**МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 4 • 1978**

УДК 532.5:532.135

О ВЛИЯНИИ МИКРОСТРУКТУРЫ ЖИДКОСТИ НА УСТОЙЧИВОСТЬ ПЛОСКИХ ДВУХСЛОЙНЫХ ТЕЧЕНИЙ

С. М. АЛЕЙНИКОВ, А. Т. ЛИСТРОВ

(Воронеж)

Исследуется устойчивость плоских двухслойных течений Куэтта и Пуазейля, для которых нижним слоем служит жидкость модели Греда, а верхним – вязкая ньютоновская жидкость. Возмущения считаются длинноволновыми, при этом анализ строится через разложение по волновым числам и ограничен двумя приближениями. Проведены численные расчеты для некоторых значений параметров. Из расчетов следует, что вращательная инерция жидкости нижнего слоя оказывает дестабилизирующее влияние на течение.

Для модели жидкости Грэда [1, 2], учитывающей спин молекул, в каждой точке материального континуума наряду с обычным вектором скорости определен вектор угловой скорости ω, внутренние моментные напряжения пренебрежимо малы, и тензор силовых напряжений в общем случае несимметричен. Модель характеризуется обычной ньютоновской вязкостью μ_2, неньютоновской вязкостью η и временем релаксации $T=\rho_2 J/4\eta$, где J – скалярная константа с размерностью момента инерции единицы массы.

Обозначим через U_0 характерную скорость течения. Для течения Куэтта в качестве U_0 возьмем скорость движения верхней пластины. Для течения Пуазейля характерной скоростью будет служить скорость течения на поверхности раздела жидкостей.

Уравнения движения слоев приведем к безразмерному виду. Уравнение Навье – Стокса и уравнения для нижнего слоя имеют вид

$$\frac{d\mathbf{V}_1}{d\tau} = -\operatorname{grad} p_1 + \frac{1}{R}\Delta\mathbf{V}_1 + \mathbf{f}, \qquad R = \frac{\rho_1 U_0 d_1}{\mu_1} \tag{1}$$

$$\frac{d\mathbf{V}_2}{d\tau} = -\frac{1}{r}\operatorname{grad} p_2 + \frac{m}{rR}\Delta\mathbf{V}_2 + \frac{m}{RDr}\operatorname{rot}[2\omega - \operatorname{rot}\mathbf{V}_2] + \mathbf{f} \tag{2}$$

$$\frac{d\omega}{d\tau} = -\frac{m}{r}\frac{1}{EDR}[2\omega - \operatorname{rot}\mathbf{V}_2]$$

Видно, что движение нижнего слоя помимо числа Рейнольдса за счет асимметрии тензора напряжений и вращательной инерции жидкости характеризуется числами $D=\mu_2/\eta$ и $E=J/2d_1^2$; величины $m=\mu_2/\mu_1$, $r=\rho_2/\rho_1$, $n=d_2/d_1$ определяют соотношение между вязкостями, плотностями и глубинами слоев, $\tau=tU_0/d_1$ – безразмерное время, g – ускорение силы тяжести, $F=U_0/\sqrt{gd_1}$ – число Фруда, $\mathbf{f}=(0, -F^{-2}, 0)$.

Жидкости считаем несжимаемыми

$$\operatorname{div}\mathbf{V}_\gamma = 0 \tag{3}$$

Здесь и далее $\gamma=1, 2$.

Уравнения стационарного течения при условиях прилипания жидкости к твердым стенкам и непрерывности скоростей и касательных напряжений на поверхности раздела жидкостей дают распределение скоростей в слоях, не отличающееся от случая течения двух вязких жидкостей с изломом профиля скорости вследствие вязкостной стратификации [3].

Стационарное течение исследуем на устойчивость относительно бесконечно малых возмущений. Как показано в [4], для рассматриваемых течений будет справедлива теорема Сквайра, которая позволяет ограничиться рассмотрением плоских возмущений вида

$$q(x,y,\tau)=Q(y)\exp[i\alpha(x-C\tau)] \tag{4}$$

где $Q(y)$ – амплитудная функция возмущений, зависящая от вертикальной координаты y; α и αC – волновое число и комплексная частота возмущений.

Включение в рассмотрение вязкостной и плоскостной стратификаций, а также поверхностного натяжения ведет к увеличению числа неустойчивых состояний по сравнению с однородным потоком.

Для анализа устойчивости движение представим в виде основного и возмущенного течений и введем функцию тока с помощью соотношений

$$u_\gamma=U_\gamma+u_\gamma', \quad v_\gamma=v_\gamma', \quad p_\gamma=P_\gamma+p_\gamma', \quad \omega_3=\omega_3^0+\omega_3' \tag{5}$$

$$u_\gamma'=\partial\psi_\gamma/\partial y, \qquad v_\gamma'=-\partial\psi_\gamma/\partial x \tag{6}$$

Линеаризуя обычным образом уравнения (1)–(3), будем предполагать согласно (4) следующую зависимость для возмущений:

$$(\psi_\gamma, p_\gamma', \omega_3')=\{\varphi_\gamma(y), f_\gamma(y), \omega_*(y)\}\exp[i\alpha(x-C\tau)] \tag{7}$$

Исключая p_γ' для каждого слоя перекрестным дифференцированием, приходим к уравнению Орра – Зоммерфельда для верхнего слоя и обобщенному уравнению для нижнего слоя

$$\begin{gathered}
\varphi_1^{IV}-2\alpha^2\varphi_1''+\alpha^4\varphi_1=i\alpha R[(U_1-C)(\varphi_1''-\alpha^2\varphi_1)-\varphi_1U_1''] \\
\varphi_2^{IV}-2\alpha^2\varphi_2''+\alpha^4\varphi_2=\frac{2}{D+1}(\alpha^2\omega_*-\omega_*'')+ \\
+i\alpha\frac{RD}{D+1}\frac{r}{m}[(U_2-C)(\varphi_2''-\alpha^2\varphi_2)-\varphi_2U_2''] \\
\omega_*=L\left[\frac{1}{RDE}\frac{m}{r}(\alpha^2\varphi_2-\varphi_2'')+i\alpha\varphi_2\frac{d\omega_3^0}{dy}\right] \\
L=\left[\frac{2}{RDE}\frac{m}{r}+i\alpha(U_2-C)\right]^{-1}
\end{gathered} \tag{8}$$

К системе уравнений (8) следует еще присоединить условия затухания возмущений на твердых стенках и кинематические и динамические условия на поверхности раздела жидкостей

$$\begin{gathered}
\varphi_1(1)=\varphi_1'(1)=\varphi_2(-n)=\varphi_2'(-n)=0, \quad \varphi_1(0)=\varphi_2(0) \\
\varphi_1'(0)-\varphi_2'(0)=\frac{\varphi_2(0)}{C-U_1(0)}[U_2'(0)-U_1'(0)] \\
\alpha^2\varphi_1(0)+\varphi_1''(0)=m\left\{[\alpha^2\varphi_2(0)+\varphi_2''(0)]+\right. \\
\left.+\frac{1}{D}[2\omega_*(0)-(\alpha^2\varphi_2(0)-\varphi_2''(0))]\right\} \\
m\left(\frac{D+1}{D}\right)\left(\varphi_2'''-\alpha^2\frac{3D+1}{D+1}\varphi_2'\right)+i\alpha Rr[(C-U_2)\varphi_2'+\varphi_2U_2']+ \\
+2m\frac{1}{D}\omega_*'=(\varphi_1'''-3\alpha^2\varphi_1')+i\alpha R[(C-U_1)\varphi_1'+\varphi_1U_1']+ \\
+\frac{i\alpha R}{C-U_1}[(r-1)F^{-2}+\alpha^2S]\varphi_1 \qquad (y=0)
\end{gathered} \tag{9}$$

Здесь $S=G/\rho_1 d_1 U_0^2$ – безразмерный коэффициент поверхностного натяжения.

Возмущения предполагаем длинноволновыми, что дает возможность искать решение в виде разложений по степеням волнового числа

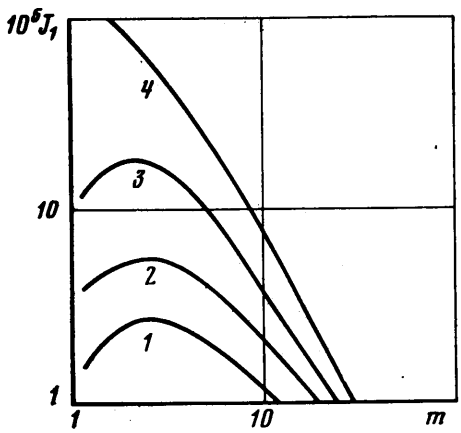
(10) $$\varphi_\gamma=\chi_{0\gamma}+\alpha\chi_{1\gamma}+\ldots, \quad \omega_*=\Omega_0+\alpha\Omega_1+\ldots, \quad C=C_0+\alpha C_1+\ldots$$

Ограничиваясь двумя приближениями для собственного значения $C=C_r+iC_i$, получим, что $C_r=C_0$, $iC_i=\alpha C_1$. При этом

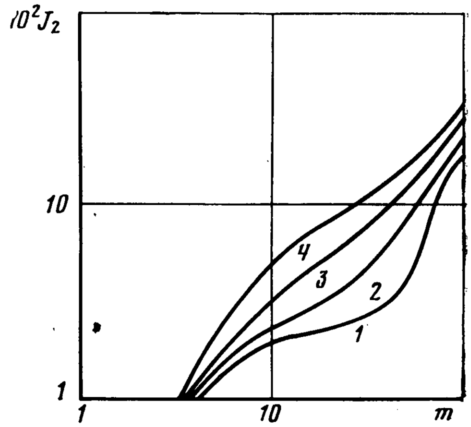
(11) $$C_i=\alpha RJ_k(m, n, r, E)$$

В формуле (11) $k=1$ соответствует течению Куэтта, $k=2$ – течению Пуазейля.

Пусть плотности слоев будут одинаковыми ($r=1$). Волны на поверхности раздела жидкостей существуют, когда $m\neq1$. В этом случае, каково бы ни было число



Фиг. 1



Фиг. 2

Рейнольдса, характер течения будет определяться поведением функций $J_k(m, n, E)$. Для определенности будем считать, что $m>1$. Зависимость J_1 и J_2 от m при значениях $E=0$, 0.1, 1, 10 (кривые *1–4*) приведена на фиг. 1 и 2 для $n=0.1$ и 1 соответственно.

Из приведенного численного анализа видна дестабилизирующая роль вращательной инерции жидкости. Кривые для $E=0$ соответствуют течению двух вязких жидкостей [3]. Несимметричность тензора силовых напряжений, как показывают вычисления, основанные на двух приближениях, не оказывает влияния на устойчивость течений.

Поступила 11 VI 1976

ЛИТЕРАТУРА

1. *Grad H.* Statistical mechanics, thermodynamics and fluid dynamics of systems with arbitrary number of integrals. Comm. Pure Appl. Math., 1952, vol. 5, No. 4.
2. *Гроот С. Р., Мазур П.* Неравновесная термодинамика. М., «Мир», 1964.
3. *Yih C. Sh.* Instability due to viscosity stratification. J. Fluid Mech., 1967, vol. 27, pt 2.
4. *Листров А. Т.* Об устойчивости течения слоя жидкости модели Грэда по наклонной плоскости. Изв. АН СССР, МЖГ, 1966, № 6.

УДК 532.516

ВИХРЬ У ПОВЕРХНОСТИ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

М. В. ЗАВОЛЖЕНСКИЙ, А. Х. ТЕРСКОВ

(*Ростов-на-Дону*)

Решается система уравнений Навье – Стокса при граничных условиях, соответствующих случаю, когда у поверхности тяжелой вязкой несжимаемой жидкости бесконечной глубины действует осесимметричная касательная трансверсальная нагрузка. Получено интегральное представление для формы свободной поверхности