

**ПЛОСКИЕ НЕСТАЦИОНАРНЫЕ АВТОМОДЕЛЬНЫЕ ТЕЧЕНИЯ ГАЗА
С ВЫДЕЛЕНИЕМ ЭНЕРГИИ В УДАРНЫХ ВОЛНАХ**

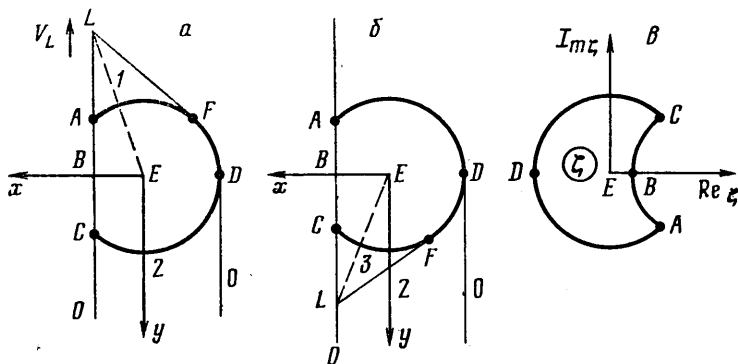
А. В. БУТКОВСКИЙ

(Москва)

В линейной постановке рассмотрены две плоские нестационарные автомодельные задачи, возникающие при подводе энергии в ударных волнах; получены распределения давления в возмущенных областях течений. В работе использованы результаты и методы широко применяющиеся в теории дифракции ударных волн [1-3].

1. Задача о нестационарном течении, возникающем при подводе энергии на полубесконечном участке прямого скачка уплотнения. Рассмотрим ударную волну, движущуюся со скоростью U по покоящемуся газу, имеющему плотность ρ_∞ , скорость звука a_∞ . Плотность, скорость звука и скорость газа за волной обозначим ρ_0 , a_0 и q_0 соответственно.

Пусть в момент времени $t=0$ на полубесконечном участке ударной волны OL (Фиг. 1, а, б) к газу начинает подводиться энергия с постоянной мощностью N' на единицу площади поверхности скачка, причем при $t>0$ точка L перемещается вдоль



Фиг. 1

скачка относительно невозмущенных линий тока с постоянной скоростью V_L . Рассмотрим возникающее течение в линейном приближении по малому параметру $N=2N'(\kappa-1)(\kappa+1)^{-1}(\rho_\infty U q_0 a_0)^{-1}$, где κ — показатель адиабаты. Систему координат x_0, y_0 свяжем с невозмущенным подводящим энергией газом за скачком уплотнения, направив ось x_0 по нормали к фронту скачка, а ось y_0 — параллельно скачку, чтобы точка $(0, 0)$ в момент времени $t=0$ совпадала с точкой L . В силу отсутствия характерного линейного размера решение данной задачи зависит только от двух безразмерных переменных $x=x_0/a_0 t, y=y_0/a_0 t$.

Для возмущенного давления p' справедливо волновое уравнение [1], которое, как известно, сводится преобразованием Чаплыгина $x=r \cos \theta, y=r \sin \theta, r=2R/(1+R^2)$ к уравнению Лапласа в полярных координатах R, θ ($R<1$). В дальнейшем будем рассматривать случай, когда точка L в плоскости xy находится в области $r>1$. Течение вне единичной окружности в областях 0-3, указанных на фиг. 1, а, б кусочно-одномерно. В частности, область 0 есть область невозмущенного подводом энергии газа за скачком уплотнения.

Решение одномерной задачи о распаде произвольного разрыва в горючей смеси [4] дает параметры течения в области 2. Решая систему линеаризованных уравнений сохранения на разрывах $LA(LC)$ и LF и используя условие непрерывности нормальной составляющей скорости на тангенциальном разрыве LE (фиг. 1, а, в), определяем параметры течения в областях 1 и 3. Подобные конфигурации описаны в работе [5]. Перейдем теперь к эллиптической области. Повторив выкладки [4] с необходимыми модификациями, учитывающими слабую детонацию в скачке, получим, что на дуге ABC , соответствующей в переменных Чаплыгина ударному фронту, справедливы формулы Лайтхилла [4]

$$(1.1) \quad \frac{\partial p / \partial n}{\partial p / \partial s} = \frac{A \operatorname{tg} \theta - B \operatorname{ctg} \theta}{\sqrt{1 - m^2 \sec^2 \theta}}, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{B}{y} \frac{\partial p}{\partial y}$$

$$A = \frac{M_\infty^2 + 1}{2M_\infty^2}, \quad B = \frac{\kappa + 1}{2} \frac{M_\infty^2 - 1}{2 + (\kappa - 1)M_\infty^2}$$

Здесь n и s — координаты вдоль внешней нормали и касательной, направленной против часовой стрелки, $M_\infty = U/a_\infty$, $p = p' / (\rho_0 a_0 q_0)$, $v = v' / q_0$, v' — возмущенная составляющая скорости газа вдоль оси y . С другой стороны, на участке CDA (фиг. 1, e) p есть кусочно-постоянная функция.

Рассмотрим отображение, переводящее двуугольник $ABCD$ плоскости $\zeta = R e^{i\theta}$ (фиг. 1, e) в верхнюю полуплоскость $\psi > 0$ плоскости $\omega = \varphi + i\psi$

$$\omega = - \frac{(e^{-i\alpha - \zeta})^2 e^{i2\alpha}}{(e^{i\alpha - \zeta})^2}, \quad \alpha = \arccos m, \quad m = \left[\frac{2 + (\kappa - 1)M_\infty^2}{2\kappa M_\infty^2 - \kappa + 1} \right]^{1/2}$$

Далее, применяя метод Лайтхилла [1, 3], построим аналитическую функцию $\Gamma(\omega) = \partial p / \partial \psi + i \partial p / \partial \varphi$, исходя из крайних условий на действительной оси $\psi = 0$.

На участке CDA ($\varphi < 0$) имеем

$$(1.2) \quad \frac{\partial p}{\partial \varphi} = K_D \delta(\varphi + 1) + K_F \delta(\varphi - \varphi_F), \quad \varphi_F = - \frac{(\cos \alpha - \cos \theta_F)^2}{(1 - \cos(\theta_F - \alpha))^2}$$

Здесь K_D и K_F — величины скачков давления в точках D и F , а θ_F — координата точки F в плоскости ζ .

В переменных (φ, ψ) первое соотношение (1.1) на ABC ($\varphi > 0$) принимает вид

$$\frac{\partial p / \partial \varphi}{\partial p / \partial \psi} = \frac{2\sqrt{\varphi} \sin \alpha / (\varphi + 1)}{A \operatorname{tg} \alpha (1 - \varphi) / (1 + \varphi) - B \operatorname{ctg} \alpha (1 + \varphi) / (1 - \varphi)}$$

Отсюда находим

$$(1.3) \quad \frac{\operatorname{Im} \Gamma(\varphi, 0)}{\operatorname{Re} \Gamma(\varphi, 0)} = \frac{4M_\infty^2 m \sqrt{\varphi} / (1 - \varphi)}{1 - 4M_\infty^2 \varphi (1 - \varphi)^{-2}} \quad (\varphi > 0)$$

Как нетрудно убедиться непосредственной проверкой, аналитическая функция $\Gamma(\omega)$, удовлетворяющая условиям (1.2), (1.3) и интегрируемая всюду в верхней полуплоскости, включая бесконечно удаленную точку, имеет вид

$$(1.4) \quad \Gamma = \frac{C_1(\omega - \varphi_F) + C_2(\omega + 1) + C_3(\omega - \varphi_F)(\omega + 1)}{(\omega + 1)(1 - \omega - 2a\sqrt{\omega}i)(1 - \omega - 2b\sqrt{\omega}i)(\omega - \varphi_F)}$$

$$C_1 = - \frac{4}{\pi} K_D (a + 1)(b + 1), \quad C_2 = - \frac{1}{\pi} K_F (1 - \varphi_F + 2a\sqrt{-\varphi_F})(1 - \varphi_F + 2b\sqrt{-\varphi_F})$$

$$a = M_\infty^2 m + \sqrt{M_\infty^4 m^2 - M_\infty^2}, \quad b = M_\infty^2 m - \sqrt{M_\infty^4 m^2 - M_\infty^2}$$

причем на действительной оси $\sqrt{\omega}$ в (1.4) при $\omega = \varphi > 0$ равен $\sqrt{\varphi}$.

Неизвестная постоянная C_3 однозначно определяется вторым условием в (1.1), записанным в интегральном виде. После соответствующего элементарного интегрирования получим

$$C_3 = - \left[\frac{\sqrt{1 - m^2} (v_C - v_A)}{B} + 4\pi M_\infty^2 m \left(\frac{\beta_1}{\sqrt{-\varphi_F}} + \sum_{i=1}^4 \frac{\beta_{i+1}}{\sqrt{\alpha_i}} \right) \right] \times$$

$$\times \left[4\pi M_\infty^2 m \sum_{i=1}^4 \frac{\gamma_i}{\sqrt{\alpha_i}} \right]^{-1}$$

$$\alpha_{1,2} = 2a^2 - 1 \pm 2a(a^2 - 1)^{1/2}, \quad \alpha_{3,4} = 2b^2 - 1 \pm 2b(b^2 - 1)^{1/2}$$

$$\beta_1 = C_2 \varphi_F (\varphi_F + 1) / \prod_{i=1}^4 (\alpha_i + \varphi_F), \quad \gamma_i = -\alpha_i (1 - \alpha_i) / \prod_{j=1}^4 (\alpha_j - \alpha_i)$$

$$\beta_{i+1} = \left[-C_1 \alpha_i + \frac{C_2 \alpha_i (1 - \alpha_i)}{\alpha_i + \varphi_F} \right] / \prod_{j=1}^i (\alpha_j - \alpha_i)$$

Штрих в символе взятия произведения означает исключение множителя с $j=i$; v_C и v_A — значения возмущенной скорости в точках C и A .

Для распределения давления в эллиптической области в соответствии с определением функции Γ после элементарного интегрирования получаем следующее выражение:

$$p = p_A - 2 \sum_{j=1}^8 K_j \operatorname{arccctg} \left[\frac{1}{\psi} \left(-\varphi + \sqrt{\varphi^2 + \psi^2} + \delta_j \sqrt{2} \sqrt{-\varphi + \sqrt{\varphi^2 + \psi^2}} \right) \right] + 2\pi(K_1 + K_3)$$

$$\delta_{1,2} = \mp 1, \delta_{3,4} = \mp \sqrt{-\varphi_F}, K_{1,2} = C_1(a \pm 1)^{-1}(b \pm 1)^{-1}/8$$

$$K_{3,4} = C_2(\varphi_F - 1 + 2a\delta_{3,4})^{-1}(\varphi_F - 1 + 2b\delta_{3,4})^{-1}/2, \delta_{j+4} = \sqrt{\alpha_j} \quad (j \geq 1)$$

$$K_j = (-1)^j N_{j-4} d_{j-4} (2b_{j-4} \delta_j - \delta_j^2 - 1)^{-1} \delta_j \quad (j > 4)$$

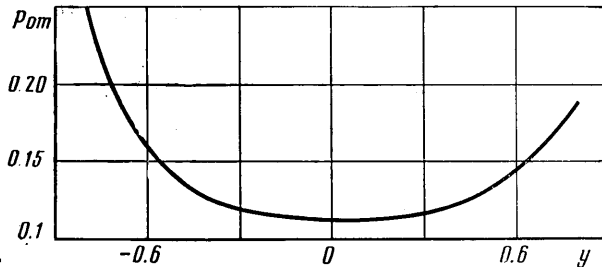
$$d_1 = d_2 = (\delta_6 - \delta_5)^{-1}, d_3 = d_4 = (\delta_8 - \delta_7)^{-1}, b_1 = b_2 = b, b_3 = b_4 = a$$

$$N_i = \frac{-C_1(\alpha_i + \varphi_F) + C_2(1 - \alpha_i) + C_3(\alpha_i - 1)(\alpha_i + \varphi_F)}{(\alpha_i - 1)(\varphi_F + \alpha_i)}$$

Здесь p_A — значение p в точке A .

На фиг. 2 показано распределение давления вдоль ударного фронта для $M_\infty = 2$ и $V_L/a_0 = 2$, подсчитанное по полученным формулам ($p_{om} = p/N$).

2. Задача о перестройке обтекания клина при подводе энергии в скачке уплотнения. Рассмотрим клин конечного угла раствора, который обтекается сверхзвуковым потоком с образованием присоединенного скачка уплотнения. При $t > 0$ на линии увеличивающемся со временем участке $OL = V_L t$ указанного скачка (фиг. 3, а)



Фиг. 2

к газу начинает подводиться энергия с постоянной мощностью N' на единицу площади поверхности. При $V_L \rightarrow \infty$ получаем задачу о внезапном выделении энергии во всем скачке уплотнения. Линеаризуем задачу по параметру N . Здесь и далее обозначения те же, что и в п. 1, и в частности U — скорость скачка относительно газа перед ним. Рассуждения, аналогичные проведенным выше, приводят к схеме течения, изображенной на фиг. 3, а. Течение вне единичной окружности кусочно-однородно. Число поверхностей разрыва зависит от величины $M_L = V_L/a_0$ и расположения невозмущенного скачка уплотнения.

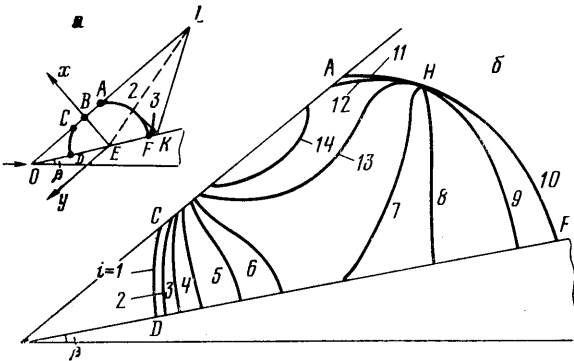
В случае, когда точка L расположена вне эллиптической области в автомодельных переменных, слабый разрыв LK лежит на касательной к единичной окружности, а точка K , так же как и в [2], находится либо на окружности, либо на поверхности клина. В последнем случае происходит отражение скачка LK от стенки, новый волновой фронт или касается окружности, или отражается от ударной волны и т. д. В области I (фиг. 3, а) течение совпадает с установившимся обтеканием клина детонационной волной [5]. Параметры течения в области 2 определяются так же, как и в

аналогичных областях в задаче п. 1; давление в области 3 связано с давлением в области 2 акустической формулой $p_3=2p_2$. Краевая задача для уравнения Лапласа в эллиптической области решена в [2].

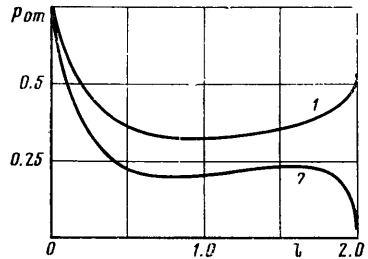
В соответствии с этим решением была составлена программа расчета распределения давления в возмущенной области. При проведении вычислений введенная в [2] функция $\Lambda(z)$, содержащая в показателе экспоненты медленно сходящийся вблизи ABC ряд, была преобразована к виду

$$\Lambda(z) = \prod_{n=0}^{\infty} \frac{(1-2q^{n+1/2} \operatorname{ch} z + q^{2n+1})^4}{\prod_{j=1}^4 (1-2q^{n+1/2} F_j \operatorname{ch} z + q^{2n+1} F_j^2)}$$

На фиг. 4 показано распределение давления на поверхности клина с углом полураствора $\beta=10^\circ$ в области дифракции при числе Маха набегающего потока $M=2$ как



Фиг. 3



Фиг. 4

функция l (расстояния от точки D в плоскости переменных x, y). Для кривых 1 и 2 $M_L=7.64$ и 2.39 соответственно.

На фиг 3, б построены линии постоянного давления в дифракционной области для случая одновременного выделения энергии во всем скачке при $\beta=10^\circ$ и $M=2$. Значения давления на изобарах приведены ниже.

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
P_{om}	0.829	0.670	0.585	0.496	0.416	0.381	0.367	0.383	0.431	0.510	0.255	0.295	0.331	0.285

В заключение автор благодарит М. Н. Когана за руководство работой, а также А. И. Голубинского и В. П. Колгана за полезные советы и ценное обсуждение.

Поступила 29 IX 1977

ЛИТЕРАТУРА

1. Lighthill M. J. The diffraction of blast, I. Proc. Roy. Soc., 1949, vol. A198, No. 1055.
2. Тер-Минасянц С. М. Дифракция плоской волны на клине, движущемся со сверхзвуковой скоростью. ПММ, 1971, т. 35, вып. 2.
3. Smyrl J. L. The impact of a shock-wave on a thin two-dimensional aerofoil moving at supersonic speed. J. Fluid. Mech., 1963, vol. 15, pt 2.
4. Бам-Зеликович Г. М. Распад произвольного разрыва в горючей смеси. В сб. «Теоретическая гидромеханика», М., Оборонгиз, 1949.
5. Черный Г. Г. Автомодельные задачи обтекания тел горючей смесью газов. Изв. АН СССР, МЖГ, 1966, № 6.