

ИНЕРЦИАЛЬНЫЕ ВОЗМУЩЕНИЯ ПОЛОГО ВИХРЯ, ЗАКЛЮЧЕННОГО В ЦИЛИНДРИЧЕСКИЙ СОСУД

Л. И. БЛЕХМАН

(Ленинград)

Рассматривается кольцевой слой идеальной несжимаемой жидкости, совершающей установившееся круговое движение в закрытом цилиндрическом сосуде. Изучаются малые возмущения потока, вызванные равномерным вращением сосуда вокруг некоторой оси, лежащей с его осью в одной плоскости. Задача представляет интерес для теории центробежных аппаратов, применяемых, в частности, при обогащении полезных ископаемых [1].

При сравнительно общих предположениях о радиальном распределении окружных скоростей жидкости в исходном потоке найдены искажения полей скоростей и давлений и формы свободной поверхности жидкости (поверхности «воздушного столба»). Показано, что осевая составляющая силы инерции Кориолиса может вызывать в потоке своеобразные резонансные явления, условия возникновения которых определяются при заданном характере невозмущенного движения только размерами цилиндра и толщиной слоя жидкости в невозмущенном потоке и не зависят ни от интенсивности вращения жидкости, ни от ее плотности. Предложено физическое объяснение этого несколько необычного результата, который необходимо учитывать при конструировании и наладке соответствующих устройств.

Полученные соотношения содержат в качестве частного случая решение задачи о движении тяжелой жидкости в быстро вращающемся вокруг своей горизонтальной оси цилиндрическом сосуде. Эта задача рассмотрена в [2] с учетом вязкости применительно к теории центробежного литья; отмечается согласие соответствующих результатов.

Заметим, что задачи динамики вращающейся жидкости вызывают в последнее время повышенный интерес исследователей [3, 4].

1. Постановка задачи и основные уравнения. Рассмотрим закрытый сосуд, имеющий форму прямого кругового цилиндра радиуса R и длины $2L$, частично заполненный идеальной несжимаемой жидкостью (фиг. 1). Пусть при отсутствии объемных сил жидкость совершает установившееся круговое движение, располагаясь в сосуде в виде кольцевого слоя толщины $R - R_0$. Уравнениям Эйлера, несжимаемости и граничным условиям удовлетворяет движение с любым достаточно гладким распределением окружных скоростей в радиальном направлении и при любом заданном давлении на свободной поверхности. Иными словами, в безразмерных цилиндрических координатах $\eta = r/R$, φ , $\xi = z/R$ равенства

$$(1.1) \quad V_0 = \{0, v_0(\eta), 0\}, \quad p_0 = p_0^0 + \int_{\eta_0}^{\eta} \frac{v_0^2(x)}{x} dx, \quad \eta = \eta_0 \quad (\eta_0 = R_0/R)$$

представляют собой соответственно выражения для безразмерных скорости потока, давления и уравнение свободной поверхности при произвольно заданных функции $v_0(\eta)$ и величине p_0^0 . Здесь и ниже используются безразмерные величины, причем за масштаб скорости принято максимальное значение модуля окружной скорости V_* , а за масштаб давления — величина ρV_*^2 ($\rho = \text{const}$ — плотность жидкости).

Пусть сосуд приведен во вращение с постоянной угловой скоростью

$\Omega = -i\Omega$ вокруг некоторой оси z' , лежащей с осью цилиндра z в одной плоскости и составляющей с ней угол α ($-\pi/2 \leq \alpha \leq \pi/2$). Задача состоит в изучении стационарных возмущений относительного движения жидкости, обусловленных объемными переносной и кориолисовой силами инерции. Эта задача возникает при исследовании ряда центробежных аппаратов, в частности центрифуг с гидроциклонной разгрузкой [1].

Уравнения Эйлера и несжимаемости могут быть представлены в форме

$$(1.2) \quad \text{grad}(p + V^2/2) + \text{rot } \mathbf{V} \times \mathbf{V} = -\varepsilon \mathbf{W}_e - \varepsilon c \mathbf{W}_c, \quad \text{div } \mathbf{V} = 0$$

$$(1.3) \quad \mathbf{W}_e = \frac{1}{\Omega^2 R_1} \Omega \times (\Omega \times \mathbf{R}_1) = -\frac{\mathbf{R}_1}{R_1} = \\ = \{\cos \alpha \cos \varphi, -\cos \alpha \sin \varphi, -\sin \alpha\}$$

$$(1.4) \quad \mathbf{W}_c = \frac{1}{2\Omega V} 2\Omega \times (\mathbf{V} \cdot \mathbf{V}) = -i \times \mathbf{V} = \{w \sin \alpha \sin \varphi + v \cos \alpha \\ w \sin \alpha \cos \varphi - u \cos \alpha, -\sin \alpha (v \cos \varphi + u \sin \varphi)\} \\ \varepsilon = (\text{Fr}^e)^{-1} = (V_*^2 / \Omega^2 R_1 R)^{-1}, \quad \varepsilon c = (\text{Fr}^c)^{-1} = (V_*^2 / 2\Omega V_* R)^{-1} \\ (c = 2V_* / \Omega R_1)$$

Здесь $\mathbf{V} = \{u, v, w\}$ — скорость жидкости относительно сосуда; p — давление; \mathbf{W}_e , \mathbf{W}_c — переносное и кориолисово ускорения, причем выражение для \mathbf{W}_e записано в предположении о малости размеров сосуда по сравнению с радиусом вращения R_1 ; Fr^e и Fr^c — числа Фруда, последнее из которых называют также числом Россби. Параметр ε будем считать малым, что отвечает соотношениям, характерным для изучаемых устройств.

Представляя уравнение свободной поверхности в виде $F(\eta, \varphi, \xi) = \eta - \psi(\varphi, \xi) = 0$, запишем граничные условия задачи, а также условия периодичности искомых величин по угловой координате φ и условие неизменности занимаемого жидкостью объема

$$(1.5) \quad u|_{\eta=1} = 0, \quad w|_{\xi=\pm l} = 0, \quad (\mathbf{V} \cdot \text{grad } F)_{F=0} = 0, \quad p|_{F=0} = p_0^0 \quad (l = L/R)$$

$$[\mathbf{V}, p, \psi]_{\varphi}^{\varphi+2\pi} = 0, \quad \frac{1}{9} \int_{-l}^l \int_0^{2\pi} \psi^2(\varphi, \xi) d\varphi d\xi = 2\pi \eta_0^2 l$$

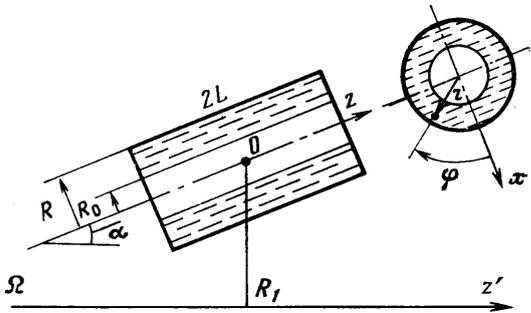
(здесь через $[f]_{\varphi}^{\varphi+2\pi}$ обозначена подстановка $f|_{\varphi+2\pi} - f|_{\varphi}$).

2. Уравнения для последовательных приближений метода возмущений. Решение задачи (1.2) — (1.5), относящейся к классу обратных краевых задач, будем искать в виде рядов

$$(2.1) \quad \mathbf{V} = \mathbf{V}_0 + \varepsilon \mathbf{V}_1 + \dots, \quad p = p_0 + \varepsilon p_1 + \dots, \quad F = \eta - \psi_0(\varphi, \xi) - \\ - \varepsilon \psi_1(\varphi, \xi) - \dots = 0$$

по степеням малого параметра ε , ограничившись нахождением лишь выписанных членов разложений.

Подстановка выражений (2.1) в уравнения (1.2) и условия (1.5) приводит к следующим соотношениям для последовательного нахождения



Фиг. 1

исходного и первого приближений к решению задачи

$$\begin{aligned} \operatorname{grad}(p_0 + V_0^2/2) + \operatorname{rot} V_0 \times V_0 = 0, \operatorname{div} V_0 = 0 \\ u_0|_{\eta=1} = 0, w_0|_{\zeta=\pm l} = 0, (V_0 \operatorname{grad} F_0)_{F_0=0} = 0 [F_0 = \eta - \psi_0(\varphi, \zeta)] \\ (2.2) \quad p_0|_{F_0=0} = p_0^0, [V_0, p_0, \psi_0]_{\varphi}^{\varphi+2\pi} = 0, \frac{1}{2} \int_{-l}^l \int_0^{2\pi} \psi_0^2(\varphi, \zeta) d\varphi d\zeta = 2\pi \eta_0^2 l \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{grad}(p_1 + V_0 V_1) + \operatorname{rot} V_0 \times V_1 + \operatorname{rot} V_1 \times V_0 = -W_e + c i \times V_0, \operatorname{div} V_1 = 0 \\ u_1|_{\eta=1} = 0, w_1|_{\zeta=\pm l} = 0, \left[\frac{\partial p_0}{\partial \eta} \psi_1(\varphi, \zeta) + p_1 \right]_{F_0=0} = 0 \\ \left[\psi_1(\varphi, \zeta) \frac{\partial}{\partial \eta} (V_0 \operatorname{grad} F_0) + V_1 \operatorname{grad} F_0 - V_0 \operatorname{grad} \psi_1(\varphi, \zeta) \right]_{F_0=0} = 0 \\ (2.3) \quad [V_1, p_1, \psi_1]_{\varphi}^{\varphi+2\pi} = 0, \int_{-l}^l \int_0^{2\pi} \psi_0(\varphi, \zeta) \psi_1(\varphi, \zeta) d\varphi d\zeta = 0 \end{aligned}$$

Выражения (1.1) представляют собой, как нетрудно убедиться, решение задачи (2.2), соответствующей движению жидкости в неподвижном сосуде. При учете этих выражений, равенств

$$(2.4) \quad \psi_0(\varphi, \zeta) = \eta_0, F_0 = \eta - \eta_0$$

и полученного с помощью формулы (1.4) равенства $i \times V_0 = v_0(\eta) \{-\cos \alpha, 0, \sin \alpha \cos \varphi\}$ соотношения (2.3) для нахождения первого приближения можно записать в форме (штрихом здесь и далее обозначено дифференцирование по η)

$$\begin{aligned} \frac{v_0(\eta)}{\eta} \left(\frac{\partial u_1}{\partial \varphi} - 2v_1 \right) + \frac{\partial p_1}{\partial \eta} = - \overbrace{\cos \alpha \cos \varphi}^{\text{I}} + \overbrace{0}^{\text{II}} - \overbrace{cv_0(\eta) \cos \alpha}^{\text{III}} + \overbrace{0}^{\text{IV}} \\ \frac{v_0(\eta)}{\eta} \frac{\partial v_1}{\partial \varphi} + \frac{[\eta v_0(\eta)]'}{\eta} u_1 + \frac{1}{\eta} \frac{\partial p_1}{\partial \varphi} = \cos \alpha \sin \varphi + 0 + 0 + 0 \\ (2.5) \quad \frac{v_0(\eta)}{\eta} \frac{\partial w_1}{\partial \varphi} + \frac{\partial p_1}{\partial \zeta} = 0 + \sin \alpha + 0 + cv_0(\eta) \sin \alpha \cos \varphi \end{aligned}$$

$$(2.6) \quad \frac{\partial(\eta u_1)}{\partial \eta} + \frac{\partial v_1}{\partial \varphi} + \eta \frac{\partial w_1}{\partial \zeta} = 0$$

$$\begin{aligned} u_1|_{\eta=\eta_0} = 0, w_1|_{\zeta=\pm l} = 0, u_1|_{\eta=\eta_0} = \frac{v_0(\eta_0)}{\eta_0} \frac{\partial \psi_1}{\partial \varphi} \\ p_1|_{\eta=\eta_0} = - \frac{v_0^2(\eta_0)}{\eta_0} \psi_1 \end{aligned}$$

$$(2.7) \quad [V_1, p_1, \psi_1]_{\varphi}^{\varphi+2\pi} = 0, \int_{-l}^l \int_0^{2\pi} \psi_1 d\varphi d\zeta = 0$$

Линейность задачи (2.5)–(2.7) позволяет расчленить ее на четыре независимые задачи, отвечающие возмущениям потока различными составляющими сил инерции в относительном движении. Каждая из этих задач состоит в решении при условиях (2.7) уравнения (2.6) и уравнений (2.5), содержащих в правых частях свободные члены, находящиеся лишь в одном из выделенных в (2.5) столбцов. Физический смысл отдельных задач отражен в названиях п. 3–6. Характер распределения возмущающих

объемных сил и искажения формы воздушного столба, отвечающие наиболее сложной четвертой задаче, изображены на фиг. 2, где для упрощения принято $v_0(\eta) = \eta$.

3. Возмущение движения радиальной и тангенциальной составляющими центробежной силы инерции (задача I). Решение этой плоской задачи ищем в виде

$$u_1 = U(\eta) \sin \varphi, \quad v_1 = V(\eta) \cos \varphi.$$

$$p_1 = P(\eta) \cos \varphi, \quad \psi_1 = C \cos \varphi.$$

$$(w_1 = 0)$$

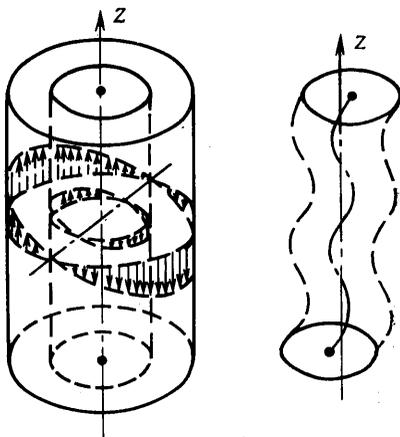
Тогда для определения неизвестных функций U , V , P и постоянной C получаем согласно (2.5)–(2.7) следующие соотношения:

$$\frac{v_0}{\eta} (U - 2V) + P' = -\cos \alpha,$$

$$-\frac{v_0}{\eta} V + \frac{(\eta v_0)'}{\eta} U -$$

$$-\frac{1}{\eta} P = \cos \alpha, \quad (\eta U') = V$$

$$U(1) = 0, \quad U(\eta_0) = -C v_0(\eta_0) / \eta_0, \\ P(\eta_0) = -C v_0^2(\eta_0) / \eta_0$$



Фиг. 2

Исключение функций V и P приводит к линейному однородному дифференциальному уравнению второго порядка для функции U

$$(3.1) \quad \eta^2 U'' + 3\eta U' - \frac{1}{v_0} (\eta^2 v_0'' + \eta v_0' - v_0) U = 0$$

Переменные коэффициенты в этом уравнении содержат произвольную функцию $v_0 = v_0(\eta)$ и ее производные. Тем не менее уравнение (3.1) удастся проинтегрировать в квадратурах. Замечая, что функция $U = v_0/\eta$ является его частным решением ($v_0 \neq 0$), общее решение запишем в виде

$$U = \frac{v_0}{\eta} \left[C_1 + C_2 \int_{\eta}^1 \frac{dx}{x v_0^2(x)} \right]$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные. После несложных выкладок, оставив в стороне особые случаи, когда $v_0(\eta_0) v_0(1) = 0$, получим решение рассматриваемой задачи в виде

$$(3.2) \quad u_1 = \eta_0^2 \cos \alpha \frac{v_0}{\eta} G(\eta) \sin \varphi,$$

$$v_1 = \eta_0^2 \cos \alpha \left[v_0' G(\eta) - \frac{1}{\eta v_0} \right] \cos \varphi, \quad w_1 = 0$$

$$p_1 = \cos \alpha \left\{ \frac{\eta_0^2}{\eta} [1 + v_0^2 G(\eta)] - \eta \right\} \cos \varphi$$

$$\psi_1 = -\eta_0^2 G(\eta_0) \cos \alpha \cos \varphi, \quad G(\eta) = \int_{\eta}^1 \frac{dx}{x v_0^2(x)}$$

Заметим, что задача допускает также решение несколько более общего вида, получающееся из (3.2) добавлением произвольной функции $f(\eta)$ к

выражению для v_1 и функции $2 \int_{\eta_0}^{\eta} v_0(x) f(x) x^{-1} dx$ к выражению для p_1 . Это

находится в соответствии с отмеченным ранее произволом в выборе исходного приближения. Здесь и при решении задач II–IV полагается $f(\eta) \equiv 0$, т. е. считается, что возможный произвол уже исчерпан конкретным выбором функции $v_0(\eta)$.

Проанализируем полученное решение. Согласно формулам (2.1), (2.4) и (3.2) уравнение искаженной свободной поверхности жидкости (поверхности «воздушного столба») имеет вид

$$\eta = \eta_0 + \varepsilon M \cos \varphi, \quad M = -\eta_0^2 G(\eta_0) \cos \alpha \leq 0$$

Если учитывать лишь малые величины порядка ε , то нетрудно убедиться, что эта поверхность, как и при отсутствии возмущений, является боковой поверхностью прямого кругового цилиндра радиуса η_0 , ось которого параллельна оси сосуда z , но смещена по отношению к ней на расстояние $\Delta = -\varepsilon M$ вдоль луча $\varphi = \pi$.

Таким образом, радиальная и тангенциальная составляющие центробежной силы инерции вызывают плоские возмущения потока, сводящиеся, в частности, к тому, что цилиндрический воздушный столб в рассматриваемом приближении смещается без деформации, причем его ось сдвигается в плоскости zz' параллельно оси z , удаляясь от оси z' .

Если функция v_0 имеет вид $v_0 = B\eta^v$, где B и v – постоянные, то окружная скорость в любой точке «узкого места» ($\varphi = \pi$) увеличивается по сравнению с ее значением в той же точке в невозмущенном движении, а в точках «широкого места» ($\varphi = 0$) – уменьшается. В общем случае можно лишь утверждать, что модуль средней окружной скорости в «узком» и «широком» местах увеличивается и уменьшается соответственно.

4. Возмущение движения осевой составляющей центробежной силы инерции (задача II). Учитывая, что данная задача осесимметрична, и считая, что $(\eta v_0)' \neq 0$, получаем из равенств (2.5) – (2.7)

$$u_1 = w_1 = 0, \quad \frac{\partial p_1}{\partial \eta} = \frac{2v_0}{\eta} v_1, \quad \frac{\partial p_1}{\partial \xi} = \sin \alpha$$

$$p_1|_{\eta=\eta_0} = -\frac{v_0^2(\eta_0)}{\eta_0} \psi_1(\xi), \quad \int_{-l}^l \psi_1(\xi) d\xi = 0$$

Отсюда, полагая, как и в п. 3, добавки к выражениям для v_1 и p_1 равными нулю, находим

$$(4.1) \quad V_1 = 0, \quad p_1 = \xi \sin \alpha, \quad \psi_1 = -\eta_0 v_0^{-2}(\eta_0) \xi \sin \alpha$$

Заметим, что это решение справедливо и при $(\eta v_0)' = 0$, однако в этом случае оно, возможно, не является единственным.

Из формул (4.1) при учете (2.1) и (2.4) следует, что в результате действия осевой составляющей центробежной силы инерции поле скоростей не искажается, а воздушный столб принимает форму усеченного конуса, сужающегося в направлении действия этой составляющей.

5. Возмущение движения радиальной составляющей силы инерции Кориолиса (задача III). В точности так же, как и в п. 4, здесь получаем

$$(5.1) \quad V_1 = 0, \quad \psi_1 = 0, \quad p_1 = -c \cos \alpha \int_{\eta_0}^{\eta} v_0(x) dx$$

Таким образом, радиальная составляющая силы инерции Кориолиса не приводит к изменениям в расположении и форме цилиндрического воз-

душного столба и к возмущению поля скоростей, вызывая лишь возмущение поля давлений, не зависящее от координат φ и ξ .

6. Возмущение движения осевой составляющей силы инерции Кориолиса (задача IV). «Геометрические резонансы». Фиг. 2 иллюстрирует характер данного возмущающего воздействия, стремящегося «раскачать» вращающуюся жидкость. Рассматриваемая задача значительно сложнее предыдущих, ибо возникающие здесь возмущения являются неплоскими и неосесимметричными. Вместе с тем подстановка

$$(6.1) \quad u_1 = U(\eta, \xi) \sin \varphi, \quad v_1 = V(\eta, \xi) \cos \varphi, \quad w_1 = W(\eta, \xi) \sin \varphi \\ p_1 = P(\eta, \xi) \cos \varphi, \quad \psi_1 = \Psi(\xi) \cos \varphi$$

где U, V, W, P и Ψ — неизвестные функции η и ξ , позволяет исключить переменную φ из уравнений и граничных условий. Имеем

$$(6.2) \quad \frac{v_0}{\eta} (U - 2V) + \frac{\partial P}{\partial \eta} = 0, \quad -v_0 V + (\eta v_0)' U - P = 0$$

$$\frac{v_0}{\eta} W + \frac{\partial P}{\partial \xi} = c v_0 \sin \alpha, \quad \frac{\partial (\eta U)}{\partial \eta} - V + \eta \frac{\partial W}{\partial \xi} = 0$$

$$(6.3) \quad U|_{\eta=1} = 0, \quad W|_{\xi=\pm l} = 0, \quad U|_{\eta=\eta_0} = -\eta_0^{-1} v_0(\eta_0) \Psi \\ P|_{\eta=\eta_0} = -\eta_0^{-1} v_0^2(\eta_0) \Psi$$

В предположении, что $v_0 \neq D/\sqrt{\eta}$, где D — постоянная, система уравнений (6.2) может быть сведена к одному линейному дифференциальному уравнению в частных производных второго порядка для функции $P = P(\eta, \xi)$

$$(6.4) \quad \eta^2 \frac{\partial^2 P}{\partial \eta^2} + \eta a(\eta) \frac{\partial P}{\partial \eta} - b(\eta) P - \eta^2 d(\eta) \frac{\partial^2 P}{\partial \xi^2} = 0$$

$$a(\eta) = \frac{3v_0^2 + 2\eta v_0 v_0' - 2\eta^2 v_0 v_0'' - 2\eta^2 (v_0')^2}{v_0(2\eta v_0' + v_0)}$$

$$b(\eta) = \frac{4\eta^2 v_0'' + 4\eta v_0' - v_0}{2\eta v_0' + v_0}, \quad d(\eta) = \frac{2\eta v_0' + v_0}{v_0}$$

Используя условия (6.3) и уравнения (6.2), найдем граничные условия, которым должна удовлетворять функция P

$$(6.5) \quad \eta_0 v_0(\eta_0) \frac{\partial P}{\partial \eta} \Big|_{\eta=\eta_0} + [v_0(\eta_0) - 2\eta_0 v_0'(\eta_0)] P|_{\eta=\eta_0} = 0$$

$$\left(\frac{\partial P}{\partial \eta} + 2P \right) \Big|_{\eta=1} = 0, \quad \frac{\partial P}{\partial \xi} \Big|_{\xi=\pm l} = c v_0(\eta) \sin \alpha$$

Тип уравнения (6.4) в каждой точке рассматриваемого промежутка определяется знаком в этой точке функции $d(\eta)$. Это уравнение допускает разделение переменных, однако вид коэффициентов $a(\eta)$, $b(\eta)$ и $d(\eta)$ не позволяет надеяться на получение аналитического решения соответствующей спектральной задачи при произвольном задании функции v_0 . Заметим, однако, что коэффициенты $a(\eta)$, $b(\eta)$ и $d(\eta)$ обращаются в константы, если $v_0 = B\eta^\nu$, где B и ν — постоянные. Для функций v_0 такого вида и будем решать далее задачу, положив, не нарушая общности, $B=1$. Функции этого вида позволяют охватить достаточно широкий класс практически важных случаев, и в том числе случай квазитвердо вращающейся жидкости, отвечающий $\nu=1$.

В результате подстановки $v_0 = \eta^v$ в уравнение (6.4) и условия (6.5) приходим к краевой задаче

$$\eta^2 \frac{\partial^2 P}{\partial \eta^2} + (3-2\nu)\eta \frac{\partial P}{\partial \eta} - (2\nu-1)P - (2\nu+1)\eta^2 \frac{\partial^2 P}{\partial \xi^2} = 0 \quad (\nu \neq -1/2)$$

$$\left[(2\nu-1)P - \eta_0 \frac{\partial P}{\partial \eta} \right]_{\eta=\eta_0} = 0, \quad \left(2P + \frac{\partial P}{\partial \eta} \right)_{\eta=1} = 0$$

$$\frac{\partial P}{\partial \xi} \Big|_{\xi=\pm 1} = c\eta^v \sin \alpha$$

связанной с уравнением гиперболического (при $\nu > -1/2$) или эллиптического (при $\nu < -1/2$) типа. Полагая при разделении переменных $P(\eta, \xi) = S(\eta)Z(\xi)$ и обозначая через $-\mu^2$ постоянную разделения, приходим к регулярной задаче Штурма – Лиувилля с условиями, называемыми иногда условиями третьего рода

$$(\eta^{3-2\nu}S')' + [\mu^2\eta^{3-2\nu} - (2\nu-1)\eta^{1-2\nu}]S = 0$$

$$S'(\eta_0) - \eta_0^{-1}(2\nu-1)S(\eta_0) = 0, \quad S'(1) + 2S(1) = 0$$

и к уравнению $d^2Z/d\xi^2 + [\mu^2/(2\nu+1)]Z = 0$.

Цепочка громоздких, но обычных для метода Фурье выкладок приводит к результату

$$P(\eta, \xi) = A\eta^{\nu-1} \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n H_{\nu, \nu}(\mu_n, \mu_n \eta) Z_n^{(*)}(\xi)$$

$$H_{q, s}(\mu, \mu \eta) = [Y_s(\mu) + \mu Y_{s-1}(\mu)] J_q(\mu \eta) - [J_s(\mu) + \mu J_{s-1}(\mu)] Y_q(\mu \eta)$$

$$Z_n^{(*)}(\xi) = \begin{cases} \sin \sqrt{\lambda_{n, \nu}} \xi, & \lambda_{n, \nu} > 0 \\ \text{sh} \sqrt{-\lambda_{n, \nu}} \xi, & \lambda_{n, \nu} < 0 \end{cases}$$

$$(6.6)$$

$$Z_n^{(c)}(\xi) = \begin{cases} \cos \sqrt{\lambda_{n, \nu}} \xi, & \lambda_{n, \nu} > 0 \\ \text{ch} \sqrt{-\lambda_{n, \nu}} \xi, & \lambda_{n, \nu} < 0 \end{cases}$$

$$\gamma_n = \{ \sqrt{|\lambda_{n, \nu}|} Z_n^{(c)}(l) [(1 + \lambda_{n, \nu}^{-1}) H_{\nu, \nu}^2(\mu_n, \mu_n) -$$

$$- \eta_0^2 H_{\nu, \nu}(\mu_n, \mu_n \eta_0)] \}^{-1} \int_{\eta_0}^1 \eta^2 H_{\nu, \nu}(\mu_n, \mu_n \eta) d\eta$$

$$\lambda_{n, \nu} = \frac{\mu_n^2}{2\nu+1}, \quad A = \frac{4V \cdot \sin \alpha}{\Omega R_1}$$

причем $J_r(x)$ и $Y_r(x)$ есть функции Бесселя первого и второго рода порядка r , а μ_n – корни уравнения

$$(6.7) \quad H_{\nu+1, \nu}(\mu, \mu \eta_0) = 0$$

пронумерованные в порядке возрастания собственных значений μ_n^2 .

Используя выражение (6.6) для функции P , с помощью соотношений (6.1) – (6.3) получаем решение задачи в виде

$$u_1 = \frac{A}{2\nu+1} \sin \varphi \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n \left[\mu_n H_{\nu-1, \nu}(\mu_n, \mu_n \eta) + \right.$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{1}{\eta} H_{\nu, \nu}(\mu_n, \mu_n \eta) \Big] Z_n^{(s)}(\xi) \\
 (6.8) \quad & v_1 = \frac{A}{2\nu+1} \cos \varphi \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n \left[(\nu+1) \mu_n H_{\nu-1, \nu}(\mu_n, \mu_n \eta) - \right. \\
 & \left. - \frac{\nu}{\eta} H_{\nu, \nu}(\mu_n, \mu_n \eta) \right] Z_n^{(s)}(\xi) \\
 & w_1 = \frac{1}{2} A \sin \varphi \left[\eta - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{|\lambda_{n, \nu}|} \gamma_n H_{\nu, \nu}(\mu_n, \mu_n \eta) Z_n^{(c)}(\xi) \right] \\
 & p_1 = A \eta^{\nu-1} \cos \varphi \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n H_{\nu, \nu}(\mu_n, \mu_n \eta) Z_n^{(s)}(\xi) \\
 & \psi_1 = -A \eta_0^{-\nu} \cos \varphi \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n H_{\nu, \nu}(\mu_n, \mu_n \eta_0) Z_n^{(s)}(\xi)
 \end{aligned}$$

Заметим, что положительность всех собственных значений μ_n^2 , образующих дискретный вещественный спектр рассмотренной задачи, гарантирована лишь при $\nu \geq 1/2$ (см., например, [5], стр. 352–354). При $\nu < 1/2$ несколько (т. е. конечное число) первых собственных значений могут оказаться отрицательными. Отвечающие им члены рядов будут иметь вид, отличный от вида членов, соответствующих положительным собственным значениям. Достаточно большие положительные собственные числа асимптотически приближаются с ростом их номера к величинам $(\pi m / (1 - \eta_0))^2$, где целое число m не обязательно совпадает с номером собственного значения.

n	$\eta_0=1/16$	2/16	3/16	4/16	5/16	6/16	7/16	8/16
1	2.73	2.74	2.74	2.75	2.79	2.82	2.88	2.94
2	5.69	5.71	5.78	5.92	6.06	6.65	6.94	7.55
3	8.77	8.86	9.11	9.54	10.14	10.94	11.97	13.30
4	11.90	12.12	12.64	13.41	14.42	15.70	17.31	19.35
5	15.05	15.47	16.30	17.41	18.83	20.58	22.76	25.51
6	18.23	18.89	20.02	21.48	23.29	25.52	28.27	31.72
7	21.43	22.34	23.78	25.58	27.79	30.48	33.79	37.96
8	24.66	25.83	27.57	29.71	32.30	35.46	39.34	44.20
9	27.90	29.34	31.39	33.85	36.84	40.45	44.90	50.27
10	30.16	32.31	34.82	37.70	41.13	45.24	50.27	56.55

Для случая $\nu=1$ в таблице приведены значения десяти наименьших корней μ_n уравнения (6.7) при различных значениях η_0 . Последующие корни можно с достаточной точностью вычислять по асимптотической формуле $\mu_n = \pi(n-1)/(1-\eta_0)$.

Итак, в случае, когда $\nu_0 = \eta^\nu$ ($\nu \neq -1/2$), решение задачи IV представляется в виде рядов по цилиндрическим, а также, быть может, модифицированным цилиндрическим функциям порядков ν и $\nu-1$. Нетрудно видеть, что при ν , равном целому числу k , члены рядов можно выразить через цилиндрические функции нулевого и первого порядков, а при $\nu = k + 1/2$ — через элементарные функции.

Проанализируем решение (6.8). Уравнение свободной поверхности, искаженной в результате действия изучаемого возмущения, согласно равенствам (2.1) и (2.4) имеет вид

$$(6.9) \quad \eta = \eta_0 + \varepsilon N(\xi) \cos \varphi \quad \left[N(\xi) = -A\eta_0^{-\nu} \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n H_{\nu, \nu}(\mu_n, \mu_n \eta_0) Z_n^{(s)}(\xi) \right]$$

Следовательно (см. п. 3), все сечения $\xi = \text{const}$ искаженной свободной поверхности остаются с рассматриваемой точностью окружностями радиуса η_0 , а осевая линия поверхности представляет собой кривую $x = \varepsilon N(\xi)$, лежащую в плоскости zz' (фиг. 2).

Заметим, что при выполнении неравенства $\mu_n^2 / (2\nu + 1) > 0$ и соотношения

$$(6.10) \quad \sqrt{\frac{\mu_n^2}{2\nu + 1}} l = \frac{\pi}{2} (2k + 1) \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

оказывается, что

$$Z_n^{(c)}(l) = \cos \sqrt{\frac{\mu_n^2}{2\nu + 1}} l = 0$$

и поэтому n -е члены всех рядов в решении (6.8) обращаются в бесконечность. Поскольку число μ_n^2 согласно (6.7) зависят только от параметров η_0 и ν , то равенство (6.10) устанавливает при фиксированном ν для каждого номера n и числа k некоторую зависимость между геометрическими параметрами η_0 и l . Назовем совокупность этих зависимостей резонансными соотношениями.

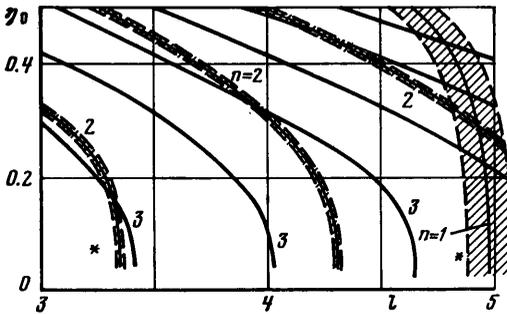
В плоскости параметров η_0, l таким соотношениям отвечают некоторые кривые, «густота» расположения которых неограниченно возрастает при $n \rightarrow \infty$ (речь идет о случае $\nu > -1/2$; см. ниже). Отметим, что характер возмущающего воздействия (см. фиг. 2) дает основание заключить, что здесь действительно имеет место явление резонанса при вынужденных колебаниях слоя вращающейся жидкости.

Естественно, что обращение искомых величин в бесконечность при выполнении резонансных соотношений связано лишь с применением модели идеальной жидкости. При использовании модели вязкой жидкости возмущения при резонансах имели бы конечные значения.

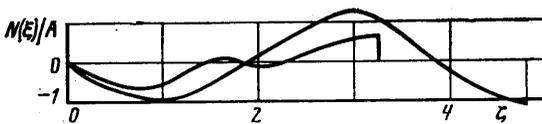
В окрестностях резонансов получилось бы лишь возрастание возмущений, наиболее ярко выраженное только для резонансов «низких порядков», т. е. отвечающих небольшим значениям n . Последнее обстоятельство связано, в частности, с тем, что коэффициенты членов рядов в (6.8) при $1/\cos \sqrt{\mu_n^2 / (2\nu + 1)} l$ убывают с ростом n , вообще говоря, как $1/n^3$. Таким образом, практический интерес представляют лишь несколько первых резонансов, и можно получить правильную информацию о характере потока, удерживая в рядах (6.8) лишь небольшое число слагаемых (подобные ряды рассматриваются, например, в [8]).

На фиг. 3 для случая $\nu_0(\eta) = \eta$ (см. ниже) представлены резонансные соотношения для трех первых членов рядов при $3 < l = \bar{L}/R < 5$, $1/16 < \eta_0 = R_0/R < 1/2$, что отвечает параметрам гидроциклонов. Заштрихованные области, являющиеся окрестностями кривых, изображены условно: ширина этих областей принята убывающей, как $1/n^3$, и как бы характеризует «степень опасности» соответствующего резонанса и ширину зоны, в которой возмущения превышают заданные значения.

Рассматриваемые резонансные явления обладают той интересной особенностью, что условия их возникновения при заданном характере распределения окружных скоростей в невозмущенном движении определяются соотношениями только между геометрическими параметрами системы — длиной сосуда, его радиусом и радиусом



Фиг. 3



Фиг. 4

воздушного столба и не зависят ни от интенсивности вращения жидкости, ни от ее плотности. Можно предложить следующее физическое объяснение этого необычного обстоятельства. При вращении слой жидкости приобретает своеобразную жесткость [4, 7], пропорциональную плотности распределения центробежной силы инерции, т. е. пропорциональную величине $\rho\omega^2$, где ω — характерная угловая скорость вращения жидкости вокруг оси сосуда. В результате частоты свободных колебаний слоя жидкости λ_i оказываются не зависящими от ρ и пропорциональными величине ω , совпадающей в случае $v_0(\eta) = \eta$ с частотой возмущения; но тогда ω в резонансных соотношениях типа $\omega = \lambda_i$ сокращается, не входит в них и плотность жидкости ρ .

Заметим, что при $\alpha = 0$, т. е. когда ось сосуда параллельна оси, вокруг которой он вращается, осевая составляющая силы Кориолиса отсутствует и резонансные явления невозможны. Если же $\alpha \neq 0$, то при $v \geq 1/2$ резонанс может проявиться в любом члене каждого ряда, так как в этом случае условие $\mu_n^2 / (2v+1) > 0$ выполнено при всех n ; при $-1/2 < v < 1/2$ резонансные ситуации могут быть связаны со всеми членами рядов, кроме нескольких первых, которые отвечают отрицательным μ_n^2 (если такие имеются); при $v < -1/2$ резонансы могут быть связаны именно с этими несколькими первыми членами.

На фиг. 4 при $v=1$ для двух комбинаций параметров $\eta_0 = 1/16$, $l=3.24$ и $\eta_0 = 1/16$, $l=4.86$ (эти комбинации отмечены звездочками на фиг. 3) изображены кривые $x/\varepsilon A = N(\xi)/A$, характеризующие искривление оси воздушного столба. Первая комбинация соответствует значительному удалению от главных резонансных зон, а вторая — близости к первой резонансной зоне.

7. Общие выражения для полученного решения. В соответствии с формулами (1.1), (2.1), (2.4), (3.2), (4.1), (5.1) и (6.8) запишем для случая $v_0(\eta) = \eta^v$ ($v \neq -1/2$) с принятой точностью решение всей задачи в целом

$$u = \varepsilon \sin \varphi \left[\eta_0^2 \eta^{v-1} \Phi_{2v}(\eta, 1) \cos \alpha + \frac{A}{2v+1} \sum_{n=1}^{\infty} \dots \right]$$

$$v = \eta^v + \varepsilon \cos \varphi \left[-\frac{1}{2} \eta_0^2 \eta^{-1} (\eta^v + \eta^{-v}) \cos \alpha + \frac{A}{2v+1} \sum_{n=1}^{\infty} \dots \right]$$

$$w = \frac{1}{2} \varepsilon A \sin \varphi \left(\eta - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \dots \right)$$

$$p = p_0^0 + \Phi_{-2v}(\eta_0, \eta) + \varepsilon \left(\xi \sin \alpha - c \Phi_{-v-1}(\eta_0, \eta) \cos \alpha + \right. \\ \left. + \eta \cos \varphi \left\{ \cos \alpha [(\eta_0/\eta)^2 (1 + \eta^{2v} \Phi_{2v}(\eta, 1)) - 1] + A \eta^{v-2} \sum_{n=1}^{\infty} \dots \right\} \right)$$

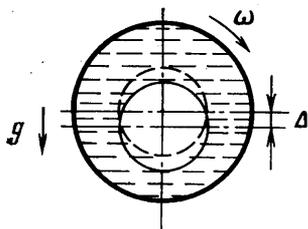
$$(7.1) \quad \eta = \eta_0 - \varepsilon \left\{ \eta_0^{1-2v} \xi \sin \alpha + \cos \varphi \left[\eta_0^2 \Phi_{2v}(\eta_0, 1) \cos \alpha + A \eta_0^{-v} \sum_{n=1}^{\infty} \dots \right] \right\}$$

$$(7.2) \quad \Phi_s(\tau, \sigma) = \int_{\tau}^{\sigma} x^{-s-1} dx = \begin{cases} \frac{1}{s} (\tau^{-s} - \sigma^{-s}), & s \neq 0 \\ \ln \left| \frac{\sigma}{\tau} \right|, & s = 0 \end{cases}$$

а невыписанные члены рядов — те же, что в выражениях для соответствующих величин в формулах (6.8).

Вопрос об устойчивости изученных движений требует специального рассмотрения. Для случая $v_0(\eta) = 1/\eta$ в [8] доказана нейтральная устойчивость.

8. О случае квазитвердого невозмущенного вращения. Задача теории центробежного литья. Случай, когда $v_0(\eta) = \eta$, т. е. когда в невозмущенном движении жидкость вращается как абсолютно твердое тело, представляет особый интерес для приложений. Именно такое движение устанавливается при отсутствии объемных сил в равномерно вращающемся вокруг своей оси цилиндрическом сосуде с вязкой жидкостью. Поэтому решение, получающееся из (7.1), (6.6) и (6.7) при $\nu=1$, отвечает идеальножидкостной модели потока в задаче о движении жидкости, например в системе типа изображенной на фиг. 1 при условии, что цилиндр помимо вращения вокруг оси z' совершает значительно более интенсивное равномерное вращательное движение вокруг собственной оси (сила тяжести отсутствует). Назовем эту задачу задачей А. Таблица чисел μ_n , диаграмма главных резонансных зон и кривые, характеризующие искажение оси воздушного столба для изучаемого случая $\nu=1$, были приведены в п. 6; заметим, что интеграл, содержащийся в выражении для γ_n , в данном случае вычисляется по формуле



Фиг. 5

$$\int_{\eta_0}^1 \eta^2 H_{1,1}(\mu_n, \mu_n \eta) d\eta = -\frac{3}{\mu_n} H_{0,1}(\mu_n, \mu_n)$$

В теории центробежного литья, а также при расчете тихоходных центрифуг возникает задача о плоском установившемся движении слоя тяжелой жидкости в быстро вращающемся вокруг своей горизонтальной оси цилиндре (фиг. 5). Особенно важно выяснить форму свободной поверхности жидкости, определяющую форму внутренней поверхности отливки при центробежном литье. Ясно, что эта задача совершенно аналогична той части задачи А, которая моделируется в рамках идеальной жидкости задачей I при $v_0(\eta) = \eta$ (см. п. 3): обе они являются задачами о малых возмущениях квазитвердо вращающегося слоя жидкости однородным полем сил, перпендикулярных оси сосуда. Поэтому решение задачи теории центробежного литья можно получить, положив в формулах (7.1) равными нулю возмущения, вызванные действием силы Кориолиса, а также приняв $\nu=1$, $\alpha=l$ и заменив малый параметр $\varepsilon=1/Gr^*$ на $\varepsilon^*=1/Gr^*\varepsilon=g/\omega^2 R$ (ω — угловая скорость вращения цилиндра вокруг своей оси).

Задача теории центробежного литья рассматривалась для вязкой жидкости в [2], где достаточно сложное решение было упрощено для случая больших чисел Рейнольдса. Выяснилось, что в упрощенные выражения коэффициент вязкости не входит (задача, как и в настоящей работе, решалась в первом приближении). Эти выражения совпадают с найденными выше для случая идеальной жидкости.

Заметим в заключение, что действие однородного поля сил, перпендикулярных оси вращения слоя, приводит к смещению цилиндрической воздушной полости в том направлении, в котором действуют силы. В частности, в задаче теории центробежного литья получаем, что действие силы тяжести приводит к подъему вращающейся жидкости, причем смещение оси полости $\Delta = \varepsilon^*(1 - \eta_0^2)/2$ (фиг. 5). Подъем жидкости можно объяснить ускоряющим воздействием силы тяжести на нисходящую часть потока и замедляющим — на восходящую.

Автор благодарен А. И. Поварову за постановку задачи и постоянный интерес к работе.

Поступила 10 V 1977

ЛИТЕРАТУРА

1. Поваров А. И., Щербаков А. А. Осадительная центрифуга с гидроциклонной разгрузкой. Обогащение руд. Науч.-техн. информ. бюл., 1966, № 4.
2. Челинога М. М. К гидродинамической теории центробежного литья. Изв. АН СССР, ОТН, 1956, № 3.
3. Гринспен Х. Теория вращающихся жидкостей. Л., Гидрометеиздат, 1975.
4. Бэтчелор Дж. Введение в динамику жидкости. М., «Мир», 1973.
5. Курант Р., Гильберт Д. Методы математической физики, т. 1. М.—Л., Гостехиздат, 1951.
6. Ван-Дайк М. Методы возмущений в механике жидкости. М., «Мир», 1967.
7. Rayleigh. Scientific Papers, 1916, vol. 6, p. 447—453, Cambridge Univ. Press., 1920
8. Козин Н. С. Об устойчивости плоского полого вихря. ПММ, 1972, т. 36, вып. 1.