струе при увеличении I от I_{k-1} до I_k возрастает на P_k-P_{k-1}. Согласно принципу минимального производства энтропии, разность P_k-P_{k-1} должна быть минимальной. Но значение P_k задано, поэтому в соответствии с условием минимальности P_k-P_{k-1} должно быть максимальным значение P_{k-1}.

Аналогично могут быть рассмотрены состояния, для которых $I=I_{k-1}$ и $I=I_{k-2}<I_{k-1}$ и т. д.

Другими словами, принципу минимального производства энтропии можно придать в рассматриваемом случае следующий вид:

$$P(I)=P_{\max}(I). \tag{3.1}$$

при любом (от 0 до 1) заданном значении I.

Формально рассмотрение в настоящей работе именно турбулентного смешения выражается в использовании совершенно определенных, характерных для турбулентного смешения профилей (1.1) и (1.2). По-видимому, через вид этих профилей на результаты определения $\beta_{u\rho}$ будут сказываться такие факторы, как число Рейнольдса Re в струе, исходная турбулентность и неравномерность параметров в начальном сечении струи. Добавим к этому, что профили (1.1) и (1.2) являются аппроксимацией экспериментальных данных, полученных при $\mathrm{Re}>10^4$ (в автомодельной по Re области), без специальных турбулизаторов струи в начальном сечении и при относительных толщинах вытеснения пограничного слоя в этом сечении $\sim 0.010\div 0.015$ [1].

4. Получим выражения для I и P в рассматриваемом случае.

Абсолютное значение I определяется выражением

$$I=2\pi\int_0^\infty \rho(1-c)u^2y\,dy$$

В долях начального количества движения $\pi r^2\rho_1 u_1^2$ после учета (1.1)—(1.4) и интегрирования

$$I=n\frac{(u_m^\circ)^2(y_u^\circ)^2}{\ln 2}\left(\frac{1}{2}-\frac{\Delta\rho_m^\circ}{2+\beta_{u\rho}^2}\right)$$

где r — начальный радиус струи, $u_m^\circ=u_m/u_1$, $y_u^\circ=y_u/r$.

Учтем теперь, что из условия сохранения избыточного импульса [1] в рассматриваемом случае следует:

$$(u_m^\circ)^2=\frac{\ln 2}{(y_u^\circ)^2}\left[\frac{n}{2}+\frac{(1-n)\Delta\rho_m^\circ}{2+\beta_{u\rho}^2}\right]^{-1}$$

В результате получим

$$I=n\left(\frac{1}{2}-\frac{\Delta\rho_m^\circ}{2+\beta_{u\rho}^2}\right)\left[\frac{n}{2}+\frac{(1-n)\Delta\rho_m^\circ}{2+\beta_{u\rho}^2}\right]^{-1} \tag{4.1}$$

Производство энтропии в истекающем газе (обозначен индексом *) между начальными рассматриваемыми сечениями струи определяется соотношением

$$P^*=\Pi^*-\Pi_1^*=2\pi\int_0^\infty s^*c\rho u y\,dy-\pi r^2 s_1^*\rho_1 u_1$$

где Π^* и Π_1^* — потоки энтропии, переносимой истекающим газом, соответственно в рассматриваемом и начальном сечениях струи, а s^* — энтропия единицы массы этого газа.

Поскольку температура в любой точке основного участка струи полагается неизменной и равной температуре T в начальном сечении струи и в пространстве, куда происходит истечение, выражение для s^* запишем в виде

$$s^*=\frac{R}{(\varkappa^*-1)\mu^*}[\ln T-(\varkappa^*-1)\ln(c\rho)]+s_0^*$$

Здесь $\varkappa$ — отношение удельных теплоемкостей при постоянном давлении и объеме, R — универсальная газовая постоянная, μ — молекулярный вес, s_0 — постоянная величина при постоянном значении $\varkappa$.

Используя выражение для s^* и условие сохранения массового потока истекающего газа

$$\pi r^2\rho_1 u_1=2\pi\int_0^\infty c\rho u y\,dy \tag{4.2}$$

получим

$$P^*=-2\pi\frac{R}{\mu^*}\int_0^\infty \ln\left(\frac{c\rho}{\rho_1}\right)c\rho u y\,dy$$

Аналогично, приняв во внимание, что

$$s^{**}=\frac{R}{(\varkappa^{**}-1)\mu^{**}}\{\ln T-(\varkappa^{**}-1)\ln[(1-c)\rho]\}+s_0^{**}$$

получим выражение для производства энтропии в газе затопленного пространства (обозначен индексом **)

$$P^{**}=-2\pi\frac{R}{\mu^{**}}\int_0^\infty \ln\left[\frac{(1-c)\rho}{\rho_2}\right](1-c)\rho u y\,dy$$

Из условия (4.2) следует, что для рассматриваемого случая

$$u_m^\circ\Delta\rho_m^\circ=\frac{(1+\beta_{u\rho}^2)\ln 2}{(y_u^\circ)^2}$$

Поэтому учет (1.1)—(1.4) и определение несобственных интегралов в выражениях для P^* и P^{**} приводят к следующему выражению для P:

$$P=P^*+P^{**}=\frac{R}{\mu^*}\pi r^2\rho_1 u_1\left[-\ln\Delta\rho_m^\circ+\frac{\beta_{u\rho}^2}{1+\beta_{u\rho}^2}+\right.$$
$$\left.+1-\sum_{k=1}^\infty\frac{1}{k(k+1)}\frac{1+\beta_{u\rho}^2}{1+(k+1)\beta_{u\rho}^2}(\Delta\rho_m^\circ)^k\right] \tag{4.3}$$

5. В соответствии с принципом минимального производства энтропии (3.1) перепишем равенство (4.1) относительно $\Delta\rho_m^\circ$

$$\Delta\rho_m^\circ=\frac{n(1-I)}{n-(n-1)I}\frac{2+\beta_{u\rho}^2}{2}$$

Подставим полученное выражение для $\Delta\rho_m^\circ$ в (4.3) и определим $\beta_{u\rho}$ из условий

$$\frac{dP}{d(\beta_{u\rho}^2)}=0,\quad \frac{d^2P}{[d(\beta_{u\rho}^2)]^2}>0$$

Первое из этих условий имеет вид

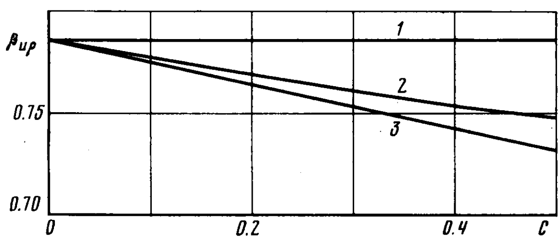
$$(5.1)\qquad -\frac{1}{2+\beta_{u\rho}^2}+\frac{1}{(1+\beta_{u\rho}^2)^2}-\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{C}{2}\right)^k\frac{(2+\beta_{u\rho}^2)^{k-1}}{[1+(k+1)\beta_{u\rho}^2]^2}\times$$
$$\times\left(-\frac{1}{k+1}+\beta_{u\rho}^2+\beta_{u\rho}^4\right)=0,\quad C=\frac{n(1-I)}{n-(n-1)I}$$

Второе условие всегда выполняется, если в диапазоне от 0 до 1 существует только одно значение $\beta_{u\rho}^2$, для которого $dP/d(\beta_{u\rho}^2)=0$. Действительно, поскольку $1>C\geqslant0$ $(0<I\leqslant1)$, при $\beta_{u\rho}^2=0$ и $\beta_{u\beta}^2=1$ соответственно

$$\frac{dP}{d(\beta_{u\rho}^2)}=\frac{R}{\mu^*}\pi r^2\rho_1u_1\left[\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}C^k\frac{1}{2(k+1)}\right]>0$$

$$\frac{dP}{d(\beta_{u\rho}^2)}=\frac{R}{\mu^*}\pi r^2\rho_1u_1\left[-\frac{1}{12}-\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{C}{2}\right)^k\frac{3^{k-1}}{(2+k)^2}\left(2-\frac{1}{k+1}\right)\right]<0$$

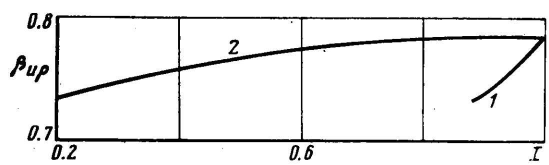
Из рассмотрения (5.1) следует, что C – монотонная функция I и $C\to0$, когда $I\to1$. Поэтому при решении (5.1) для конечной части автомодельного участка могут быть учтены лишь первые члены ряда, который содержит C.



Фиг. 1

Решение (5.1) относительно $\beta_{u\rho}$ в зависимости от C приведено на фиг. 1, где *1* – случай, когда $C=0$, а *2* и *3* – случаи, когда соответственно учтен один и два члена ряда, содержащего C.

Решение (5.1) относительно $\beta_{u\rho}$ в зависимости от I при учете двух членов ряда, содержащего C, приведено на фиг. 2, где *1* и *2* соответствуют истечению в воздух гелия ($n=7.235$) и фреона-12 [12] ($n=0.239$).



Фиг. 2

Прежде чем перейти к обсуждению полученных результатов, отметим, что решение (5.1) находилось для значений $C\leqslant0.5$. Это связано с тем, что при $C=0.5$ значение $\Delta\rho_m{}^\circ$ равняется 0.635 и соответствует приблизительно началу основного участка струи [1].

Рассмотрение полученных результатов показывает, что найденные значения $\beta_{u\rho}$ слабо зависят, во-первых, от n, т. е. от рода истекающего газа и газа затопленного пространства, а, во-вторых, от I, если $I>I_A$, где I_A – величина I в начале автомодельного участка. Точно такие же особенности коэффициентов $\beta_{u\rho}$ отмечаются, как уже говорилось, в экспериментах. Кроме того, найденные значения $\beta_{u\rho}$ хорошо согласуются с экспериментальным значением, равным 0.8. Все это свидетельствует, очевидно, о том, что полученные результаты не являются случайными и что принцип минимального производства энтропии действительно может быть использован для уменьшения числа неизвестных параметров в системе дифференциальных уравнений, описывающих развитие турбулентных струй.

6. В настоящее время известна точность экспериментального определения различных параметров турбулентной струи, и в частности точность определения профилей скорости и плотности поперек струи [1]. В связи с этим представляется интересным изменить профили (1.1) и (1.2) в пределах точности их определения и установить, к каким изменениям в значениях $\beta_{u\rho}$ это приведет.

Зададим Δu° и $\Delta\rho^\circ$ в несколько более общей форме, чем (1.1) и (1.2)

$$\Delta u^\circ = \exp\left[-\left(\frac{y}{y_u}\right)^l \ln 2\right], \qquad \Delta\rho^\circ = \exp\left[-\left(\frac{y}{u_\rho}\right)^m \ln 2\right]$$

Тогда соотношения, аналогичные (4.1) и (4.3), существенно усложнятся. В частности, все входящие в указанные соотношения интервалы не будут иметь элементарных первообразных.

Таким образом, при произвольных значениях l и m задача об определении $\beta_{u\rho}$ в соответствии с (3.1) может быть решена только численно на ЭВМ.

Ниже приводятся результаты решения рассматриваемой задачи для следующих значений l и m.

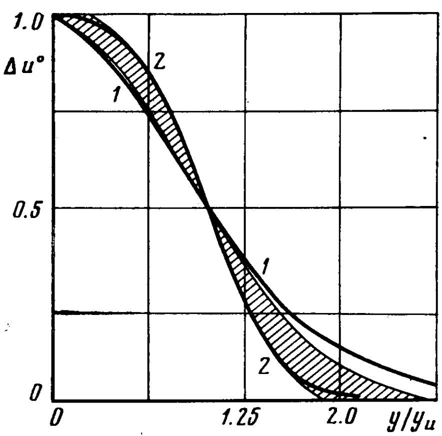
№	1	2	3	4	5
l	2.0	1.7	3.0	1.7	3.0
m	2.0	1.7	3.5	3.5	1.7

Все эти значения l и m, за исключением $l=m=2.0$, выбраны таким образом, что соответствующие им профили Δu° и $\Delta\rho^\circ$ являются в некотором смысле предельными по отношению к полосам точности определения Δu° и $\Delta\rho^\circ$.

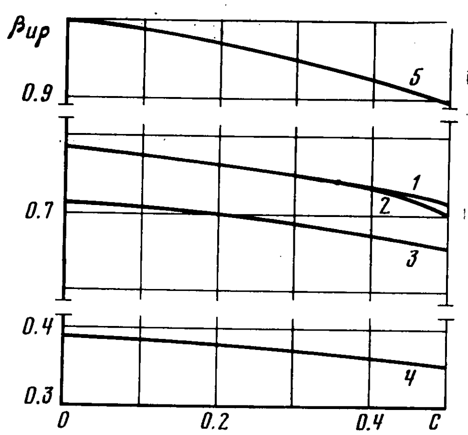
Для иллюстрации способа выбора значений l на фиг. 3 приведена полоса точности определения Δu° [1] (заштрихованная полоса), а также профили Δu° при $l=1.7$ и 3.0 (кривые *1* и *2*).

Полученные численно зависимости $\beta_{u\rho}$ от C при заданных значениях l и m приведены на фиг. 4.

Абсолютная погрешность в определении приведенных здесь значений $\beta_{u\rho}$ не превышает 10^{-4}. Нумерация же кривых совпадает с нумерацией, приведенной выше.



Фиг. 3



Фиг. 4

Согласно приведенным результатам, значения $\beta_{u\rho}$, следующие из принципа минимального производства энтропии, довольно заметно зависят от l и m, т. е. от профилей Δu° и $\Delta\rho^\circ$. При этом наиболее существенно отличие значений $\beta_{u\rho}$ от полученных в случае $l=m=2$, когда l и m ($l=1.7$, $m=3.5$ и $l=3.0$, $m=1.7$) соответствуют различным границам полос разброса экспериментальных данных. Отсюда, в частности, напрашивается вывод, что в дальнейшем наиболее целесообразно использовать принцип минимального производства энтропии при численном решении системы дифференциальных уравнений, описывающих развитие турбулентных струй, когда профили скорости, плотности и температуры не задаются, а находятся.

Поступила 26 VII 1976

ЛИТЕРАТУРА

1. *Абрамович Г. Н., Крашенников С. Ю., Секундов А. Н., Смирнова И. П.* Турбулентное смешение газовых струй. М., «Наука», 1974.
2. *Reynolds A.* The prediction of turbulent Prandtl and Schmidt Numbers. Internat. J. Heat and Mass Transfer, 1975, vol. 18, No. 9.
3. *Гроот С., Мазур П.* Неравновесная термодинамика. М., «Мир», 1964.
4. *Хаазе Р.* Термодинамика необратимых процессов. М., «Мир», 1967.
5. *Зубарев Д. Н.* Неравновесная статистическая термодинамика. М., «Наука», 1971.
6. *Клейн М.* Принцип минимума возникновения энтропии. В сб.: Термодинамика необратимых процессов. М., Изд-во иностр. лит., 1962.
7. *Боровков И. С.* Об одном случае выполнения теоремы Пригожина при установлении существенно неравновесного стационарного состояния термодинамической системы. Инж.-физ. ж., 1976, т. 31, № 3.
8. *Боровков И. С.* Работа простейшего газового эжектора с точки зрения термодинамики необратимых процессов. Инж.-физ. ж., 1974, т. 26, № 4.
9. *Боровков И. С.* О режиме вибрационного горения. Физ. горения и взрыва, 1975, т. 11, № 6.
10. *Вулис Л. А., Кашкаров В. П.* Теория струй вязкой жидкости. М., «Наука», 1965.
11. *Рейф Ф.* Статистическая физика. М., «Наука», 1972.
12. *Варгафтик Н. Б.* Справочник по теплофизическим свойствам газов и жидкостей. М., Физматгиз, 1963.