при высоких числах Рэлея формируются тепловой и динамический пограничные слои на стенке $x=1$, а температурное расслоение в центральном вертикальном сечении приближается к однородному с постоянным градиентом по высоте, характерному для слоя с непроницаемой границей [1].

Влияние проницаемости границы на среднюю теплоотдачу в обобщенной форме иллюстрирует фиг. 5, на которой дана обработка результатов расчетов в координатах $\gamma=\mathrm{Nu}/\mathrm{Nu}_0-\sigma$, где $\sigma=\eta(\mathrm{Ra}/h)^{1/2}$, а Nu_0 – среднее число Нуссельта для слоя со свободной границей. Кривые *1–5* отвечают значениям $h=1$, Ra=100; $h=1$, Ra=200; $h=1$, Ra=500; $h=3$, Ra=100; $h=10$, Ra=100. При $\sigma\leqslant 1$ теплоотдача близка к рассчитанной для слоя со свободной границей. Отношение $\mathrm{Nu}/\mathrm{Nu}_0$ монотонно убывает с ростом σ и при $\sigma\geqslant 10^2$ приближается к асимптотическому значению, близкому к 0.63, причем среднее число Нуссельта Nu стремится к предельному значению, соответствующему слою с непроницаемой границей.

Автор благодарен В. И. Полежаеву за руководство работой.

Поступила 16 IV 1977

ЛИТЕРАТУРА

1. *Власюк М. П., Полежаев В. И.* Естественная конвекция и перенос тепла в проницаемых пористых материалах. М., Препринт № 77 ин-та прикл. матем. АН СССР, 1975.
2. *Авдуевский В. С., Калашник В. Н., Копяткевич Р. М.* Исследование теплоотдачи при естественной конвекции в газонаполненных пористых средах при больших давлениях. Сб. «Тепломассообмен-5», т. 1. ч. 2. Минск, 1976.
3. *Jannot M., Naudin P., Viannay S.* Convection mixte en milieu poreux. Intern. J. Heat Mass Transfer, 1973, vol. 16, No. 2.
4. *Самарский А. А.* Введение в теорию разностных схем. М., «Наука», 1971.
5. *Федоренко Р. П.* Итерационные методы решения разностных эллиптических уравнений. Усп. матем. н., 1973, т. 28, № 2.

УДК 532.593

ПЛОСКАЯ ЗАДАЧА О ВОЛНОВЫХ ДВИЖЕНИЯХ, ВОЗНИКАЮЩИХ В НЕПРЕРЫВНО СТРАТИФИЦИРОВАННОЙ ЖИДКОСТИ ПРИ ОБТЕКАНИИ ПОГРУЖЕННОГО ТЕЛА [1]

И. В. СТУРОВА, В. А. СУХАРЕВ

(Новосибирск)

В линейной постановке исследована плоская стационарная задача о волновых движениях, возникающих при обтекании погруженных источника и стока равной мощности равномерным потоком тяжелой невязкой несжимаемой жидкости с произвольным непрерывным (устойчивым) изменением плотности по глубине. В [1] выполнен анализ структуры волнового движения в потоке при произвольном изменении плотности.

Рассмотрим плоскую стационарную задачу о волновых движениях, вызываемых наличием источника и стока равной мощности m, помещенных на глубине h от невозмущенной свободной поверхности $y=0$ горизонтального слоя жидкости $-\infty<x<\infty$, $-H\leqslant y\leqslant 0$. Отрезок прямой, соединяющий особенности, имеет длину $2a$ и параллелен оси x, совпадающей с направлением вектора скорости жидкости далеко вверх по потоку.

Считается, что в первом приближении обтекание такой комбинации источника и стока при достаточно большом погружении и относительно слабой стратификации эквивалентно (аналогично случаю безграничной однородной жидкости) обтеканию овала Ренкина. Максимальная полуширина тела R, его удлинение d и скорость основного потока U однозначно определяют величины $a_*=a/R$ и $m_*=m/UR$, удовлетворяющие уравнению (см., например, [2]) $a_*^2+a_*/\operatorname{arctg} a_*=d^2$, $m_*=\pi/\operatorname{arctg} a_*$.

В невозмущенном состоянии плотность жидкости является известной функцией $\rho_0(y)$, зависящей только от глубины.

---

[1] Работа доложена на первом советско-американском симпозиуме по внутренним волнам в океане (3–8 декабря 1976 г., Новосибирск).

В линейной постановке уравнения движения и граничные условия имеют вид

(1) $$u_x+v_y=m[\delta(x+a)-\delta(x-a)]\delta(y+h)$$
$$\rho_0 U u_x=-p_x,\quad \rho_0 U v_x=-p_y-g\rho,\quad U\rho_x+\rho_0' v=0$$
$$Up_x-g\rho_0 v=0\ (y=0),\ v=0\ (y=-H),\ u,\ v,\ p,\ \rho<\infty\ (x^2+y^2\to\infty)$$

Здесь u, v, p, ρ – возмущения компонент вектора скорости в направлении осей x, y, давления и плотности, вызванные наличием особенностей в первоначально невозмущенном течении, g – ускорение силы тяжести, δ – дельта-функция, штрих обозначает дифференцирование по y.

Функция $\eta(x,\ y)$, определяющая вертикальное отклонение жидкой частицы от невозмущенного состояния, удовлетворяет линеаризованному условию $\eta_x=v/U$.

Вводя безразмерные переменные

$$(x_*,y_*,h_*,H_*,\eta_*)=\frac{1}{R}(x,y,h,H,\eta)\qquad (u_*,v_*)=\frac{1}{U}(u,v)$$

сведем уравнения (1) к следующему одному уравнению и граничным условиям для функции v_* (звездочку снизу в дальнейшем опустим):

$$\Delta v+\gamma(y)(v_y-\nu v)=m[\delta(x+a)-\delta(x-a)][\delta'(y+h)+\gamma(y)\delta(y+h)]$$
$$v_y-\nu v=0\quad (y=0),\quad v=0\quad (y=-H),\quad v<\infty\quad (x^2+y^2\to\infty)$$
$$\gamma(y)=\rho_0'(y)/\rho_0(y),\quad \nu=gR/U^2$$

Применяя преобразование Фурье для действительных ξ и переходя к функции $w(\xi,\ y)$, получим

(2) $$Lw\equiv w''-\gamma_1(y)w=A(\xi,y)[\delta'(y+h)+\gamma(y)\delta(y+h)]$$
$$w'-\nu_1 w=0\ (y=0),\quad w=0\ (y=-H)$$

$$w(\xi,y)=\sqrt{\frac{\rho_0(y)}{\rho_0(-H)}}\,\bar v,\qquad \bar v(\xi,y)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-i\xi x}v(x,y)\,dx$$

$$\gamma_1(y)=\gamma_0(y)+\xi^2,\qquad \gamma_0(y)=\frac{1}{4}\gamma^2(y)+\frac{1}{2}\gamma'(y)+\nu\gamma(y)$$

$$A(\xi,y)=2im\sin(a\xi)\sqrt{\rho_0(y)/\rho_0(-H)},\quad \nu_1=\nu+\gamma(0)/2$$

Решение задачи (2) имеет вид

(3) $$w(\xi,y)=-A(\xi,-h)\begin{cases}W_1(\xi,y) & (-H\leqslant y<-h)\\ W_1(\xi,y)-W_2(\xi,y) & (-h\leqslant y\leqslant 0)\end{cases}$$

$$W_1(\xi,y)=\frac{W_2'(\xi,0)-\nu_1W_2(\xi,0)}{W_3'(\xi,0)-\nu_1W_3(\xi,0)}W_3(\xi,y)$$

Здесь функции W_2 и W_3 являются решениями задач Коши

(4) $$LW_2=0\,(-h\leqslant y\leqslant 0),\quad W_2(\xi,-h)=1,\quad W_2'(\xi,-h)=\gamma(-h)/2$$
$$LW_3=0\,(-H\leqslant y\leqslant 0),\quad W_3(\xi,-H)=0,\quad W_3'(\xi,-H)=1$$

В точке $y=-h$ функция w имеет скачок

$$w(\xi,-h+0)-w(\xi,-h-0)=A(\xi,-h)$$

Для любого фиксированного $y\in[-H,\ 0]\backslash\{-h\}$ функция $w(\xi,\ y)$ является аналитической всюду в комплексной плоскости ξ, за исключением, быть может, нулей аналитической функции $D(\xi)=W_3'(\xi,\ 0)-\nu_1W_3(\xi,\ 0)$. Нули этой функции равны собственным числам задачи Штурма – Лиувилля

(5) $$W''-\gamma_0(y)W=\lambda W,\quad W'-\nu_1W=0\,(y=0),\quad W=0\,(y=-H)$$

Здесь величина $\lambda=\xi^2$ играет роль спектрального параметра.

Известно (см., например, [3]), что множество собственных чисел этой задачи не более чем счетно, не имеет конечной предельной точки и все собственные числа простые и вещественные. Кроме того, множество собственных чисел задачи (5) ограничено сверху (все собственные числа лежат в интервале $(-\infty,\ \nu_1^2]$) и, следовательно, функция $D(\xi)$ на комплексной плоскости ξ имеет конечное число простых ненулевых вещественных нулей и счетное число чисто мнимых, расположенных симметрично относительно точки $\xi=0$.

При выполнении обратного преобразования Фурье контур интегрирования выбирается в соответствии с условием излучения и волновое движение на достаточном удалении от особенностей определяется вычетами в вещественных полюсах функции $D(\xi)$.

Искомое решение для функции $\eta(x, y)$ при $x\gg 1$ $(x>a)$ имеет вид

$$\eta(x,y)=\sum_k B(\xi_k,y)\sin(\xi_k x)$$

$$B(\xi,y)=4m\sin(a\xi)\sqrt{\frac{\rho_0(-h)}{\rho_0(y)}}\frac{W_2'(\xi,0)-\nu_1 W_2(\xi,0)}{\xi[W_4'(\xi,0)-\nu_1 W_4(\xi,0)]}W_3(\xi,y)$$

Здесь $W_4=W_{3\xi}$, $\xi_k^2=\lambda_k$ – положительные собственные числа задачи (5).

При исследовании внутренних волн в слабо стратифицированной жидкости часто используется приближение Буссинеска и свободная поверхность заменяется твердой «крышкой» (см., например, [5]). При введении приближения Буссинеска в уравнениях движения (1) функция $\rho_0(y)$ заменяется постоянным значением (например, $\rho_0(0)$), что приводит к следующим изменениям в (2), (4):

$$w(\xi,\ y)=\bar{v},\quad \gamma_0(y)=\nu\gamma(y),\quad A(\xi,\ y)=2im\sin a\xi,\quad \nu_1=\nu,\quad W_2'(\xi,\ -h)=0$$

При замене свободной поверхности твердой крышкой граничное условие при $y=0$ в (1) примет вид $v=0$ (аналогично в (2), (5)), в (3)

$$W_1(\xi,\ y)=W_2(\xi,0)W_3(\xi,\ y)/W_3(\xi,0),\quad D(\xi)=W_3(\xi,0)$$

При этом выпадут из рассмотрения поверхностные волны, обусловленные наличием свободной поверхности.

Предложенный метод решения данной задачи реализован численно и состоит из двух этапов: 1) определения положительных собственных значений λ_k задачи (5); 2) вычисления решений уравнения (4) для каждого найденного значения $\xi_k=\sqrt{\lambda_k}$ и решения системы уравнений и граничных условий, имеющих вид

$$LW_3=0,\quad LW_4=2\xi W_3$$

$$W_3(\xi,\ -H)=W_4(\xi,\ -H)=W_4'(\xi,\ -H)=0,\quad W_3'(\xi,\ -H)=1$$

Для нахождения собственных чисел дифференциальная задача заменялась интегральным уравнением с последующей интерполяцией искомой функции тригонометрическими полиномами (см. [6]) и с дальнейшим уточнением полученных собственных чисел методом пристрелки. Для численного решения обыкновенных дифференциальных уравнений применялся метод Рунге – Кутта пятого порядка с автоматическим выбором шага. В [4] предлагается для решения уравнений типа (4) использовать метод Нумерова.

Для исследования влияния изменения плотности на поведение волновых движений выполнены численные расчеты при следующих значениях исходных параметров: $U=1.5$ *см/сек*, $R=0.5$ *см*, $H=40$ *см*, $h=10$; 20 *см* ($\nu=218$, $H/R=80$, $h/R=20$; 40) и различных распределениях плотности по глубине

$$\rho_0(y)=\rho_0(0)\left\{1-\varepsilon\left[\frac{y}{H}-\frac{b}{2\pi n}\sin\left(\frac{2\pi n y}{H}\right)\right]\right\} \tag{6}$$

(при которых отношение $\rho_0(-H)/\rho_0(0)=1+\varepsilon$ сохраняется постоянным) для $n=5$, 10 $(b=1)$ и случая линейной стратификации $(b=0)$. В табл. 1 приведены значения волновых чисел ξ_k и амплитуд внутренних волн $B(\xi_k,\ y)$ при $y/R=0$, -20, -40, -60 для $d=1$ и $\varepsilon=0.1$, 0.01.

В табл. 1 не представлено волновое число, соответствующее наибольшему положительному собственному значению λ_{max} задачи (5) и обусловленное наличием свободной поверхности, так как во всех рассмотренных случаях оно с точностью до погрешности численного счета (в приведенных расчетах абсолютная погрешность не превышала 10^{-5}) совпадало со значением $\xi_{max}=\nu_1$, а амплитуды соответствующих волн не превышали 10^{-10}.

Как видно из табл. 1, различные распределения плотности по глубине при неизменном полном перепаде плотности существенно изменяют картину волнового движения. При $\varepsilon=0.01$ различие между случаями $n=10$ и линейной стратификацией значительно меньше, чем при $\varepsilon=0.1$.

Таблица 1

h/R		20				40			
k	ξ_k	y/R=0	-20	-40	-60	0	-20	-40	-60
					$n=5,\ \varepsilon=0.1$				
1	0.0911	0.0004	-0.4819	0.4438	-0.3466	-0.0001	0.0943	-0.0868	0.0678
2	0.3634	0.0000	0.0009	-0.0004	-0.0065	-0.0000	-0.0125	0.0057	0.0902
3	0.3805	-0.0000	0.0443	-0.0017	-0.0646	0.0001	-0.2749	0.0107	0.4005
4	0.3900	-0.0001	0.1194	0.0104	0.1175	0.0001	-0.1166	-0.0102	-0.1147
5	0.3977	-0.0001	0.0095	-0.0002	-0.0335	-0.0004	0.0703	-0.0014	-0.2473
6	0.4076	0.0001	0.1221	0.0047	-0.0149	0.0002	0.2331	0.0089	-0.0284
7	0.6093	-0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
8	0.6162	-0.0000	0.0000	-0.0000	0.0001	-0.0000	0.0000	-0.0001	0.0009
9	0.6230	0.0000	0.0002	-0.0145	-0.0002	0.0000	0.0001	-0.0085	-0.0001
10	0.6299	0.0000	0.1292	0.0125	0.0001	0.0000	-0.0007	-0.0001	0.0000
11	0.6368	-0.0000	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
					$n=10,\ \varepsilon=0.1$				
1	0.4854	0.0000	-0.0000	0.0001	0.0012	0.0001	-0.0008	0.0016	0.0303
2	0.5003	0.0000	-0.0034	0.0009	0.0081	0.0000	-0.0556	0.0146	0.1342
3	0.5098	0.0000	-0.0086	-0.0016	-0.0077	0.0001	-0.0881	-0.0162	-0.0796
4	0.5169	-0.0001	0.0159	0.0009	-0.0166	-0.0003	0.0863	0.0046	-0.0897
5	0.5249	-0.0001	-0.0106	-0.0094	0.0132	0.0000	0.0019	0.0017	-0.0024
6	0.5334	-0.0000	-0.0109	0.0002	0.0044	0.0001	0.0872	-0.0015	-0.0351
7	0.5411	0.0000	0.0087	0.0036	0.0101	0.0000	0.0082	-0.0034	0.0095
8	0.5477	0.0000	0.0124	-0.0038	-0.0197	-0.0001	-0.0318	0.0097	0.0504
9	0.5542	0.0000	-0.0003	0.0128	0.0075	-0.0000	0.0002	-0.0074	-0.0044
10	0.5621	0.0000	-0.0106	-0.0012	-0.0002	0.0000	-0.0198	-0.0022	-0.0004
					$b=0,\ \varepsilon=0.1$				
1	0.1938	0.0008	0.0734	-0.0963	0.0715	-0.0008	-0.0727	0.0953	-0.0708
2	0.2702	0.0004	-0.1141	0.2021	-0.1763	-0.0001	-0.0383	-0.0679	0.0592
3	0.3247	0.0001	-0.0434	0.0138	0.0433	0.0003	-0.1759	0.0558	0.1754
4	0.3670	-0.0001	0.0654	0.0709	0.0378	0.0001	-0.0448	-0.0486	-0.0259
5	0.4011	-0.0002	0.0343	0.0452	0.0343	-0.0002	0.0330	0.0435	0.0330
6	0.4289	-0.0001	-0.0392	-0.0822	-0.0829	-0.0001	-0.0187	-0.0392	-0.0395
7	0.4517	0.0000	-0.0285	-0.0158	0.0295	-0.0001	-0.0644	0.0356	-0.0665
8	0.4700	-0.0000	0.0197	-0.0172	0.0066	-0.0000	0.0351	-0.0306	0.0118
9	0.4843	-0.0000	0.0231	-0.0314	0.0267	0.0000	-0.0188	0.0255	-0.0217
10	0.4951	0.0000	-0.0015	0.0201	-0.0444	-0.0000	0.0012	-0.0156	0.0346
11	0.5032	0.0000	-0.0135	0.0268	0.0178	0.0000	-0.0048	0.0095	0.0063
12	0.5112	0.0000	-0.0020	-0.0009	-0.0002	0.0000	-0.0149	-0.0071	-0.0014
					$n=5,\ \varepsilon=0.01$				
1	0.0518	0.0004	0.3111	-0.4818	0.3144	0.0000	0.0040	-0.0063	0.0041
2	0.0904	0.0003	0.0884	-0.0081	-0.0782	-0.0001	-0.0458	0.0042	0.0405
3	0.1296	0.0000	-0.0185	0.0405	-0.0192	-0.0000	0.0009	-0.0020	0.0010
4	0.1540	-0.0000	0.0718	-0.0020	-0.0723	0.0000	-0.0603	0.0017	0.0607
5	0.1674	-0.0000	0.0537	0.0856	0.0517	0.0000	-0.0006	-0.0010	-0.0006
					$n=10,\ \varepsilon=0.01$				
1	0.0561	0.0003	0.0028	-0.0034	0.0029	-0.0004	-0.0031	0.0038	-0.0033
2	0.1178	0.0001	-0.0781	0.1012	-0.0795	-0.0000	0.0014	-0.0018	0.0014
3	0.1469	0.0000	-0.0010	0.0000	0.0010	0.0000	-0.0915	0.0015	0.0918
4	0.1618	-0.0000	0.0192	0.0245	0.0186	0.0000	-0.0007	-0.0009	-0.0007
					$b=0,\ \varepsilon=0.01$				
1	0.0494	0.0004	0.0030	-0.0041	0.0031	-0.0004	-0.0030	0.0041	-0.0031
2	0.1150	0.0001	-0.0804	0.1147	-0.0818	-0.0000	0.0013	-0.0018	0.0013
3	0.1447	0.0000	-0.0010	0.0000	0.0010	0.0000	-0.0851	0.0014	0.0854
4	0.1599	-0.0000	0.0195	0.0272	0.0189	0.0000	-0.0006	-0.0008	-0.0006

Таблица 2

h/R		20			40
k	ξ_k	y/R=−20	−40	−60	−20
			$\varepsilon=0.1$		
1	0.1265	−0.2339	0.2531	−0.2339	−0.0000
2	0.3956	0.0775	0.0000	−0.0775	−0.2324
3	0.3988	0.0557	0.0054	0.0557	−0.0000
4	0.4064	0.0055	0.0000	−0.0055	−0.1543
5	0.4143	0.0945	0.0071	0.0945	0.0000
6	0.4200	0.0692	0.0000	−0.0692	0.2996
7	0.6402	0.0251	−0.0699	0.0251	0.0000
8	0.6403	0.0172	0.0000	−0.0172	−0.0001
9	0.6406	0.0048	−0.0415	0.0048	0.0000
10	0.6409	0.0450	0.0000	−0.0450	−0.0004
11	0.6411	0.0323	0.1098	0.0323	0.0000
			$\varepsilon=0.01$		
1	0.0538	0.3076	−0.4739	0.3076	−0.0000
2	0.0915	0.0813	0.0000	−0.0814	−0.0427
3	0.1303	−0.0173	0.0372	−0.0173	0.0000
4	0.1546	0.0734	0.0000	−0.0734	−0.0602
5	0.1679	0.0521	0.0847	0.0521	0.0000

Для сравнения в табл. 2 представлены результаты, полученные для тех же исходных параметров с использованием приближения Буссинеска и заменой свободной поверхности твердой крышкой при $n=5$ [1]. В случае линейной стратификации при этих предположениях данная задача имеет аналитическое решение

$$\xi_k=\sqrt{\beta-\left[\frac{\pi(k+1)}{H}\right]^2}\quad (k=0,\ldots,N-1),\qquad N=E\left[\frac{H\sqrt{\beta}}{\pi}\right],\quad \beta=\nu\varepsilon/H$$

$$W_2(\xi_k,0)=\cos\left(\sqrt{\beta-\xi_k^2}h\right)=\cos\left(\pi(k+1)h/H\right)$$

$$W_3(\xi_k,y)=(-1)^{k+1}\frac{\sin\left(\sqrt{\beta-\xi_k^2}\,y\right)}{\sqrt{\beta-\xi_k^2}}=(-1)^{k+1}H\frac{\sin(\pi(k+1)y/H)}{\pi(k+1)}$$

$$W_{3\xi}(\xi_k,0)=\frac{(-1)^k\xi_kH}{(\beta-\xi_k^2)}=(-1)^k\frac{\xi_kH^3}{\pi^2(k+1)^2}$$

Здесь $E[\ \ ]$ – целая часть числа.

Как и следовало ожидать, расхождение между решениями полной и упрощенной задачи тем меньше, чем слабее стратификация.

Из приведенных решений при $d=1$ для кругового цилиндра нетрудно получить решения для других значений удлинения. Увеличение удлинения приводит к росту амплитуд внутренних волн, различному для разных распределений плотности.

Поступила 27 V 1977

ЛИТЕРАТУРА

1. *Доценко С. Ф.* О структуре волнового движения в потоке при произвольном изменении плотности по глубине. В сб. «Морские гидрофизические исследования», № 3 (62), Севастополь, 1973.
2. *Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В.* Теоретическая гидромеханика, ч. 1. М., Физматгиз, 1963.
3. *Левитан Б. М., Саргсян И. С.* Введение в спектральную теорию. М., «Наука», 1970.
4. *Крупин В. Д.* Некоторые свойства внутренних волн и численное решение уравнения Фиельстада. В сб. «Внутренние волны в океане». Новосибирск, 1972.
5. *Краусс В.* Внутренние волны. Л., Гидрометеоиздат, 1968.
6. *Алгазин С. Д., Бабенко К. И., Косоруков А. Л.* О численном решении задачи на собственные значения. Препринт ИПМ АН СССР, 1975, № 108.

[1] Для распределения плотности вида (6) при $h=H/2$ картина внутренних волн симметрична относительно плоскости $y=-H/2$.