

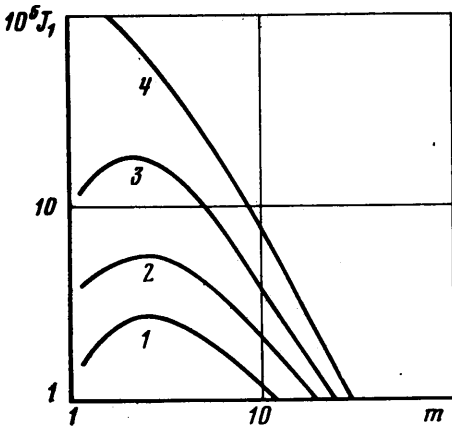
Здесь $S = G/\rho_1 d_1 U_0^2$ – безразмерный коэффициент поверхностного натяжения. Возмущения предполагаем длинноволновыми, что дает возможность искать решение в виде разложений по степеням волнового числа

$$(10) \quad \varphi_\gamma = \chi_{0\gamma} + \alpha \chi_{1\gamma} + \dots, \quad \omega_* = \Omega_0 + \alpha \Omega_1 + \dots, \quad C = C_0 + \alpha C_1 + \dots$$

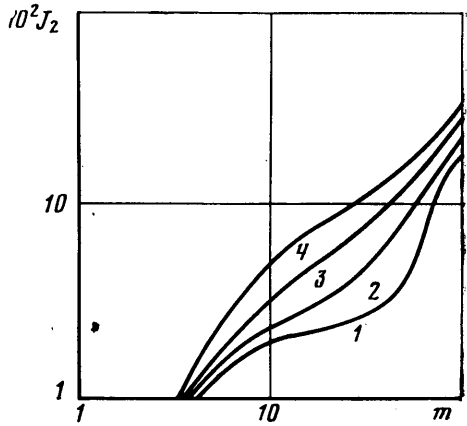
Ограничиваясь двумя приближениями для собственного значения $C = C_r + iC_i$, получим, что $C_r = C_0$, $iC_i = \alpha C_1$. При этом

$$(11) \quad C_i = \alpha R J_k(m, n, r, E)$$

В формуле (11) $k=1$ соответствует течению Куэтта, $k=2$ – течению Пуазейля. Пусть плотности слоев будут одинаковыми ($r=1$). Волны на поверхности раздела жидкостей существуют, когда $m \neq 1$. В этом случае, каково бы ни было число



Фиг. 1



Фиг. 2

Рейнольдса, характер течения будет определяться поведением функций $J_k(m, n, E)$. Для определенности будем считать, что $m > 1$. Зависимость J_1 и J_2 от m при значениях $E=0, 0.1, 1, 10$ (кривые 1–4) приведена на фиг. 1 и 2 для $n=0.1$ и 1 соответственно.

Из приведенного численного анализа видна дестабилизирующая роль вращательной инерции жидкости. Кривые для $E=0$ соответствуют течению двух вязких жидкостей [3]. Несимметричность тензора силовых напряжений, как показывают вычисления, основанные на двух приближениях, не оказывает влияния на устойчивость течений.

Поступила 11 VI 1976

ЛИТЕРАТУРА

1. Grad H. Statistical mechanics, thermodynamics and fluid dynamics of systems with arbitrary number of integrals. *Comm. Pure Appl. Math.*, 1952, vol. 5, No. 4.
2. Гроот С. Р., Мазур П. Неравновесная термодинамика. М., «Мир», 1964.
3. Yih C. Sh. Instability due to viscosity stratification. *J. Fluid Mech.*, 1967, vol. 27, pt 2.
4. Листров А. Т. Об устойчивости течения слоя жидкости модели Грэда по наклонной плоскости. *Изв. АН СССР, МЖГ*, 1966, № 6.

УДК 532.516

ВИХРЬ У ПОВЕРХНОСТИ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

М. В. ЗАВОЛЖЕНСКИЙ, А. Х. ТЕРСКОВ

(Ростов-на-Дону)

Решается система уравнений Навье – Стокса при граничных условиях, соответствующих случаю, когда у поверхности тяжелой вязкой несжимаемой жидкости бесконечной глубины действует осесимметричная касательная трансверсальная нагрузка. Получено интегральное представление для формы свободной поверхности

при длительном действии на нее стационарной вихревой нагрузки. Рассмотрен пример касательной нагрузки, близкой к сосредоточенному вихрю. В этом случае из жидкости выдавливается столб, высота которого прямо пропорциональна квадрату момента трансверсальных касательных усилий и обратно пропорциональна квадрату произведения динамической вязкости жидкости на площадь распределения касательных напряжений. Определяется глубина образующейся перед столбом кольцевой воронки.

1. Допустим, что тяжелая вязкая несжимаемая жидкость, занимающая полупространство $z' \leq 0$, до момента времени $t' = 0$ покоилась. Пусть при $t' \geq 0$ на свободной поверхности стали действовать трансверсальные осесимметричные касательные напряжения $\omega' = \omega'(r', t')$ в неподвижной цилиндрической системе координат r', θ, z' , начало которой лежит на невозмущенной свободной поверхности $z' = 0$, а ось z' направлена против вектора силы тяжести. В этой системе осесимметричная задача о движении жидкости, вызванном указанными возмущениями на ее поверхности, состоит в определении скорости $v' = \{v_r', v_\theta', v_z'\}$ и гидродинамического давления p' как функций r', z', t' из уравнений Навье - Стокса при заданных на неизвестной свободной поверхности $z' = \zeta'(r', t')$ нормальных и касательных составляющих тензора напряжений и при условии обращения в нуль искомых функций при $z' \rightarrow -\infty$. (Легко показать, что атмосферное давление можно принять нулевым.)

$$(1.1) \quad \frac{\partial v'}{\partial t'} + (v' \cdot \nabla) v' = -\nabla \left(\frac{p'}{\rho} + gz' \right) + \nu \nabla^2 v', \quad \nabla \cdot v' = 0$$

$$(1.2) \quad -p' + 2\mu \frac{\partial v_z'}{\partial z'} \Big|_{z'=\zeta'} = 0, \quad \frac{\partial v_z'}{\partial r'} + \frac{\partial v_r'}{\partial z'} \Big|_{z'=\zeta'} = 0,$$

$$\mu \frac{\partial v_\theta'}{\partial z'} \Big|_{z'=\zeta'} = -\omega'(r', t')$$

В начальный момент

$$(1.3) \quad t' = 0, \quad v' = 0, \quad \zeta' = 0$$

Неизвестная свободная поверхность ζ' удовлетворяет уравнению

$$(1.4) \quad \frac{\partial \zeta'}{\partial t'} = v_z' - v_r' \frac{\partial \zeta'}{\partial r'} \Big|_{z'=\zeta'}$$

Положим

$$(1.5) \quad \Omega = \max_{r', t'} |\omega'(r', t')|, \quad \omega = \frac{\omega'}{\Omega}, \quad u = \frac{v_r' \Omega^4}{\rho g^3 \mu^3}, \quad v = \frac{v_\theta' \Omega}{g \mu}, \quad w = \frac{v_z' \Omega^4}{\rho g^3 \mu^3}$$

$$R = \frac{\rho^2 \mu^4 g^4}{\Omega^6}, \quad \zeta = \frac{\zeta' \Omega^8}{\rho^2 g^5 \mu^6}, \quad r = \frac{r' \Omega^2}{g \mu^2}, \quad z = \frac{z' \Omega^2}{g \mu^2} - R \zeta,$$

$$t = \frac{t' \Omega^4}{\rho g^2 \mu^3}, \quad p = \frac{p' \Omega^2}{\rho g^2 \mu^2} + z + R \zeta$$

Запишем уравнения (1.1) в цилиндрических координатах и перейдем (1.1) - (1.4) к безразмерным переменным (1.5). Тогда

$$(1.6) \quad \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{v^2}{r} + R f_1(u, w, p, \zeta, R)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + R f_2(u, v, w, \zeta, R)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} - \frac{\partial p}{\partial z} + R f_3(u, w, p, \zeta, R)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial(ur)}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial z} = R f_4(u, w, \zeta, R), \quad \frac{\partial \zeta}{\partial t} = w|_{z=0} + R f_5(u, \zeta, R)$$

$$\frac{\partial v}{\partial z} \Big|_{z=0} = -\omega(r, t) + R f_6(v, \zeta), \quad -p + R \zeta + 2 \frac{\partial w}{\partial z} \Big|_{z=0} = R f_7(w, \zeta, R)$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r} \Big|_{z=0} = Rf_8(u, w, \zeta, R); \quad u=v=w=\zeta=0 \quad \text{при} \quad t=0$$

где $f_j, j=1, 2, \dots, 8$, — нелинейные дифференциальные операторы не выше второго порядка.

Разложение операторов f_j по степеням u, v, w, p, ζ и их производных начинается с членов второго порядка. При $R=0$ все f_j ограничены. Поэтому при малых числах Рейнольдса R к (1.6) применим метод последовательных приближений, причем за нулевое приближение следует взять решение уравнений, получаемых из (1.6) отбрасыванием чисто нелинейных членов порядка $O(R)$ и выше

$$(1.7) \quad \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}, \quad \frac{\partial v}{\partial z} \Big|_{z=0} = -\omega(r, t), \quad v|_{t=0} = 0$$

$$(1.8) \quad \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{v^2}{r}, \quad \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r} \Big|_{z=0} = 0$$

$$(1.9) \quad \frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} - \frac{\partial p}{\partial z}, \quad \frac{1}{r} \frac{\partial(ur)}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

$$(1.10) \quad -p + R\zeta + 2 \frac{\partial w}{\partial z} \Big|_{z=0} = 0, \quad \frac{\partial \zeta}{\partial t} = w|_{z=0}, \quad u=w=\zeta=0, \quad t=0$$

Число $R = \rho^2 \mu^4 g^4 \Omega^{-8}$ является малым параметром: при нагрузке Ω , равной всего 1 н/м^2 , $R \sim 0.01$ для воды. Поэтому решения точной системы (1.6) будут достаточно близки к нулевому приближению, основанному на уравнениях (1.7)–(1.10).

При решении следует иметь в виду, что безразмерное время $t = \Omega^4 t' \rho^{-1} g^{-2} \mu^{-3}$ является большим параметром при не слишком малых t' (при $\Omega \sim 1 \text{ н/м}^2$ $t \sim 10^4 t' \text{ сек}$).

2. Для определения трансверсальной скорости применим к (1.7) преобразование Лапласа – Карсона по t и Ханкеля первого порядка по r

$$v \leftrightarrow V(r, z, \sigma) = \sigma \int_0^\infty v(r, z, t) e^{-\sigma t} dt, \quad \omega_1(s, t) = \int_0^\infty r \omega(r, t) J_1(rs) dr$$

Получим для V_1 обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка по z с постоянными коэффициентами и краевое условие. Отсюда в классе функций, исчезающих при $z \rightarrow -\infty$, найдем

$$V_1 = - \frac{\Omega_1(s, \sigma)}{\sqrt{\sigma + s^2}} e^{z\sqrt{\sigma + s^2}}$$

Как известно [1]

$$\frac{\sigma \exp[-\sqrt{z^2(\sigma + s^2)}]}{\sqrt{\sigma + s^2}} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \exp\left(-s^2 t - \frac{z^2}{4t}\right)$$

Поэтому по теореме о свертке

$$v = - \int_0^t \int_0^\infty \frac{s \omega_1(s, t-\tau)}{\sqrt{\pi \tau}} J_1(rs) \exp\left(-s^2 \tau - \frac{z^2}{4\tau}\right) ds d\tau$$

Подставив ω_1 , используем интеграл [2]

$$\int_0^\infty s e^{-s^2 \tau} J_1(rs) J_1(xs) ds = \frac{1}{2\tau} I_1\left(\frac{rx}{2\tau}\right) \exp\left(-\frac{x^2 + r^2}{4\tau}\right)$$

где I_1 — функция Макдональда первого рода.

Тогда

$$v = - \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^t \int_0^\infty x \tau^{-3/2} \omega(x, t-\tau) I_1\left(\frac{rx}{2\tau}\right) \exp\left(-\frac{x^2 + r^2 + z^2}{4\tau}\right) dx d\tau$$

Допустив, что $\omega(r, t) = \omega(r)$, и перейдя к пределу $t \rightarrow \infty$, найдем трансверсальные скорости точек жидкости при длительном действии стационарной вихревой нагрузки у поверхности

$$v(r, z, \infty) = -\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} x \omega(x) \int_0^{\infty} \tau^{-1/2} I_1\left(\frac{rx}{2\tau}\right) \exp\left(-\frac{x^2+r^2+z^2}{4\tau}\right) d\tau dx$$

Внутренний интеграл выражается [3] через функцию Лежандра $Q_{1/2}$

$$(2.1) \quad v(r, z, \infty) = -\frac{1}{\pi\sqrt{r}} \int_0^{\infty} \sqrt{x} \omega(x) Q_{1/2}\left(\frac{x^2+r^2+z^2}{2rx}\right) dx$$

3. Применим к (1.8)–(1.10) преобразование Лапласа–Карсона по t . Затем в (1.8) используем преобразование Ханкеля первого порядка, а в (1.9) и (1.10) – преобразование Ханкеля нулевого порядка по r . Учтем, что

$$\left(\frac{1}{r} \frac{\partial(ur)}{\partial r}\right)_0 = su_1, \quad \left(\frac{\partial w}{\partial r}\right)_1 = -sw_0$$

Тогда для определения изображений получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений (по z) и краевых условий с постоянными коэффициентами. Из этой системы найдем изображения в классе функций, исчезающих при $z \rightarrow -\infty$

$$(3.1) \quad U_1 = -\frac{1}{s} \frac{dW_0}{dz}, \quad P_0 = \frac{1}{s^2} \frac{d^3W_0}{dz^3} - \frac{\sigma+s^2}{s^2} \frac{dW_0}{dz} - \frac{1}{s} F_1(s, z, \sigma)$$

$$Z_0 = \frac{1}{\sigma} W_0$$

$$F_1(s, z, \sigma) = \sigma \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} v^2(r, z, t) e^{-\sigma t} J_1(rs) dr dt$$

Здесь функция W_0 обращается в нуль при $z \rightarrow -\infty$ и удовлетворяет уравнению и краевым условиям

$$(3.2) \quad LW_0 \equiv \frac{dW_0}{dz^4} - (\sigma+2s^2) \frac{d^2W_0}{dz^2} + s^2(\sigma+s^2)W_0 = s \frac{dF_1}{dz}$$

$$(3.3) \quad \sigma \frac{d^3W_0}{dz^3} - \sigma(\sigma+3s^2) \frac{dW_0}{dz} - s^2RW_0 \Big|_{z=0} = \sigma s F_1(s, 0, \sigma)$$

$$\frac{d^2W_0}{dz^2} + s^2W_0 \Big|_{z=0} = 0$$

Положим

$$(3.4) \quad W_0 = \Psi_0 + \Phi_0$$

Здесь в соответствии с (3.2) и (3.3) Φ_0 – решение неоднородного уравнения, равное нулю при $z \rightarrow -\infty$ и удовлетворяющее однородным краевым условиям

$$L\Phi_0 = s \frac{dF_1}{dz}, \quad \frac{d^3\Phi_0}{dz^3} \Big|_{z=0} = \frac{d\Phi_0}{dz} \Big|_{z=0} = 0$$

Ψ_0 – решение однородного уравнения, равное нулю при $z \rightarrow -\infty$ и удовлетворяющее неоднородным краевым условиям

$$(3.5) \quad L\Psi_0 = 0, \quad \frac{d^2\Psi_0}{dz^2} + s^2\Psi_0 \Big|_{z=0} = -\frac{d^2\Phi_0}{dz^2} - s^2\Phi_0 \Big|_{z=0}$$

$$\sigma \frac{d^3\Psi_0}{dz^3} - \sigma(\sigma+3s^2) \frac{d\Psi_0}{dz} - s^2R\Psi_0 \Big|_{z=0} = \sigma s F_1 + s^2R\Phi_0 \Big|_{z=0}$$

Соответствующая функция Φ_0 определяется интегралом Фурье

$$\Phi_0 = s \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{-\infty}^0 \frac{H(s, x, \sigma) \cos zx dx}{(x^2+s^2)(x^2+s^2+\sigma)}, \quad H = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{-\infty}^0 \frac{dF_1(s, z, \sigma)}{dz} \cos zx dx$$

Выражение для Ψ_0 имеет вид

$$\Psi_0 = A e^{sz} + B e^{z\sqrt{\sigma+s^2}}$$

где постоянные A и B определяются из условий (3.5).

Подставим найденные значения Ψ_0 и Φ_0 в (3.4) и используем результат в (3.1). Упростим полученное соотношение с помощью равенства Парсеваля и интегрирования по частям. Тогда для изображения формы свободной поверхности найдем

$$(3.6) \quad Z_0 = -s \int_{-\infty}^0 \left(e^{xs} + \frac{2s}{\sigma} (s e^{xs} - \sqrt{\sigma+s^2} e^{x\sqrt{\sigma+s^2}}) \right) \times \\ \times (Rs + (\sigma+2s^2)^2 - 4s^3 \sqrt{\sigma+s^2})^{-1} F_1(s, x, \sigma) dx$$

4. Определение формы свободной поверхности сводится к изучению свойств оригинала преобразования Лапласа – Карсона от дроби, фигурирующей под интегралом в выражении (3.6). Это исследование проводится с помощью замены $\sqrt{\sigma+s^2} = qs$, в результате которой рассматриваемая дробь превращается в мероморфную функцию параметра q . Разлагая эту функцию на простейшие дроби, возвращаясь к переменной σ и переходя к оригиналам, по теореме о свертке из (3.6) получим явное выражение для формы свободной поверхности. Из ее свойств отметим одно: всякий раз, когда существует интегрируемый по s и z предел при $t \rightarrow \infty$ изображения по Ханкелю функции $v^2(r, z, t)/r$, существует и предел при $t \rightarrow \infty$ выражения $\xi(r, t)$. Следовательно, этот предел можно получить, устремляя к нулю параметр σ в формуле (3.6) с последующим переходом к оригиналу по Ханкелю

$$(4.1) \quad \xi(r) = \lim_{t \rightarrow \infty} \xi(r, t) = \frac{1}{R} \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty x s^2 e^{-xs} J_0(rs) J_1(\rho s) v^2(\rho, -x, \infty) dx d\rho ds$$

Рассмотрим частный случай нагрузки на поверхность, когда трансверсальные касательные напряжения отличны от нуля внутри круга $r' \leq a'$ и имеют в нем постоянное значение Ω . В безразмерных переменных (1.5)

$$(4.2) \quad \omega(r) = \begin{cases} 1, & 0 \leq r \leq a \\ 0, & r > a \end{cases}, \quad a = a' \Omega^2 / g \mu^2$$

Используем (4.2) в (2.1)

$$(4.3) \quad v(r, z, \infty) = -\frac{1}{\pi \sqrt{r}} \int_0^a \sqrt{x} Q_{1/2} \left(\frac{r^2 + x^2 + z^2}{2rx} \right) dx$$

Ограничимся исследованием интегралов (4.1) и (4.3) при $a \rightarrow 0$. Тогда функцию $Q_{1/2}$ можно заменить асимптотическим выражением для больших значений аргумента и получить

$$Q_{1/2}(z) = \int_0^\infty \frac{d\varphi}{(z + \sqrt{z^2 - 1} \operatorname{ch} \varphi)^{1/2}} \sim \frac{\pi}{4z \sqrt{2z}}, \quad z \rightarrow \infty \\ v(r, z, \infty) \sim -\frac{r}{2} \int_0^a \frac{x^2 dx}{(r^2 + z^2 + x^2)^{1/2}} \sim -\frac{a^3 r}{6(r^2 + z^2 + a^2)^{1/2}}, \quad a \rightarrow 0$$

С учетом этого результата из (4.1) найдем

$$\xi(r) \sim \frac{a^3}{36R} \int_0^\infty \int_0^\infty x s^2 e^{-xs} J_0(rs) \int_0^\infty \frac{\rho^2 J_1(\rho s) d\rho}{(\rho^2 + x^2 + a^2)^3} ds dx, \quad a \sim 0$$

Внутренний интеграл вычисляется двукратным дифференцированием соотношения

$$\int_0^\infty \frac{\rho^2 J_1(\rho s)}{\rho^2 + \xi^2} d\rho = \xi K_1(\xi s)$$

по ξ при $\xi = \sqrt{x^2 + a^2}$ (K_1 – функция Макдональда) [2].

В результате

$$(4.4) \quad \zeta(r) \sim \frac{a^6}{288R} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{xs^4 e^{-xs}}{\sqrt{a^2+x^2}} J_0(rs) K_1(s\sqrt{a^2+x^2}) ds dx, \quad a \sim 0$$

Этот интеграл сходится при всех $a > 0$. При $a=0$ заменой $xs=y$ он сводится к повторным интегралам, из которых внутренний сходится, а внешний расходится как интеграл от x^{-5} . Поэтому основной вклад в асимптотическое разложение (4.4) при $a \rightarrow 0$ дает окрестность точки $x=s=0$. Следовательно, экспонента под интегралом не влияет на его асимптотическое поведение при $a \rightarrow 0$ и может быть заменена единицей

$$\zeta(r) \sim \frac{a^6}{288R} \int_0^\infty s^4 J_0(rs) \int_0^\infty \frac{x K_1(s\sqrt{a^2+x^2})}{\sqrt{a^2+x^2}} dx ds, \quad a \sim 0$$

Внутренний интеграл равен $s^{-1} K_0(as)$ [3]. Отсюда

$$\zeta(r) \sim \frac{a^6}{288R} \int_0^\infty s^3 J_0(rs) K_0(as) ds, \quad a \sim 0$$

Далее используем формулу

$$\int_0^\infty x K_0(ax) J_0(rx) J_0(zx) dx = \frac{1}{\sqrt{a^2+(r-z)^2} \sqrt{a^2+(r+z)^2}}$$

Дифференцируя дважды по z , при $z=0$ получим требуемый интеграл. Таким образом, форма свободной поверхности при длительном воздействии на нее постоянных трансверсальных касательных напряжений, сосредоточенных на окружности малого радиуса a , определяется соотношениями

$$(4.5) \quad \zeta(r) \sim \frac{a^6}{72R} \frac{a^2-r^2}{(a^2+r^2)^3},$$

$$\zeta'(r') \sim \zeta'_{\max} \left[1 - \left(\frac{r'}{a'} \right)^2 \right] \left[1 + \left(\frac{r'}{a'} \right)^2 \right]^{-3}, \quad a' \sim 0$$

Здесь второе соотношение записано в размерных переменных (1.5) и (4.2); $\zeta'_{\max} = \zeta'(0)$; $\zeta'_{\max} = a'^2 \Omega^2 / 72g\mu^2 = T^2 / 72\pi g\mu^2 S = M^2 / 72g\mu^2 S^2$, $S = \pi a'^2$ — площадь, на которой распределены касательные напряжения Ω ; $T = \Omega S$ — суммарные трансверсальные касательные усилия на поверхности; $M = T a'$ — момент трансверсальных касательных усилий.

При $r' = a'\sqrt{2}$ функция (4.5) имеет минимум $\zeta'_{\min} = -\zeta'_{\max} / 27$. При $r' > a'\sqrt{2}$ $\zeta'(r') \rightarrow 0$.

О размерах этих возмущений поверхности жидкости можно судить по следующему примеру. Если у поверхности воды на площади $S = 0.03 \text{ м}^2$ (круг диаметра 19.5 см) действуют касательные усилия с моментом $M = 0.01 \text{ нм}$, то из воды выдавливается столб высотой $\zeta'_{\max} = 158 \text{ м}$. Перед этим столбом образуется кольцевая воронка глубиной 5.8 м.

Поступила 28 II 1977

ЛИТЕРАТУРА

1. Диткин В. А., Прудников А. П. Справочник по операционному исчислению. М., «Высшая школа», 1965.
2. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции, т. 2. М., «Наука», 1974.
3. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., Физматгиз, 1962.