УДК 532.546

ОБ ОДНОМ ЭКСПРЕСС-МЕТОДЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ ПАРАМЕТРОВ ПЛАСТОВ

Н. Н. ВЕРИГИН, В. С. САРКИСЯН, Ю. Л. ТАРОЩИН

(Москва)

Рассматривается задача об определении поля напоров при откачках и нагнетаниях воды. Даются точные и приближенные асимптотические решения, пригодные для больших и малых времен. На основании полученных зависимостей разработан метод определения параметров водоносного пласта.

Для быстрого определения коэффициента фильтрации и пьезопроводности водоносных пластов в настоящее время широкое применение получили так называемые экспресс-методы. Они основаны на наблюдениях за изменением уровня или давления в скважине после какого-либо возмущения поля напоров (давлений) подземных вод. Чаще всего это возмущение осуществляется посредством весьма быстрой (мгновенной) откачки, налива или нагнетания воды в скважину. По данным этих наблюдений определяются параметры пород и пластов. Экспресс-опыты могут осуществляться как во время бурения скважины, так и при проведении специальных опытно-фильтрационных работ. Экспресс-методы проще и менее трудоемки при проведении опытов по сравнению с другими методами. Однако параметры, определенные экспресс-методом, обычно характеризуют призабойную зону скважины, и поэтому распространение этих данных на большие массивы не представляется возможным.

Будем считать, что при проведении опытов скважина закреплена обсадными трубами. Тогда можно принять, что после возмущения приток или отток воды в скважине происходит через дно, имеющее форму полусферы. Движение подземных вод вблизи скважины описывается в этом случае следующими уравнением и краевыми условиями:

$$a\partial^2(sr)/\partial r^2=\partial(sr)/\partial t \tag{1}$$

$$\begin{cases} 2k\xi\, \partial s(r_0,t)/\partial r = \partial s(r_0,t)/\partial t, \qquad s(\infty,t)=0 \\ s(r,0)=\begin{cases} s_0, & r\leqslant r_0 \\ 0, & r>r_0 \end{cases} \end{cases} \tag{2}$$

Здесь $s=H_e-H$ при откачке, $s=H-H_e$ при нагнетании, a – коэффициент пьезопроводности, s – понижение (повышение) уровня, H_e – напор воды в естественных условиях, r_0 – радиус скважины, k – коэффициент фильтрации, t – время, H – напор в момент времени t, s_0 – понижение (повышение) уровня в скважине в момент времени $t=0$.

При размещении рабочей части скважины у кровли пласта в (2) принимается $\xi=1$, при размещении внутри пласта $\xi=2$. Влияние кровли (подошвы) на производительность водозабора подробно рассмотрено в [1].

В дальнейшем будет исследован случай откачки. Однако полученные зависимости действительны и для случая нагнетания, если считать, что s – повышение уровня в скважине.

Применяя к уравнению (1) и краевым условиям (2) преобразование Карсона – Хевисайда, найдем [2]

$$ad^2(\bar{s}r)/dr^2=p\bar{s}r \tag{3}$$

$$2k\xi d\bar{s}(r_0,p)/dr=p[\bar{s}(r_0,p)-s_0], \qquad \bar{s}(\infty,p)=0 \tag{4}$$

Здесь p – параметр преобразования.

Решение уравнения (3) имеет вид

$$\bar{s}r=A\exp(-r\sqrt{p/a})+B\exp(r\sqrt{p/a}) \tag{5}$$

Определяя из условий (4) коэффициенты и вводя их в (5), получим

$$\bar{s}=\psi p\exp(-\alpha\sqrt{p})/(p+\beta\sqrt{p}+\gamma) \tag{6}$$

$$\psi=s_0r_0/r, \quad \alpha=(r-r_0)/\sqrt{a}, \quad \beta=2k\xi/\sqrt{a}, \quad \gamma=2k\xi/r_0 \tag{7}$$

Для нахождения оригинала функции $\bar{s}$ представим (7) в виде

$$\bar{s}=\psi\left[\frac{A_1 p\exp(-\alpha\sqrt{p})}{\sqrt{p}-z_1}+\frac{A_2 p\exp(-\alpha\sqrt{p})}{\sqrt{p}-z_2}\right] \tag{8}$$

$$A_{1,2}=\mp i/2\eta \tag{9}$$

$$z^2+\beta z+\gamma=0,\quad z_{1,2}=\delta\pm i\eta,\quad \delta=-0.5\beta,\quad \eta=0.5\sqrt{4\gamma-\beta^2},\quad \beta=2k\xi/\sqrt{a},\quad \gamma=2k\xi/r_0 \tag{10}$$

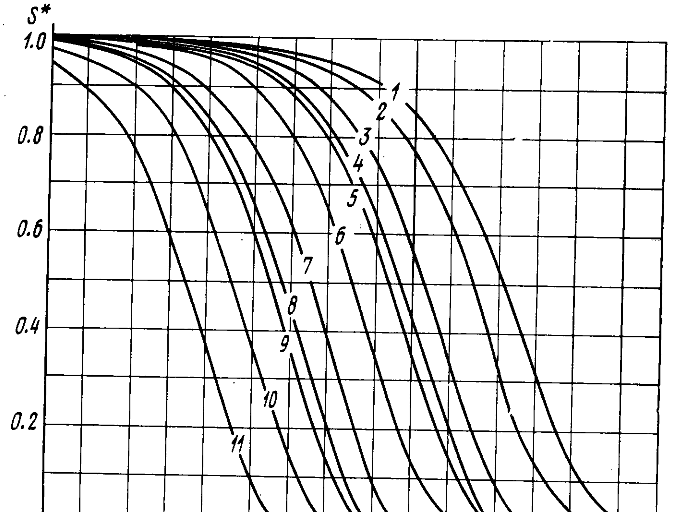
Из второй зависимости (10) следует, что корни $z_{1,2}$ будут действительны, если $r_0>2a/k\xi$. В реальных условиях обычно $r_0<2a/k\xi$; следовательно, $\beta^2-4\gamma<0$ и корни уравнения (10) будут комплексными.
Вводя (9) в уравнение (8), получим

$$\bar{s}=-\frac{\psi i}{2\eta}\left[\frac{p\exp(-\alpha\sqrt{p})}{\sqrt{p}-z_1}-\frac{p\exp(-\alpha\sqrt{p})}{\sqrt{p}-z_2}\right] \tag{11}$$

Переходя к оригиналу функции, найдем [2]

$$s=-\frac{\psi i}{2\eta}\left[z_1\exp(z_1^2t-\alpha z_1)\operatorname{erfc}\left(\frac{\alpha}{2\sqrt{t}}-z_1\sqrt{t}\right)-\right.$$
$$\left.-z_2\exp(z_2^2t-\alpha z_2)\operatorname{erfc}\left(\frac{\alpha}{2\sqrt{t}}-z_2\sqrt{t}\right)\right] \tag{12}$$

Здесь $z_{1,2}$ определяется формулой (10).



Фиг. 1

Для вычисления функции $\operatorname{erfc} z$ от комплексного аргумента рассматривается следующая функция [3]:

$$W(z)=u(x,y)+iv(x,y)=\exp(-z^2)\left[1+\frac{2i}{\sqrt{\pi}}\int_0^z\exp(t^2)\,dt\right] \tag{13}$$

$$z=x+iy,\quad W(iz)=\exp(z^2)\operatorname{erfc} z \tag{14}$$

$$\operatorname{erfc} z=\exp(-z^2)W(iz)=\exp(-z^2)\left[u(-y,x)+iv(-y,x)\right] \tag{15}$$

Функции u и v обладают следующими свойствами:

$$u(-y,x)=u(y,x),\qquad v(-y,x)=-v(y,x) \tag{16}$$

С учетом зависимости (13)–(16) решение (12) примет вид

(17) $$s=(\psi/\eta)\exp(-\alpha^2/4t)[\eta u(\eta\sqrt{t},\ \alpha/2\sqrt{t}-\delta\sqrt{t})+\delta v(\eta\sqrt{t},\ \alpha/2\sqrt{t}-\delta\sqrt{t})]$$

Здесь все обозначения указаны ранее в (7) и (10).

Значение функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$ находятся по таблицам, приведенным, например, в [3, 4].

Понижение уровня воды в скважине определяется из (17) при $r=r_0$, т. е.

(18) $$s^*=s/s_0=u(\sqrt{b(c-1)},\ \sqrt{b})-1/\sqrt{c-1}\,v(\sqrt{b(c-1)},\ \sqrt{b})$$

(19) $$b=\frac{k^2\xi^2}{a}t,\qquad c=\frac{2}{r_0}\frac{a}{k\xi}$$

На фиг. 1 приводятся значения функции $s^*=f(c, b)$, вычисленные по (18). Кривым *1–11* соответствуют значения параметра $c=10^2$, $2\cdot10^2$, $5\cdot10^2$, $8\cdot10^2$, 10^3, $2\cdot10^3$, $5\cdot10^3$, $8\cdot10^3$, 10^4, $2\cdot10^4$, $5\cdot10^4$.

Для упрощения определения коэффициента фильтрации k и пьезопроводности a по формуле (18) на фиг. 2 представлены вспомогательные графики зависимости t_1/t_2 от параметра c для отношений $b_{0.5}/b_{0.9}$; $b_{0.2}/b_{0.8}$ и $b_{0.1}/b_{0.9}$. Здесь, например, значению $b_{0.5}$ соответствует изменение уровня $s^*=0.5$ и время t_1, а $b_{0.9}-s^*=0.9$ и время t_2.

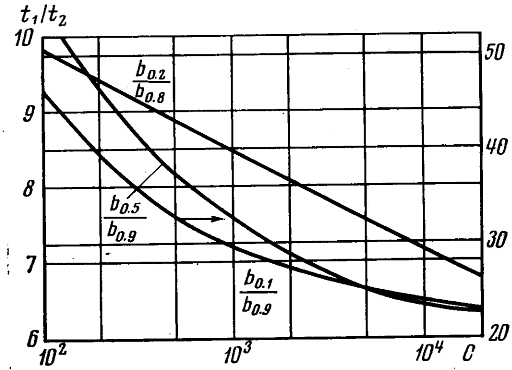
Параметры a и k с использованием фиг. 1 и 2 определяются следующим образом. Сначала по экспериментальной кривой $s^*=f(t)$ определяются значения $s_{1,2}^*$, соответствующие времени $t_{1,2}(t_1>t_2,\ s_1^*<s_2^*)$. Затем находится значение отношения t_1/t_2. Далее по известному соотношению t_1/t_2 и соответствующему графику фиг. 2 определяется значение параметра c и при помощи фиг. 1 по известным c и s_1^* (или s_2^*) находится значение параметра b.

Коэффициенты фильтрации и пьезопроводности при известных b и c определяются из соотношений

(20) $$k=r_0bc/2t\xi,\qquad a=r_0^2bc^2/4t$$

Здесь значению времени t соответствует t_1 при определении параметра b по s_1^* и t_2, если b определяется по s_2^*.

Если скважина оборудована коротким фильтром, то для определения параметров k и a в приведенных выше формулах принимается, что $r_0=\sqrt{r_c l}/\xi$, где r_c и l – радиус и длина фильтра скважины.



Фиг. 2

Уровень в скважине после мгновенной откачки восстанавливается достаточно быстро. Параметры β и γ в основном находятся в интервалах $10^{-2}\leqslant\beta\leqslant1$ и $2\leqslant\gamma\leqslant2000$. Имея в виду эти обстоятельства, можно пренебречь членом $\beta\sqrt{p}$ в знаменателе уравнения (6). Тогда переходя к оригиналу функции для малых t (больших p), найдем

(21) $$s=\psi\exp(-\alpha^2/4t)\,u(\sqrt{\gamma t},\ {}^1\!/_2\alpha/\sqrt{t})$$

где ψ и α определяются формулами (7).

Понижение в скважине определяется при $r=r_0$ и равно

(22) $$s=s_0\exp(-\gamma t)=s_0\exp(-2k\xi t/r_0)$$

Из (22) находим коэффициент фильтрации

(23) $$k=\frac{r_0}{2\xi t}\ln\frac{s_0}{s}$$

Формулы (21)–(23) применимы при условии

(24) $$\beta\sqrt{p}\leqslant\sigma p$$

где σ – задаваемая точность.

Из (24) находим условие применимости соотношений (21)–(23)

(25) $t \leqslant \sigma^2/\pi\beta^2 = a\sigma^2/4\pi k^2\xi^2$

Если в (25) принять $\sigma=0.1$, $a=10^5$ *м²/сутки*, $k=10$ *м/сутки*, $\xi=1$, то получим $t=0.8$ *сутки*. Отсюда следует, что при таких условиях формулы (21)–(23) пригодны для $t \leqslant 0.8$ *сутки*.

Для больших t (малых p), когда $t > a\sigma^2/4\pi k^2\xi^2$, в знаменателе (6) можно пренебречь членом p. В этом случае, переходя к оригиналу функции, получим

(26) $$s^* = \frac{r_0}{r}\exp(\alpha\beta+\beta^2 t)\,\mathrm{erfc}\left(\frac{\alpha}{2\sqrt{t}}+\beta\sqrt{t}\right)$$

Понижение уровня в самой скважине определяется по (26) при $r=r_0$ $(\alpha=0)$

(27) $s^* = \exp(\beta^2 t)\,\mathrm{erfc}(\beta t)$

где α, β выражаются по (7).

Если $\alpha/2\sqrt{t}+\beta\sqrt{t} \leqslant 0.3$, то с точностью не менее 5% выражение (26) при $r=r_0$ будет

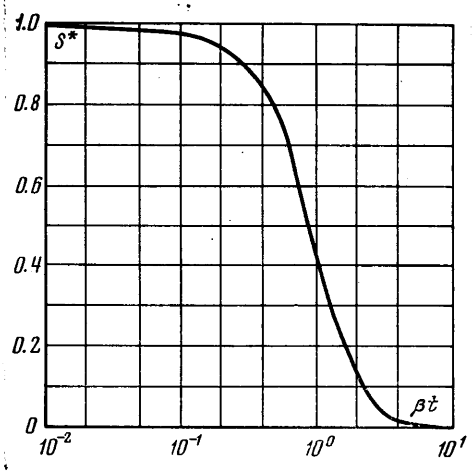
(28) $s^* = (1-4T/\sqrt{\pi})\exp(4T^2)$, $T=kt/\sqrt{at}$, $s^*=s/s_0$

График функции $s^*=f(\beta t)$ приводится на фиг. 3. Имея фактические данные об изменении уровня в скважине $s^*=f(t)$ для принятых $s_1^*=f(t_1)$, по фиг. 3 находим значения βt_1. Учитывая, что $\beta=2k\xi/\sqrt{a}$, получим

(29) $a=4\xi^2 k^2/\beta^2$

Из (29) следует, что в этом случае по асимптотике находится только соотношение $k/\sqrt{a}$.

По формуле (23) можно также определить положение статического уровня водоносных пластов H_e. При вскрытии скважинами напорных пластов уровень воды сначала быстро, а потом все медленнее и медленнее поднимается, стремясь к положению статического уровня. Для сильнопроницаемых пластов процесс восстановления обычно является непродолжительным, а для малопроницаемых пластов он длится достаточно долго. Большой практический интерес представляет определение положения естественного статического уровня скважин без длительных наблюдений за восстановлением уровня воды в них.



Фиг. 3

Запишем (23) в виде

(30) $(H_e-H)/(H_e-H_0)=\exp(-\gamma t)$

где H – напор в скважине в любой момент времени, H_e – напор в естественных условиях, H_0 – напор в скважине при $t=0$, т. е. сразу после откачки, налива или вскрытия напорного пласта.

Из (30) для момента времени $t=t_1$, $H=H_1$ находим

(31) $H_e=[H_1-H_0\exp(-\gamma t_1)]/[1-\exp(-\gamma t_1)]$, $\gamma=2k\xi/r_0$

Если в (30) принять $t=t_1$, t_2 и $H=H_1$, H_2, то из полученных двух уравнений можно определить коэффициент фильтрации k и положение статического уровня H_e.

Поступила 11 VI 1975

ЛИТЕРАТУРА

1. *Веригин Н. Н., Васильев С. В., Саркисян В. С., Шержуков Б. С.* Гидродинамические и физико-химические свойства горных пород. М., «Недра», 1977.
2. *Диткин В. А., Прудников А. П.* Справочник по операционному исчислению. М., «Высшая школа», 1965.
3. *Карслоу Г., Егер Д.* Теплопроводность твердых тел. М., «Наука», 1964.
4. *Фадеева В. Н., Терентьев Н. М.* Таблицы значений интеграла вероятностей от комплексного аргумента. М., Гостехиздат, 1954.