МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 4 • 1978

УДК 533.6.011.8

МЕДЛЕННОЕ ВРАЩЕНИЕ СФЕРЫ В ОГРАНИЧЕННОМ ОБЪЕМЕ РАЗРЕЖЕННОГО ГАЗА

Л. П. СМИРНОВ, В. В. ЧЕКАЛОВ

(Москва)

Рассматривается осесимметричное движение газа в ограниченном объеме между внешней неподвижной поверхностью вращения и соосной с ней поверхностью вращающейся сферы. Решение проводится моментным методом на основе уравнения Больцмана с интегралом столкновений для максвелловских молекул.

При произвольных числах Кнудсена и внешней поверхности общего вида получено распределение скоростей газа и выражение для момента сил трения, действующего на сферу. Показана пропорциональность скорости скольжения газа по поверхности сферы напряжению трения. Исследован момент сил трения для частных видов внешней поверхности.

Рассмотрена задача о движении газа, заполняющего пространство между двумя концентрическими сферами, каждая из которых вращается вокруг произвольной оси.

В предельном случае малых чисел Кнудсена полученные выражения сравниваются с соответствующими результатами для сплошной среды.

1. Рассматривается движение разреженного газа, заполняющего пространство между поверхностью вращения и сферой радиуса r_1, с центром на оси поверхности (фиг. 1). Введем сферическую систему координат r, φ, θ с началом, совпадающим с центром сферы. Ось $\varphi=0$ направлена по оси вращения. Поверхность вращения задается уравнением $r=S(\varphi)$, где функция $S(\varphi)$ однозначная, определенная на всем интервале $0\leqslant\varphi\leqslant\pi$, в конечном числе точек может обращаться в бесконечность, а вне этих точек гладкая. Кроме того, $S(\varphi)>r_1$, сфера и поверхность не имеют общих касательных. Предполагается, что сфера равномерно вращается вокруг оси $\varphi=0$ с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}_1$. Газ считается изотермическим с температурой T.

Движение разреженного газа описывается уравнением Больцмана

$$\nabla\cdot(\mathbf{c}nf)=\Delta_c nf \tag{1.1}$$

где $\mathbf{c}$ — молекулярная скорость, n — молекулярная числовая плотность, $\Delta_c nf$ — больцмановский интеграл столкновений, f — функция распределения скоростей молекул.

Принимаем диффузный закон отражения молекул газа от поверхностей, ограничивающих область течения [1]. Тогда граничные условия на поверхности сферы и на поверхности вращения

$$nf(\mathbf{c})=nf_0(\mathbf{c},T,\boldsymbol{\omega}_1\times\mathbf{r}),\quad r=r_1\quad \mathbf{c}\cdot\mathbf{r}>0 \tag{1.2}$$

$$nf(\mathbf{c})=nf_0(\mathbf{c},T,0),\quad r=S(\varphi),\quad \mathbf{c}\cdot\mathbf{n}_s>0 \tag{1.3}$$

Здесь $f_0(\mathbf{c},T,\boldsymbol{\omega}_1\times\mathbf{r})$ — максвелловская функция распределения для газа с температурой T и макроскопической скоростью $\boldsymbol{\omega}_1\times\mathbf{r}$, $\mathbf{n}_s$ — единичный вектор нормали к поверхности $r=S(\varphi)$, направленный внутрь газа.

Для решения уравнения Больцмана с заданными граничными условиями применим развитый Лизом моментный метод [2], дающий удовлетворительные результаты при подходящем выборе параметров аппроксимирующих функций [3–5].

Момент некоторой величины Q, являющейся функцией компонент молекулярной скорости $\mathbf{c}$, определяется обычным образом

$$\langle Q\rangle=\int\limits_{-\infty}^{\infty} Q(\mathbf{c},\mathbf{r})f(\mathbf{c})\,d\mathbf{c} \tag{1.4}$$

Из уравнения Больцмана следует:

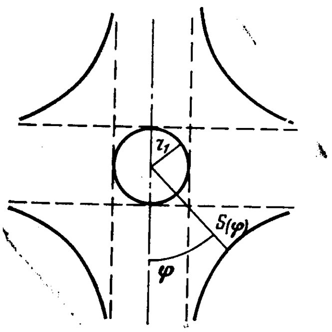
$$\nabla(n\langle Q\mathbf{c}\rangle)-n\langle \mathbf{c}\cdot\nabla Q\rangle=\Delta_c Q,\quad \Delta_c Q=\int\limits_{-\infty}^{\infty} Q\Delta_c nf\,d\mathbf{c} \tag{1.5}$$

В рассматриваемой задаче движение симметрично относительно оси $\varphi=0$ и все производные по θ равны нулю.

Вектор молекулярной скорости $\mathbf{c}$ в любой точке (r,φ,θ) определяется относительно координатных линий углом α между векторами $\mathbf{c}$ и $\mathbf{r}$ и углом β между направлением (φ) и проекцией вектора $\mathbf{c}$ на плоскость (φ,θ).

Отсюда

$$c_r=c\cos\alpha,\qquad c_\varphi=c\sin\alpha\cos\beta,$$
$$c_\theta=c\sin\alpha\sin\beta$$



Фиг. 1

В соответствии с методом моментов рассматриваем разрывную функцию распределения скоростей молекул. На поверхность вращения $r=S(\varphi)$ условия наложены таким образом, что в рассматриваемой области течения газа функция распределения в каждой точке имеет только одну поверхность разрыва — поверхность конуса влияния сферы, определяемого соотношением

$$\alpha<\psi=\arcsin(r_1/r)$$

Функцию распределения молекулярных скоростей вне и внутри конуса влияния аппроксимируем двухпоточным максвелловским распределением с двумя неизвестными функциями положения

$$nf(\mathbf{c})=\begin{cases} nf_0(\mathbf{c},T,\mathbf{c}_1), & \alpha<\psi\\ nf_0(\mathbf{c},T,\mathbf{c}_2), & \alpha>\Psi\end{cases} \tag{1.6}$$

$$\mathbf{c}_{1,2}=W_{1,2}(r,\varphi)\mathbf{i}_\theta,\qquad n=\text{const}$$

где $\mathbf{i}_\theta$ — единичный вектор в направлении θ.

Для определения функций W_1, W_2 выбираем моментные уравнения, соответствующие функциям $Q=c_\theta$ и $Q=c_rc_\theta$, в предположении максвелловских молекул. Из (1.5) имеем

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2n\langle c_rc_\theta\rangle)+\frac{1}{r\sin\varphi}\frac{\partial}{\partial\varphi}(\sin\varphi\, n\langle c_\varphi c_\theta\rangle)+ \tag{1.7}$$
$$+\frac{n\langle c_rc_\theta\rangle}{r}+\operatorname{ctg}\varphi\frac{n\langle c_\varphi c_\theta\rangle}{r}=0$$

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2n\langle c_r^2c_\theta\rangle)+\frac{1}{r\sin\varphi}\frac{\partial}{\partial\varphi}(\sin\varphi\, n\langle c_rc_\varphi c_\theta\rangle)-\frac{n\langle c_\varphi^2c_\theta\rangle}{r}-$$

$$-\frac{n\langle c_\theta^3\rangle}{r}+\frac{n\langle c_r^2c_\theta\rangle}{r}+\operatorname{ctg}\varphi\frac{n\langle c_rc_\varphi c_\theta\rangle}{r}=-\frac{n}{\lambda}\left(\frac{\pi kT}{2m}\right)^{1/2}\langle V_rV_\theta\rangle \tag{1.8}$$

где k — постоянная Больцмана, m — масса молекулы, $\mathbf{V}=\mathbf{c}-\langle\mathbf{c}\rangle$, λ — длина свободного пробега молекул.

Обозначим $g=(kT/2\pi m)^{1/2}$. Тогда средняя тепловая скорость молекул будет $2g$.

Для вычисления моментов функции распределения используем предположение об относительно медленном течении $\omega_1r_1\ll 2g$. Вводя вязкость газа $\mu=2\lambda gmn$, получим для числа Рейнольдса, рассчитанного по длине свободного пробега

$$\mathrm{Re}_\lambda=\lambda mn\omega_1r_1/\mu\ll 1 \tag{1.9}$$

Оставляя в выражениях моментов только линейные относительно Re_λ члены, получим

$$\begin{gathered}
n\langle c_\theta\rangle=ng\{w_+/2-{}^3/_4[1-(r_1/r)^2]^{1/2}w_-+{}^1/_4[1-(r_1/r)^2]^{3/2}w_-\}\\
n\langle c_rc_\theta\rangle=ng^2(r_1/r)^4w_-\\
n\langle c_r^2c_\theta\rangle=\pi ng^3\{w_+-{}^5/_2[1-(r_1/r)^2]^{3/2}w_-+{}^3/_2[1-(r_1/r)^2]^{5/2}w_-\}\\
n\langle c_\varphi^2c_\theta\rangle=\pi ng^3\{w_+-{}^{15}/_8[1-(r_1/r)^2]^{1/2}w_-+\\
+{}^5/_4[1-(r_1/r)^2]^{3/2}w_--{}^3/_8[1-(r_1/r)^2]^{5/2}w_-\}\\
n\langle c_\theta^3\rangle=3n\langle c_\varphi^2c_\theta\rangle,\quad n\langle c_r^2\rangle=n\langle c_\varphi^2\rangle=n\langle c_\theta^2\rangle=2\pi g^2n\\
n\langle c_r^{2i+1}c_\varphi^{2j+1}c_\theta^{2k}\rangle=0\quad(i=0,1,2\ldots,\ j=0,1,2,\ldots,\ k=0,1,2\ldots)\\
W_{1,2}=gw_{1,2},\quad w_\pm=w_1\pm w_2
\end{gathered} \tag{1.10}$$

При этом непосредственной подстановкой соответствующих моментов легко убедиться, что моментные уравнения для $Q=1$, c_r, c_φ, c_r^2, c_φ^2, c_θ^2, c_rc_φ, $c_\varphi c_\theta$ будут удовлетворены тождественно.

Из (1.2) и (1.3) получаем граничные условия для функций w_1, w_2

$$w_1|_{r=r_1}=\omega_1r_1\sin\varphi/g,\quad w_2|_{r=S(\varphi)}=0 \tag{1.11}$$

Подставляя (1.10) в (1.7) и (1.8) и решая полученную систему дифференциальных уравнений при граничных условиях (1.11), после несложных выкладок находим

$$\begin{gathered}
w_1=C_1r/2r_1+(r_1/r)^2C_1r_1/6\lambda+C_2r/2r_1\\
w_2=-C_1r/2r_1+(r_1/r)^2C_1r_1/6\lambda+C_2r/2r_1
\end{gathered} \tag{1.12}$$

$$\begin{gathered}
C_1=2\omega_1S(\varphi)\sin\varphi g^{-1}\{2S(\varphi)/r_1+S(\varphi)/3\lambda-[r_1/S(\varphi)]^2r_1/3\lambda\}^{-1}\\
C_2=2\omega_1\sin\varphi g^{-1}\{S(\varphi)-[r_1/S(\varphi)]^2r_1^2/3\lambda\}\times\\
\times\{2S(\varphi)/r_1+S(\varphi)/3\lambda-[r_1/S(\varphi)]^2r_1/3\lambda\}^{-1}
\end{gathered} \tag{1.13}$$

2. Определим распределение макроскопических скоростей газа. Из (1.10) находим

$$\begin{gathered}
v=\langle c_\theta\rangle=C_1{}^1/_2g\{(r_1/r)^2r_1/3\lambda-[1-(r_1/r)^2]^{1/2}3r/2r_1+\\
+[1-(r_1/r)^2]^{3/2}r/2r_1\}+C_2gr/2r_1
\end{gathered} \tag{2.1}$$

Подставив сюда значения констант интегрирования из (1.13), получаем

$$(2.2)\qquad \mathbf{v}=\boldsymbol{\omega}_1\times\mathbf{r}\{(r_1/r)^3-[r_1/S(\varphi)]^3+3\lambda/r_1-[1-(r_1/r)^2]^{1/2}\times \times 9\lambda/2r_1+[1-(r_1/r)^2]^{3/2}3\lambda/2r_1\}\times\{6\lambda/r_1+1-[r_1/S(\varphi)]^3\}^{-1}$$

Пусть $\mathrm{Kn}_1=\lambda/r_1$ — число Кнудсена, рассчитанное по радиусу сферы. Тогда для случая сплошной среды ($\mathrm{Kn}_1\to0$) и в предельном случае разреженного газа ($\mathrm{Kn}_1\to\infty$) получаем соответственно

$$\mathbf{v}=\boldsymbol{\omega}_1\times\mathbf{r}\frac{r_1^3S^3(\varphi)}{S^3(\varphi)-r_1^3}\left[\frac{1}{r^3}-\frac{1}{S^3(\varphi)}\right]$$

$$\mathbf{v}=\boldsymbol{\omega}_1\times\mathbf{r}\{1-3[1-(r_1/r)^2]^{1/2}/2+[1-(r_1/r)^2]^{3/2}/2\}/2$$

Из (2.2) находим выражение для скорости скольжения газа по поверхности сферы

$$(2.3)\qquad v_c=-3\,\mathrm{Kn}_1\,\omega_1\,r_1\sin\varphi\,\{6\mathrm{Kn}_1+1-[r_1/S(\varphi)]^3\}^{-1}$$

Рассмотрим вычисление момента сил трения, действующего на сферу. Из (1.10) сила трения, действующая на единицу поверхности сферы, выразится

$$(2.4)\qquad \sigma_{r\theta}|_{r=r_1}=-mn\langle c_rc_\theta\rangle|_{r=r_1}=-\mu gC_1/2\lambda=-3\mu\omega_1\sin\varphi\{6\mathrm{Kn}_1+ +1-[r_1/S(\varphi)]^3\}^{-1}$$

Для сплошной среды и для разреженного газа имеем соответственно

$$\sigma_{r\theta}|_{r=r_1}=-3\mu S^3(\varphi)\,\omega_1\sin\varphi\,\{S^3(\varphi)-r_1^3\}^{-1}$$

$$\sigma_{r\theta}|_{r=r_1}=-mng\omega_1r_1\sin\varphi$$

Сравнивая (2.4) и (2.3), видим, что скорость скольжения пропорциональна силе трения, действующей на единицу поверхности сферы и равна

$$(2.5)\qquad v_c=\frac{\lambda}{\mu}\,\sigma_{r\theta}|_{r=r_1}=(2mng)^{-1}\sigma_{r\theta}|_{r=r_1}$$

Выражение (2.5) от геометрии задачи не зависит.

Интегрированием (2.4) находим полный момент сил трения, действующий на сферу

$$(2.6)\qquad M=-6\pi\mu\omega_1r_1^3\int\limits_0^\pi\frac{\sin^3\varphi\,d\varphi}{6\,\mathrm{Kn}_1+1-[r_1/S(\varphi)]^3}$$

По теореме о среднем значении интеграла

$$(2.7)\qquad M=-8\pi\mu\omega_1r_1^3\{6\mathrm{Kn}_1+1-[r_1/S(\xi)]^3\}^{-1},\quad 0<\xi<\pi$$

Из (2.7) для сферы, вращающейся в безграничном объеме, $S(\xi)\to\infty$, следует:

$$M_0=-8\pi\mu\omega_1r_1^3/(6\mathrm{Kn}_1+1)$$

Из выражения (2.7) находим диапазон изменения момента сил трения в зависимости от вида поверхности $S(\varphi)$ при фиксированном минимальном значении $S(\varphi)$

$$M_0\leqslant M\leqslant M_1$$

Здесь M_1— момент, действующий на сферу, окруженную концентрической сферической оболочкой.

3. Рассмотрим случай концентрических сфер. Обозначая радиус внешней сферы r_2, имеем $S(\varphi)=r_2$. Следовательно, выражение (2.2) для распределения скоростей газа принимает вид

$$\mathbf{v}_1=\omega_1\times\mathbf{r}\{r_1^3(r^{-3}-r_2^{-3})+3\mathrm{Kn}(1-3[1-(r_1/r)^2]^{1/2}/2+ \tag{3.1}$$
$$+[1-(r_1/r)^2]^{3/2}/2\}[6\mathrm{Kn}_1+1-(r_1/r_2)^3]^{-1}$$

Для случая сплошной среды находим результат, полученный в работе [6]

$$\mathbf{v}_1=\boldsymbol{\omega}_1\times\mathbf{r}r_1^3r_2^3(r^{-3}-r_2^{-3})(r_2^3-r_1^3)$$

Из (2.6) следует выражение для полного момента сил трения, действующего на внутреннюю сферу

$$M_1=-8\pi\mu r_1^3\omega_1[6\mathrm{Kn}_1+1-(r_1/r_2)^3]^{-1} \tag{3.2}$$

Из (1.10) и (1.13) находим для силы трения, действующей на единицу поверхности внешней сферы

$$\sigma_{r\theta}|_{r=r_2}=\frac{\mu}{2\lambda}gC_1(r_1/r_2)^3=3\mu\omega_1\sin\varphi(r_1/r_2)^3[6\,\mathrm{Kn}_1+1-(r_1/r_2)^3]^{-1}$$

Следовательно, на внешнюю сферу будет действовать момент сил трения

$$M_2=-M_1 \tag{3.3}$$

Рассмотрим задачу о вращении внешней сферы с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}_2$ при внутренней неподвижной. Тогда граничные условия для функции распределения

$$nf(\mathbf{c})=nf_0(\mathbf{c},T,0),\quad r=r_1,\quad \mathbf{c}\cdot\mathbf{r}>0$$
$$nf(\mathbf{c})=nf_0(\mathbf{c},T,\boldsymbol{\omega}_2\times\mathbf{r}),\quad r=r_2,\quad \mathbf{c}\cdot\mathbf{r}<0$$

В этом случае газ описывается системой моментных уравнений (1.7), (1.8), решением которых является (1.12).

Проводя те же рассуждения, что и ранее, получаем граничные условия

$$w_1|_{r=r_1}=0,\qquad w_2|_{r=r_2}=\omega_2r_2\sin\varphi/g \tag{3.4}$$

Определяя константы интегрирования C_1 и C_2 решения (1.12) из (3.4), получаем

$$C_1=-2\omega_2r_2\sin\varphi g^{-1}\{2r_2/r_1+r_2/3\lambda-(r_1/r_2)^2r_1/3\lambda\}^{-1}$$
$$C_2=2\omega_2r_2\sin\varphi g^{-1}(1+r_1/3\lambda)\{2r_2/r_1+r_2/3\lambda-(r_1/r_2)^2r_1/3\lambda\}^{-1}$$

В соответствии с этим из (2.1) получаем распределение скоростей газа в случае неподвижной внутренней сферы

$$\mathbf{v}_2=\boldsymbol{\omega}_2\times\mathbf{r}\{1-(r_1/r)^3+3\mathrm{Kn}_1(1+3[1-(r_1/r)^2]^{1/2}/2- \tag{3.5}$$
$$-[1-(r_1/r)^2]^{3/2}/2)\}[6\mathrm{Kn}_1+1-(r_1/r_2)^3]^{-1}$$

Отсюда, в частности, следует: при отсутствии внутренней сферы ($r_1=0$) газ движется, как твердое тело, со скоростью

$$\mathbf{v}_2=\boldsymbol{\omega}_2\times\mathbf{r}$$

В случае сплошной среды выражение (3.5) сводится к хорошо известному [6] выражению

$$\mathbf{v}_2=\boldsymbol{\omega}_2\times\mathbf{r}r_1^3r_2^3(r_1^{-3}-r_2^{-3})(r_2^3-r_1^3)^{-1}$$

Вычисляя момент сил трения M_1 для внутренней сферы и M_2 для внешней, получим

$$M_1=-M_2=8\pi\mu\omega_2r_1^3[6\text{Kn}_1+1-(r_1/r_2)^3]^{-1} \tag{3.6}$$

В силу линейности задачи сумма (3.1) и (3.5) дает распределение скоростей газа в общем случае вращения обеих сфер вокруг произвольных осей

$$\begin{aligned}\mathbf{v}=\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2=\{&\boldsymbol{\omega}_2\times\mathbf{r}-(r_1/r_2)^3\boldsymbol{\omega}_1\times\mathbf{r}+3\text{Kn}_1(\boldsymbol{\omega}_1+\boldsymbol{\omega}_2)\times\mathbf{r}+\\ &+((r_1/r_2)^3-9\text{Kn}_1[1-(r_1/r)^2]^{1/2}/2+3\text{Kn}_1[1-(r_1/r)^2]^{3/2}/2)\times\\ &\times(\boldsymbol{\omega}_1-\boldsymbol{\omega}_2)\times\mathbf{r}\}[6\text{Kn}_1+1-(r_1/r_2)^3]^{-1}\end{aligned} \tag{3.7}$$

Отсюда ясно, что газ будет вращаться как целое при $\boldsymbol{\omega}_1=\boldsymbol{\omega}_2$. В этом случае из (3.2), (3.3) и (3.6) видно, что момента сил трения как для внутренней, так и для внешней сферы не будет.

4. Рассмотрим случай вращения сферы внутри неконцентрической сферической оболочки. Ось вращения проходит через центры сфер (фиг. 2). В этом случае

$$S(\varphi)=\sqrt{r_2^2-e^2\sin^2\varphi}+e\cos\varphi \tag{4.1}$$

Здесь r_2 — радиус внешней сферы, e — расстояние между центрами сфер.

Обозначим толщину зазора $\delta=r_2-r_1$. Вычислим выражение для момента в случае малого зазора $\delta/r_1\ll1$, $e/r_1\ll1$. Взяв первые члены в разложении (4.1) по малым δ/r_1 и e/r_1, имеем

$$r_1^3/S^3(\varphi)=1-3\delta/r_1-3e\cos\varphi/r_1+O(\delta^2/r_1^2,\ e^2/r_1^2)$$

Следовательно, из (2.6) с учетом разложения получаем

$$M=-\frac{2\pi\mu\omega_1r_1^4}{\delta}\int_0^\pi\frac{\sin^3\varphi\,d\varphi}{2\,\text{Kn}_2+1+\varepsilon\cos\varphi} \tag{4.2}$$

Здесь $\varepsilon=e/\delta$ — относительный эксцентриситет, $\text{Kn}_2=\lambda/\delta$ — число Кнудсена, рассчитанное по толщине зазора. Отметим, что в случае $\text{Kn}_2\to0$ получаем выражение для момента сил трения для сплошной среды, совпадающее с приведенным в книге [7].

Вычислив интеграл (4.2), получим

$$M=-\frac{2\pi\mu\omega_1r_1^4}{(2\,\text{Kn}_2+1)\delta}\left(\frac{1-\varepsilon_1^2}{\varepsilon_1^3}\ln\frac{1+\varepsilon_1}{1-\varepsilon_1}-\frac{2}{\varepsilon_1^2}\right),\quad \varepsilon_1=\varepsilon(2\,\text{Kn}_2+1)^{-1}$$

В случае концентрического расположения сфер, $\varepsilon=0$, из (4.2) имеем

$$M=-8\pi\mu\omega_1r_1^4\delta^{-1}(2\text{Kn}_2+1)^{-1}/3$$

что можно получить также из (3.2).

Отметим, что для газового подшипника с зазором $\delta=3.43$ *мк*, заполненного гелием при давлении $p=0.211$ *кг/см*^{2}, длина свободного пробега $\lambda=0.913$ *мк*, число Кнудсена Kn=0.266; при $\delta=1$ *мк* Kn=0.913. Поэтому отношение моментов сил трения без учета и с учетом разреженности будет $M_{сп}/M=1.532$ при $\delta=3.43$ *мк*; $M_{сп}/M=2.826$ при $\delta=1$ *мк*.

Если $r_1 \ll r_2$, удобнее записать

$$S(\varphi)=\sqrt{r_2^2-(r_2-d)^2\sin^2\varphi}-(r_2-d)\cos\varphi$$

Здесь d — расстояние от центра внутренней сферы до поверхности внешней сферы. Взяв первые члены разложения для малого d/r_2, имеем

$$S(\varphi)=r_2\{|\cos\varphi|[1+(1-d/2r_2)\operatorname{tg}^2\varphi d/r_2]-(1-d/r_2)\cos\varphi\}$$

Устремляя $r_2\to\infty$, находим выражение для момента, действующего на сферу, вращающуюся вблизи фиксированной бесконечной плоскости, перпендикулярной оси вращения

$$M=-6\pi\mu\omega_1 r_1^2\int\limits_0^{\pi/2}\frac{\sin^3\varphi d\varphi}{6\,\mathrm{Kn}_1+1-(r_1/d)^3\cos^3\varphi}+M_0/2 \tag{4.3}$$

Проинтегрировав, получим

$$M/M_0=1/2+h_0\{\ln(1-h_0^{-1})-h_0^{-2/3}\ln[1-3h_0^{1/3}(1+h_0^{1/3}+h_0^{2/3})^{-1}]\}/$$

$$/2+\sqrt{3}h_0^{-2/3}\operatorname{arctg}[\sqrt{3}(1+2h_0^{1/3})^{-1}]/4,\quad h_0=(d/r_1)^3(1+6\,\mathrm{Kn}_1)$$

Если $d\gg r_1$, то, взяв первые члены разложения подынтегральной функции (4.3) и проинтегрировав, получим

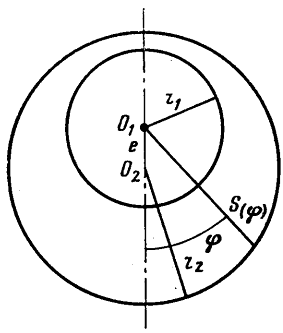
$$M/M_0=1+h_0^{-1}/16 \tag{4.4}$$

Это выражение для случая сплошной среды отличается от полученного в работе [8] коэффициентом при h_0^{-1}. Из работы [8] для малых r_1/d вытекает соотношение

$$M/M_0=1+(r_1/d)^3/8$$

5. Для сферы, вращающейся между двумя параллельными плоскостями, перпендикулярными оси вращения

$$S(\varphi)=\begin{cases}a/\cos\varphi & 0<\varphi<\pi/2\\ b/\cos(\pi-\varphi) & \pi/2<\varphi<\pi\end{cases}$$



Фиг. 2

где a, b — расстояние от центра сферы до каждой плоскости соответственно. Тогда

$$\frac{M}{M_0}=\frac{3}{4}\left(\int\limits_0^{\pi/2}\frac{\sin^3\varphi d\varphi}{1-\cos^3\varphi/h_1}+\int\limits_{\pi/2}^{\pi}\frac{\sin^3\varphi d\varphi}{1-\cos^3(\pi-\varphi)/h_2}\right) \tag{5.1}$$

$$h_1=(a/r_1)^3(1+6\lambda/r_1),\quad h_2=(b/r_1)^3(1+6\lambda/r_1)$$

Устремляя $b\to\infty$, приходим к выражению (4.3) для сферы, вращающейся вблизи плоскости, перпендикулярной оси вращения.

Проинтегрировав (5.1), находим

$$M/M_0=h_1\{\ln(1-h_1^{-1})-h_1^{-2/3}\ln[1-3h_1^{1/3}(1+h_1^{1/3}+h_1^{2/3})^{-1}]/2+$$

$$+\sqrt{3}h_1^{-2/3}\operatorname{arctg}[\sqrt{3}(1+2h_1^{-1/3})]\}/4+h_2\{\ln(1-h_2^{-1})-$$

$$-h_2^{-2/3}\ln[1-3h_2^{1/3}(1+h_2^{1/3}+h_2^{2/3})^{-1}]/2+$$

$$+\sqrt{3}h_2^{-2/3}\operatorname{arctg}[\sqrt{3}(1+2h_2^{-1/3})]\}/4$$

Соответственно для случая $a \gg r_1$, $b \gg r_1$ имеем разложение

$$M/M_0 = 1 + (h_1^{-1} + h_2^{-1})/16 \tag{5.2}$$

Для случая вращения сферы внутри бесконечного кругового цилиндра

$$S(\varphi) = r_2/\sin\varphi$$

Здесь r_2 — радиус цилиндра. Следовательно

$$\frac{M}{M_0} = \frac{3}{4}\int_0^\pi \frac{\sin^3\varphi d\varphi}{1-\sin^3\varphi/h}, \qquad h = (r_2/r_1)^3(1+6\lambda/r_1) \tag{5.3}$$

Если $r_1 \ll r_2$, то, взяв разложение подынтегральной функции, (5.3) представим в виде

$$M/M_0 = 1 + 0.736h^{-1} + 0.610h^{-2} + 0.532h^{-3} + O(h^{-4}) \tag{5.4}$$

Выражения (5.3) и (5.4) близки к выражениям, полученным в работе [9], соответственно при $r_1 \approx r_2$ и $r_1 \ll r_2$.

Авторы благодарны участникам семинаров, руководимых Г. И. Петровым и А. М. Головиным, за обсуждение работы.

Поступила 22 VII 1977

ЛИТЕРАТУРА

1. *Коган М. Н.* Динамика разреженного газа. М., «Наука», 1967.
2. *Lees L., Liu Chung-Yen.* Kinetic theory description of conductive heat transfer from a fine wire. Phys. Fluids, 1962, vol. 5, No. 10.
3. *Warren F. P.* Drag on a small sphere moving through a gas. Phys. Fluids, 1975, vol. 18, No. 9.
4. *Галкин В. С.* Цилиндрическое течение Куэтта разреженного газа. Инж. ж., 1965, т. 5, № 3.
5. *Ивченко И. Н., Яламов Ю. И.* Об испарении и конденсации сферических капель при произвольных числах Кнудсена. Изв. АН СССР, МЖГ, 1974, № 3.
6. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Механика сплошных сред. М., Гостехиздат, 1954.
7. *Константинеску В. Н.* Газовая смазка. М., «Машиностроение», 1968.
8. *Jeffery G. B.* On the steady rotation of a solid of revolution in a viscous fluid. Proc. Lond. Math. Soc., Ser. 2, 1915, vol. 14, p. 327–338.
9. *Brenner H., Sonshine R. M.* Slow viscous rotation of a sphere in a circular cylinder. Quart. J. Mech. and Appl. Math., 1964, vol. 17, pt. 1.