

О КОСЫХ МАГНИТОГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ УДАРНЫХ ВОЛНАХ

Е. А. ПУШКАРЬ

(Москва)

При решении стационарных задач магнитной гидродинамики возникает необходимость исследования ударных волн в системе координат, определенной постановкой задачи. Угол наклона ударной волны неизвестен и должен быть найден в процессе решения. Тем самым невозможен выбор системы координат таким образом, чтобы одна из осей была направлена перпендикулярно ударной волне, как это делается в нестационарных одномерных задачах. Кроме того, в силу произвольности направления магнитного поля в набегающем потоке начальное течение характеризуется не двумя, как в нестационарном течении, а тремя безразмерными величинами.

Исследованию наклонных ударных волн в магнитной гидродинамике посвящено много публикаций. В первых работах [1, 2] рассматривались волны малой интенсивности и изучались задачи, в которых магнитное поле было параллельно скорости потока. Условия эволюционности, весьма существенные для магнитогиродинамических волн, не учитывались [3, 4]. Был рассмотрен случай малого отклонения магнитного поля от параллельности скорости потока [5]. Для параллельного скорости магнитного поля ударные поляры с учетом условий эволюционности были построены численно [6]. Была отмечена необходимость построения поляра магнитного поля, которые позволяют графически определить угол наклона ударной волны к скорости набегающего потока.

Ударные волны в магнитном поле, параллельном скорости потока, были рассмотрены численно применительно к задаче об обтекании клина [7]. В монографии, посвященной магнитогиродинамическим ударным волнам [8], и в обзоре [9] вопросы, связанные с косыми ударными волнами, не получили достаточного освещения. При исследовании случая непараллельных магнитного поля и скорости [10-13] рассматривались частные решения, численные результаты носили отрывочный характер, что не давало возможности сделать общие выводы о свойствах косых ударных волн. В [14] было получено явное выражение для поляры в параллельном поле, однако оно не было исследовано.

В [15, 16] проводилось общее исследование ударных волн в магнитной гидродинамике. В части, посвященной нестационарным решениям, повторяются ранее полученные результаты (см., например, [17, 18]). При доказательстве основной теоремы неявно накладывались ограничения на течение за волной, поэтому был сделан неверный вывод о том, что из выполнения условий эволюционности только перед волной следует эволюционность ударной волны. Как известно [18], возможны решения, удовлетворяющие условиям эволюционности перед волной, которые являются волнами разряжения, все условия эволюционности для которых не выполняются [19].

В [20-23] были исследованы ударные поляры в магнитном поле, параллельном скорости потока. В [24] проведено численное решение задачи об обтекании бесконечного проводящего клина при наличии параллельного потоку магнитного поля, в [25] выявлены вопросы влияния магнитного поля на максимальный угол отклонения потока в таком течении.

В настоящей работе исследуются косые магнитогиродинамические ударные волны в произвольно ориентированном магнитном поле. Соотношения на ударных волнах разрешены так, что все величины за волной являются явными функциями параметров набегающего потока, скачка плотности и угла наклона волны. Последние величины связаны одним соотношением — уравнением адиабаты. Адиабаты и поляры исследованы в зависимости от свойств набегающего потока, выявлены их основные особенности. Выяснена симметрия адиабат и поляр, т. е. симметрия картины поведения ударных волн относительно углов наклона магнитного поля и фронта скачка к скорости потока. Указаны области начальных данных, в которых свойства ударных волн качественно отличаются друг от друга, исследовано поведение безразмерных величин за волной. Знание этих характеристик, ранее не исследовавшихся, является принципиально необходимым при рассмотрении конкретных задач (см., например, [26]), где они определяют вид решения.

1. Рассмотрим стационарную магнитогидродинамическую ударную волну в плоскополяризованном случае. На ударной волне должны быть выполнены следующие соотношения [18]:

$$(1.1) \quad \begin{aligned} \{\rho v_n\} &= 0, \quad \{H_n\} = 0, \quad \{p + \rho v_n^2 + H_\tau^2/8\pi\} = 0, \quad H_n \{v_\tau\} = \{H_\tau v_n\} \\ \{\rho v_n v_\tau - H_n H_\tau/4\pi\} &= 0, \quad \{H_\tau\} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} \times \mathbf{n} \\ \left\{ \rho v_n \left(\frac{p}{(\gamma-1)\rho} + \frac{v^2}{2} \right) + p v_n + \frac{H_\tau^2 v_n}{4\pi} - \frac{H_n (H_\tau v_\tau)}{4\pi} \right\} &= 0 \end{aligned}$$

Здесь обозначения общеприняты, фигурные скобки обозначают скачок величин на разрыве.

Выберем систему координат таким образом, чтобы перед волной скорость потока была направлена по оси x , ось y находилась в плоскости течения, магнитное поле располагалось в плоскости x, y , при этом ток, текущий по волне, и электрическое поле будут перпендикулярны плоскости течения. Пусть φ — угол наклона ударной волны к оси x , ψ — угол наклона магнитного поля к скорости перед волной, H — абсолютная величина магнитного поля перед волной.

Введем безразмерные переменные

$$(1.2) \quad \begin{aligned} \eta &= \frac{\rho_1}{\rho_2}, \quad a_0^2 = \frac{\gamma p_1}{\rho_1}, \quad a_A = \frac{H}{\sqrt{4\pi\rho_1}}, \quad M = \frac{v_1}{a_0}, \quad N = \frac{a_A}{a_0}, \quad \alpha = \frac{N^2}{M^2} \\ u &= \frac{v_{x2}}{a_0}, \quad v = \frac{v_{y2}}{a_0}, \quad P_2 = \frac{p_2}{p_1}, \quad h_1 = \frac{H_{x2}}{H}, \quad h_2 = \frac{H_{y2}}{H}, \quad i = \frac{4\pi j}{cH} \end{aligned}$$

Будем считать все величины перед волной заданными. Выразим из (1.1) все величины за ударной волной через отношение плотностей η и угол наклона ударной волны φ

$$(1.3) \quad i = -\cos(\varphi - \psi) (1 - \eta) \left[\frac{N^2 \sin^2(\varphi - \psi)}{M^2 \sin^2 \varphi} - \eta \right]^{-1}$$

$$(1.4) \quad h_1 = \cos \psi + i \cos \varphi, \quad h_2 = \sin \psi + i \sin \varphi$$

$$(1.5) \quad \frac{u}{M} = 1 - \sin^2(\varphi - \psi) (1 - \eta) + \frac{N^2}{M^2} \sin(\varphi - \psi) \operatorname{ctg} \varphi i$$

$$(1.6) \quad \frac{v}{M} = (1 - \eta) \sin \varphi \cos \varphi + \frac{N^2}{M^2} \sin(\varphi - \psi) i$$

$$(1.6) \quad P_2 = 1 + \gamma M^2 (1 - \eta) \sin^2 \varphi - \gamma N^2 (i \cos(\varphi - \psi) + 0.5 i^2)$$

Связь между η и φ задается законом сохранения энергии

$$(1.7) \quad \begin{aligned} &\left[(\gamma + 1) \frac{M^2}{N^2} \sin^2 \varphi \left(\eta - \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} \right) - \frac{2}{N^2} \right] (\chi - \eta)^2 + \\ &+ 2\eta \cos^2(\varphi - \psi) (\chi - \eta) - (1 - \eta) \cos^2(\varphi - \psi) [(2 - \gamma)\eta + (\gamma - 1)\chi] = 0 \\ &\chi = \alpha \frac{\sin^2(\varphi - \psi)}{\sin^2 \varphi} \end{aligned}$$

Уравнение (1.7), которое в дальнейшем будем называть уравнением адиабаты, является многочленом третьей степени по η . Решая (1.7) численно и подставляя в (1.3)–(1.6) связь между η и φ , можно построить

ударные поляры магнитного поля и скорости, с помощью которых, задав угол направления движения за волной или магнитное поле в зависимости от постановки задачи, можно найти все величины за волной и угол ее наклона.

Выпишем в обозначениях (1.2) условия эволюционности косо́й магнитогидродинамической ударной волны. Используя уравнение для зависимости скорости магнитозвуковых волн от параметров потока [18], найдем, что условия равенства нормальной скорости перед и за волной одной из магнитозвуковых скоростей имеют соответственно следующий вид:

$$(1.8) \quad \omega = \sin^2 \varphi - (\alpha + M^{-2}) + \frac{\alpha \sin^2(\varphi - \psi)}{M^2 \sin^2 \varphi} = 0$$

$$(1.9) \quad W = \eta^2 \sin^2 \varphi - \eta \alpha [1 + 2i \cos(\varphi - \psi) + i^2 + P_2 N^{-2}] + \frac{\alpha \sin^2(\varphi - \psi)}{M^2 \sin^2 \varphi} P_2 = 0$$

В этом выражении i , P_2 и η должны быть выражены через φ с помощью (1.3), (1.6) и (1.7).

Аналогично записываются условия равенства нормальной скорости перед и за волной альфвеновским скоростям

$$(1.10) \quad \xi = \alpha \frac{\sin^2(\varphi - \psi)}{\sin^2 \varphi} - 1 = 0; \quad Z = \alpha \frac{\sin^2(\varphi - \psi)}{\sin^2 \varphi} - \eta = 0$$

С учетом (1.8)–(1.10) условия эволюционности медленных и быстрых ударных волн имеют соответственно вид

$$(1.11) \quad \omega \leq 0, \quad W \geq 0, \quad \xi \geq 0, \quad Z > 0$$

$$(1.12) \quad \omega \geq 0, \quad W \geq 0, \quad \xi < 0, \quad Z \leq 0$$

2. Ввиду сложности уравнения ударной адиабаты и уравнений поляры скорости и магнитного поля, а также условий эволюционности, будем сочетать качественный и численный методы исследования.

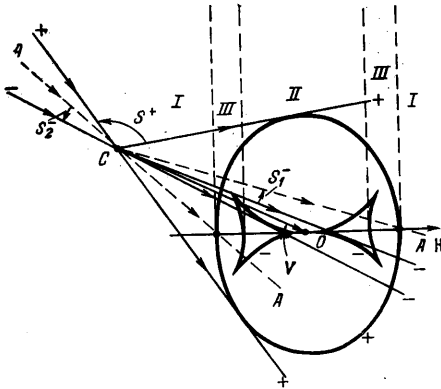
Для магнитного поля, параллельного скорости потока ($\psi = 0$), свойства ударных волн исследованы аналитически ранее [20, 21]. Из уравнения ударной адиабаты найдена явная зависимость угла наклона ударной волны от скачка плотности. В заданном набегающем потоке возникают либо только быстрые, либо только медленные ударные волны. Плоскость начальных данных разбита на области, в каждой из которых свойства ударных волн различны. Например, при $0 < \alpha \leq \lambda$ ($\lambda = (\gamma - 1)/(\gamma + 1) + 2/(\gamma + 1)M^2$) (слабое магнитное поле) быстрые волны ведут себя подобно газодинамическим ударным волнам (поляра — замкнутая кривая), поворот скорости в них возможен на больший угол по сравнению с газовой динамикой. При более сильном магнитном поле ($\lambda < \alpha < 1$) поляра становится разомкнутой кривой, прямой скачок является включающей волной. Магнитное поле в быстрых волнах растет, скорость газа уменьшается.

Медленные волны при $\psi = 0$ существуют как при квазигиперболическом (две действительные характеристики), так и при эллиптико-гиперболическом типе течения (нет действительных характеристик). В первом случае имеется волна нулевой интенсивности, совпадающая с характеристикой, во втором — только волны конечной интенсивности. Магнитное поле и скорость в медленных волнах убывают, с ростом скорости набегающего потока минимальное относительное изменение плотности увеличивается.

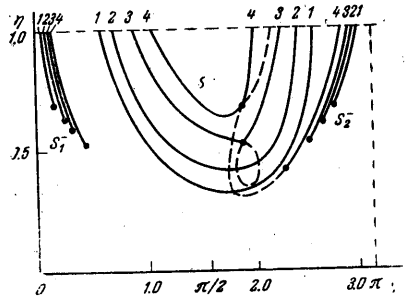
Рассмотрим общий случай непараллельного скорости магнитного поля ($\psi \neq 0$). Полученные выше соотношения обладают симметрией по углам. Будем считать, что φ лежит в пределах от 0 до λ , а $0 < \psi < 2\pi$. При $\psi_1 =$

$=\pi+\psi$ (1.5) — (1.9) не изменятся в силу соответствующей симметрии тригонометрических функций, а из (1.3), (1.4) следует, что магнитное поле за волной и ток на волне будут иметь противоположные знаки, таким образом достаточно исследовать и построить адиабаты и поляры для $0<\psi<\pi$, а для $\pi<\psi<2\pi$ угол наклона ударной волны, скорость и давление совпадут с волнами, у которых угол наклона магнитного поля к скорости равен $\psi-\pi$, магнитное поле и ток на волне будут иметь обратный знак.

Сделав преобразование для углов $\psi_1=\pi-\psi$, $\varphi_1=\pi-\varphi$, найдем, что уравнение адиабаты (1.7) при этом не изменится, ток на волне i , давление P_2 , составляющие скорости u и магнитного поля h_2 имеют те же значения, а составляющие скорости v и магнитного поля h_1 будут иметь противоположные



Фиг. 1



Фиг. 2

знаки. Таким образом, построив адиабату для $0<\psi\leq\pi/2$, адиабату для $\pi-\psi$ получим отражением относительно прямой $\varphi=\pi/2$, ударная поляра для скорости получается при симметричном отражении относительно оси u , а ударная поляра магнитного поля — относительно оси h_2 , при этом вместо угла φ необходимо взять угол $\pi-\varphi$. Поэтому в дальнейшем будем предполагать, что ψ лежит в пределах от 0 до $\pi/2$, адиабаты и поляры для других углов получаются с помощью простой симметрии.

Условия эволюционности, относящиеся к газу перед ударной волной, эквивалентные выписанным выше, можно сформулировать геометрически с помощью диаграммы Фридрихса для характеристик в потоке стационарного газа [27] и уравнения для тангенса угла наклона φ_0 характеристик к скорости потока [18]

$$(2.1) \quad \begin{aligned} & \operatorname{tg}^4 \varphi_0 [M^4 + N^2 \cos^2 \psi - M^2 (1 + N^2)] - 2 \operatorname{tg}^3 \varphi_0 N^2 \sin \psi \cos \psi + \\ & + \operatorname{tg}^2 \varphi_0 [N^2 - M^2 (1 + N^2)] - 2 \operatorname{tg} \varphi_0 N^2 \sin \psi \cos \psi + N^2 \sin^2 \psi = 0 \end{aligned}$$

Кроме этого соотношения необходимо привлечь условие (1.10) равенства нормальной скорости перед волной альфвеновской скорости.

Наклон характеристик в стационарном потоке и направления распространения возмущений на них совпадают с направлениями касательных, проведенных из точки C , изображающей начальное состояние, к характеристической поверхности (фиг. 1). Направления распространения альфвеновских возмущений совпадают с направлениями прямых, проведенных из начальной точки в точки пересечения линии магнитного поля с медленной (при $N<1$) или с быстрой (при $N>1$) ветвями характеристической поверхности.

Когда течение имеет гиперболический тип, характеристики расположены по мере роста углов наклона к скорости следующим образом: медлен-

ная уходящая, альфвеновская уходящая, быстрая уходящая, быстрая приходящая, альфвеновская приходящая, медленная приходящая. Когда течение имеет квазигиперболический тип, расположение характеристик следующее: медленная уходящая, альфвеновская уходящая, альфвеновская приходящая, медленная приходящая, медленные уходящая и приходящая, связанные с квазигиперболическостью. При эллиптическо-гиперболическом типе течения медленные характеристики располагаются так же, как в гиперболическом случае, быстрые характеристики отсутствуют.

Пользуясь методикой, предложенной в [28], легко показать, что при гиперболическом типе течения эволюционными по состоянию перед волной будут ударные волны в секторах S_1^- между медленной и альфвеновской уходящими характеристиками и S_2^- между такими же приходящими характеристиками (медленные) и в секторе S^+ между быстрыми уходящей и приходящей характеристиками (быстрые) (фиг. 1). При квазигиперболическом типе течения ударные волны будут эволюционными в секторах S_1^- , S_2^- , S_3^- между медленной и альфвеновской уходящими, такими же приходящими и между медленными, связанными с квазигиперболическостью, волнами. При эллиптическо-гиперболическом типе течения ситуация аналогична гиперболическому случаю, быстрые волны отсутствуют.

Таким образом, при проведении численного расчета ударных адиабат и поляр необходимо заранее выбирать углы наклона в указанных секторах, для чего необходимо решить уравнения (2.1) и (1.10), определить углы наклона магнитозвуковых и альфвеновских характеристик, считая φ в пределах от 0 до π , найти тип течения. Как показывают численные расчеты, каждому значению φ в этих секторах соответствует только одна эволюционная волна. Если при данном угле наклона возможно несколько волн сжатия, то эволюционным является скачок наименьшей интенсивности. Отметим, что свойство симметрии, отмеченное выше, справедливо и для характеристик. Для φ от $\pi/2$ до π волны, соответствующие уходящим характеристикам, будут соответствовать приходящим характеристикам и наоборот.

Условие равенства скорости по нормали к разрыву одной из характеристических скоростей перед разрывом дает решение с непрерывной плотностью. Эволюционная часть адиабаты при этом начинается от быстрой или медленной характеристик в зависимости от типа волны, в этой точке все параметры потока непрерывны.

3. Быстрые волны могут возникать только в потоке газа с параметрами, принадлежащими гиперболической области. На ударных волнах, перпендикулярных магнитному полю ($\varphi = \psi + \pi/2$), скачок плотности равен одному из значений (см. (1.7))

$$(3.1) \quad \eta = \frac{\gamma-1}{\gamma+1} + \frac{2}{(\gamma+1)M^2 \cos^2 \psi}, \quad \eta = \alpha \cos^{-2} \psi$$

первому из которых на адиабате соответствует регулярная, а второму — особая точка.

Характер особой точки оказывает существенное влияние на адиабату и свойства косых волн. При $\varphi = \psi + \pi/2$, $\eta = \alpha \cos^{-2} \psi$ знаменатель в (1.3) обращается в нуль, систему (1.1) при этом необходимо разрешать иначе.

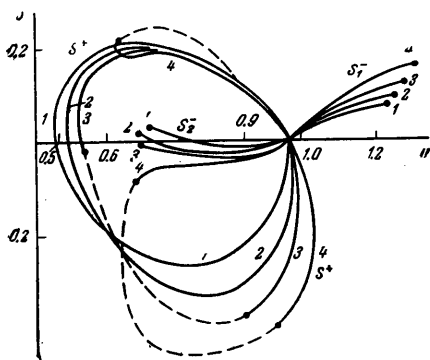
Из уравнения сохранения энергии в (1.1) найдем, что в особой точке

$$(3.2) \quad i^2 = (\gamma-1) \left(\frac{\cos^2 \psi}{\alpha} - 1 \right) \left[\frac{\gamma+1}{\gamma-1} - \frac{2}{(\gamma-1)N^2} - \frac{\cos^2 \psi}{\alpha} \right] \equiv \Phi(\alpha, N, \psi)$$

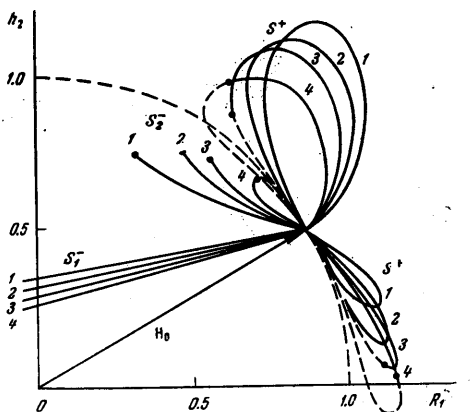
Ток на волне определен, если правая часть (3.2) неотрицательна. Непосредственно из (1.7) легко найти, что особая точка является изолирован-

ной, если правая часть (3.2) меньше нуля и является точкой самопересечения в противном случае. Условие существования физического решения для тока выполнено, когда первое значение η , определенное из (3.1), будет меньше $\alpha \cos^{-2} \psi$.

Кроме того, из (1.1) легко получить, что возможно другое решение: $\eta=1, \alpha \sin^2(\varphi-\psi) \sin^{-2}\varphi-\eta=0$, нормальная скорость перед и за разрывом равна альфвеновской. Ток либо равен нулю, и все параметры непрерывны



Фиг. 3



Фиг. 4

(поступательный поток), либо $i=-2 \cos(\varphi-\psi)$, и волна есть альфвеновский разрыв, в котором меняет знак касательная составляющая магнитного поля, вектор магнитного поля поворачивается при этом вокруг нормали к волне на 180° . Такой альфвеновский разрыв является плоскополяризованным, скорость за ним определяется следующим образом:

$$(3.3) \quad \frac{u}{M} = 1 - \alpha \sin 2(\varphi_A - \psi) \operatorname{ctg} \varphi, \quad \frac{v}{M} = -\alpha \sin 2(\varphi_A - \psi),$$

$$\operatorname{tg} \varphi_A = N \sin \psi (N \cos \psi \pm M)^{-1}$$

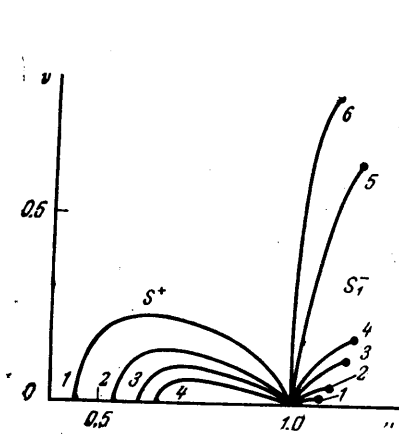
На фиг. 2 построено семейство S^+ адиабат быстрых волн и семейства S_1^- , S_2^- адиабат медленных волн при $\alpha \cos^{-2} \psi < 1$ для фиксированных ψ и M , α переменны ($\gamma=5/3, M=2, \psi=30^\circ, N=1-1.5$). Эволюционные части адиабат нанесены сплошными, а неэволюционные — пунктирными линиями.

Когда магнитное давление больше динамического ($\alpha > 1$), быстрые волны отсутствуют, так как при этом нет быстрых характеристик. При α таких, что правая часть (3.2) отрицательная, адиабата имеет вид, аналогичный кривым 1, 2 семейства S^+ на фиг. 2 (особая точка изолированная). Ударные волны, перпендикулярные магнитному полю, являются газодинамическими скачками с непрерывным магнитным полем, изменение плотности и всех остальных величин такое же, как и в газовой динамике, ток на волне равен нулю. Поляра скорости при этом аналогична газодинамической (кривые 1, 2 семейства S^+ на фиг. 3), но, вообще говоря, не симметрична. При усилении магнитного поля поворот скорости потока возможен на больший угол по сравнению с газовой динамикой.

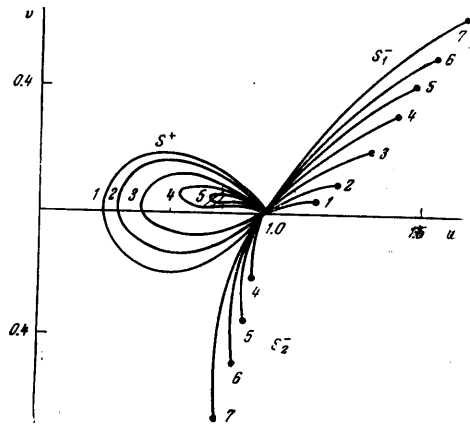
При начальных данных, удовлетворяющих условию $\Phi(\alpha, N, \psi) > 0$, на адиабате имеется точка самопересечения (кривые 3, 4 семейства S^+ на фиг. 2), причем эволюционной является часть адиабаты, соответствующая меньшему изменению плотности. Ударные волны, перпендикулярные маг-

нитному полю, являются «включающими», скорость по нормали за ними равна альфвеновской, магнитное поле за волной неперпендикулярно фронту скачка, ток определяется из (3.2). Ударная поляра скорости является разомкнутой кривой (кривые 3, 4 семейства S^+ на фиг. 3).

Две включающие волны, соответствующие разным знакам тока, определяемого из (3.2), связаны одна с другой через альфвеновский разрыв, меняющий знак касательного магнитного поля, т. е. каждая из включающих



Фиг. 5



Фиг. 6

волн может быть представлена как другая и слившийся с ней альфвеновский разрыв, в котором $i = -2 \cos(\varphi - \psi)$, а изменение скорости определяется по формулам (3.3).

Выписывая из неравенства $\Phi > 0$ условия существования решения для ψ , легко найти, что для существования включающих волн необходимо, чтобы магнитное давление было больше газодинамического ($N > 1$). При $N < 1$ волны включения не существуют.

Ударная поляра магнитного поля для быстрых волн так же может быть замкнутой и разомкнутой кривой. Если направление перпендикуляра к магнитному полю перед волной лежит в секторе S^+ , то на ударных волнах, перпендикулярных H_0 , при $\Phi < 0$ магнитное поле непрерывно, поляра магнитного поля образует петли (фиг. 4, кривые 1, 2 семейства S^+). Если возможны включающие волны, то поляра магнитного поля состоит из двух ветвей, имеющих общую точку, которая соответствует непрерывному течению (фиг. 4, кривые 3, 4 семейства S^+).

Построенные адиабаты и поляры скорости, магнитного поля типичны для углов ψ между скоростью и полем, достаточно далеких от $\pi/2$, когда направление перпендикуляра к магнитному полю лежит в секторе S^+ между быстрыми характеристиками. На диаграмме Фридрикса конец вектора скорости лежит справа или слева от обеих быстрых характеристик, перпендикулярных магнитному полю (область I на фиг. 1). При этом проекции магнитного поля на быстрые характеристики имеют одинаковые знаки.

В противном случае поляры быстрых волн будут носить характер, близкий к характеру поляр с $\psi = \pi/2$. На фиг. 5 построены ударные поляры скорости для $M=2$ и разных $N(\psi = \pi/2)$. Ввиду симметрии поляр построена только их верхняя часть ($v > 0$), вся поляра складывается из построенной части и ее зеркального отражения относительно оси u . Построенная часть поляр соответствует уходящим характеристикам, углы наклона ударных волн $0 < \varphi \leq \pi/2$. При $\psi = \pi/2$ с усилением поля поляры быстрых волн оста-

ются замкнутыми кривыми, при этом поворот потока возможен на все меньший угол.

При углах ψ , близких к $\pi/2$, когда проекции магнитного поля на быстрые характеристики имеют разные знаки (область II на фиг. 1), поляры скорости имеют аналогичный характер, однако симметрией не обладают. На фиг. 6 построены ударные поляры скорости для $M=2$, $\psi=\pi/3$, N растет с номером кривой. При усилении начального магнитного поля поворот скорости потока возможен на меньший угол, при достаточно сильном поле скорость поворачивается против часовой стрелки как в волнах, связанных с уходящими, так и в волнах, связанных с приходящими характеристиками. При таком поле в случае $\psi > \pi/2$ положение обратное: скорость поворачивается по часовой стрелке, т. е. гидродинамическим условиям обтекания выпуклого угла (меньшего π) можно удовлетворить в ударной волне, связанной с уходящими характеристиками.

4. Медленные волны могут возникать в потоке газа, параметры которого принадлежат гиперболической, квазигиперболической и эллиптико-гиперболическим областям. Когда течение имеет гиперболический тип, медленные волны имеют углы наклона, принадлежащие секторам S_1^- и S_2^- (фиг. 1). Интенсивность волны растет с ростом угла наклона в S_1^- и с убыванием угла наклона в S_2^- , волной максимальной интенсивности служит скачок, наклон которого совпадает с наклоном альфвеновской характеристики. Предельная ударная волна всегда является «выключающей» ударной волной, магнитное поле за ней перпендикулярно фронту ударной волны.

Медленные волны такого же типа могут возникать и в случае течения эллиптико-гиперболического типа, поэтому в дальнейшем будем называть их эллиптическими. Наибольшее изменение плотности в таких ударных волнах может достигаться не обязательно в выключающих скачках. Типичный вид семейства адиабат, ударных поляр скорости и магнитного поля эллиптических ударных волн представлен на фиг. 2—6 для гиперболического типа течения и на фиг. 7 для квазигиперболического типа течения (семейства S_1^- , S_2^-).

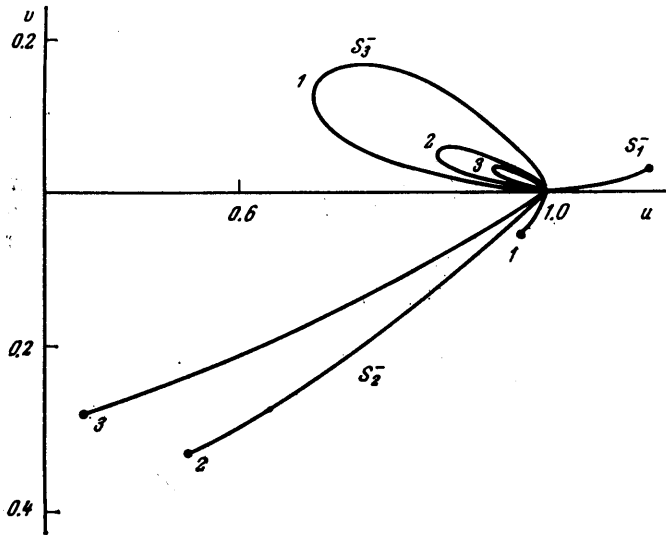
Если направление перпендикуляра к магнитному полю перед волной принадлежит секторам S_1^- или S_2^- , то на фронте скачка, перпендикулярном магнитному полю (нормальные волны), магнитное поле на разрыве непрерывно, ток на волне равен нулю, все газодинамические величины терпят разрыв, поляра магнитного поля образует петли. Такие волны возможны только при $N > 1$, когда конец вектора скорости на диаграмме Фридрихса лежит между соответственными медленными и быстрыми характеристиками, перпендикулярными магнитному полю (области III на фиг. 1).

В медленных волнах при слабом поле возможное изменение величин мало, с ростом поля изменение величин увеличивается. При небольших углах ψ в волнах, связанных с уходящими характеристиками, скорость газа сильно возрастает, отклонение потока небольшое. При увеличении ψ возрастает отклонение потока, продольная компонента скорости изменяется слабо. В волнах, связанных с приходящими характеристиками, при малых ψ поток замедляется, отклонение потока возможно на больший угол по сравнению с волнами, связанными с уходящими характеристиками. При этом в медленных волнах также возможны «нерегулярности» отклонения потока, подобные быстрым волнам.

Если течение имеет квазигиперболический тип, то кроме эллиптических ударных волн возможны медленные ударные волны другого типа, которые будем называть квазигиперболическими. У квазигиперболических медленных ударных волн оба граничных угла наклона совпадают с углами:

наклона медленных характеристик, при этом все параметры потока на таких волнах непрерывны. Поляры скорости и магнитного поля представляют собой замкнутые линии, начинающиеся и оканчивающиеся в точках непрерывности скорости и магнитного поля. Ударные поляры скорости изображены на фиг. 7 (семейство S_3^-) для $M=0.9$, $\psi=5^\circ$, N растет с номером кривой. При усилении магнитного поля изменение величин в квазигиперболических волнах уменьшается.

5. Для построения решений задач с магнитогидродинамическими ударными волнами представляет интерес вопрос о том, каким образом связаны безразмерные характеристики и типы течения перед и за волной. Эта



Фиг. 7

связь исследовалась численно при расчете ударных поляр. С этой целью вычислялись основные безразмерные характеристики потока за волной: числа Маха M_2 и Альфвена N_2 и угол ψ_2 между скоростью потока и магнитным полем

$$(5.1) \quad M_2 = M \sqrt{\frac{u^2 + v^2}{\eta P_2}}, \quad N_2 = N \sqrt{\frac{h_1^2 + h_2^2}{P_2}}, \quad \psi_2 = \arctg \frac{uh_2 - vh_1}{uh_1 + vh_2}$$

причем если $uh_1 + vh_2 < 0$, то к ψ_2 , определенному из (5.1), необходимо прибавить π . Числа Маха и Альфвена в (5.1) определены по плотности газа за волной. После определения M_2 , N_2 и ψ_2 находились углы наклона характеристик и определялся тип течения.

В быстрых волнах малой интенсивности тип течения не меняется, однако в достаточно интенсивных волнах течение за волной имеет, как правило, эллиптико-гиперболический тип, причем возможен переходный участок, на котором течение за волной имеет квазигиперболический тип. В быстрых волнах число Маха за волной убывает с ростом скачка плотности, а число Альфвена, вообще говоря, уменьшается, возможно, монотонно. Отношение квадратов чисел Альфвена и Маха $\alpha = N^2 / M^2$, которое определяет отношение магнитного давления к динамическому, возрастает.

Изменение типа течения, чисел Маха и Альфвена в медленных квази-гиперболических волнах по характеру совпадает с изменением этих параметров в быстрых ударных волнах.

Медленные эллиптические волны могут быть двух типов. Первый тип волн (семейство S_1^-) имеет небольшие углы наклона в случае $0 < \psi \leq \pi/2$, в таких волнах с ростом интенсивности ударной волны число Маха за волной возрастает, а число Альфвена убывает, при этом угол между скоростью и магнитным полем растет, возможно, немонотонно. Если течение перед такой ударной волной имеет гиперболический тип, то тип течения не меняется на волне. Если течение носит эллиптико-гиперболический характер перед волной, то при малой интенсивности скачка некоего порогового значения течение изменяет свой тип на гиперболический. В случае исходного течения квазигиперболического типа в этих волнах малой интенсивности тип течения не изменится, затем в некотором диапазоне скачка плотности течение за волной имеет эллиптико-гиперболический тип, а при большей интенсивности — гиперболический.

Второй тип волн (семейство S_2^-) при $0 < \psi < \pi/2$ наклонен вверх по потоку. В этих волнах с ростом интенсивности (и уменьшением угла наклона) числа Маха и Альфвена за волной убывают. Если течение перед волной имеет эллиптико-гиперболический тип, то его характер не меняется. В случае гиперболического и квазигиперболического типов течения происходит смена типа течения на эллиптико-гиперболический в волнах достаточно большой интенсивности. Во всех типах медленных волн динамическое давление растет по сравнению с магнитным.

Для изменения скорости наиболее существенным параметром является угол между ударной волной и магнитным полем в набегающем потоке. Нормальная к фронту разрыва скорость уменьшается в ударной волне (при переходе через скачок динамическое давление переходит в статическое). Изменение касательной к фронту скачка скорости определяется силой Лоренца $(1/c)\mathbf{j} \times \mathbf{H}$ (по ударной волне течет ток \mathbf{j}). Если угол между ударной волной и магнитным полем в набегающем потоке не превышает прямого, то газ ускоряется этим током, в противном случае поток замедляется. При ускорении газа и возможен переход от эллиптико-гиперболического типа течения перед волной к гиперболическому типу течения за волной.

Автор благодарит А. А. Бармина и А. Г. Куликовского за постоянное внимание к работе и ценные советы.

Поступила 31 X 1977

ЛИТЕРАТУРА

1. Коган М. Н. Магнитодинамика плоских и осесимметричных течений газа с бесконечной электрической проводимостью. ПММ, 1959, т. 23, вып. 1.
2. Коган М. Н. Ударные волны в магнитной газодинамике. ПММ, 1959, т. 23, вып. 3.
3. Киселев М. И. К расчету ударных волн в магнитной гидродинамике. Докл. АН СССР, 1959, т. 126, № 3.
4. Киселев М. И., Колосницын Н. И. К расчету наклонных ударных волн в магнитной газодинамике. Докл. АН СССР, 1960, т. 131, № 4.
5. Коган М. Н. Плоские течения идеального газа с бесконечной электропроводностью в магнитном поле, не параллельном скорости потока. ПММ, 1960, т. 24, вып. 1.
6. Коган М. Н. Некоторые свойства магнитогидродинамических течений в ударных волнах. В сб. «Вопросы магнитной гидродинамики и динамики плазмы». Рига, АН ЛатвССР, 1962.
7. Cabannes H. Attached stationary shock waves in ionized gases. Rev. Mod. Phys., 1960, vol. 32, No. 4.
8. Андерсон Э. Ударные волны в магнитной гидродинамике. М., Атомиздат, 1968.
9. Половин Р. В., Черкасова К. П. Магнитогидродинамические волны. Усп. физ. н., 1966, т. 88, вып. 4.

10. *Bazer J., Ericson W.* Oblique shock in steady two-dimensional hydromagnetic flow: In: Proc. Sympos. on electromagnetics and fluid dynamics of gaseous plasma. New York. Polytechnic Press., 1962.
11. *Urashima S., Morioka S.* Magnetohydrodynamic shock polar. *J. Phys. Soc. Japan.*, 1966, vol. 21, No. 7.
12. *Lynn Y. M.* Magnetohydrodynamic shocks in nonaligned flow. *Phys. Fluids*, 1966, vol. 9, No. 2.
13. *Morioka S., Spreiter J. R.* Magnetohydrodynamic shock waves in non-aligned flow. *J. Plasma Phys.*, 1969, vol. 13, No. 1.
14. *Lynn Y. M.* Magnetogasdynamic shock polar for aligned fields. *J. Plasma Phys.*, 1971, vol. 6, No. 2.
15. *Bertram L. A.* Unified geometric and analytical treatment of magnetogasdynamic shocks, pt 1. General solutions and theorems. *J. Fluid Mech.*, 1973, vol. 58, No. 2.
16. *Bertram L. A.* Unified geometric and analytical treatment of magnetogasdynamic shocks, pt 2. The shocks polars. *J. Plasma Phys.*, 1973, vol. 10, No. 3.
17. *Бармин А. А.* Исследование поверхностей разрыва с выделением (поглощением) энергии в магнитной гидродинамике. *ПММ*, 1962, т. 26, вып. 5.
18. *Куликовский А. Г., Любимов Г. А.* Магнитная гидродинамика. М., Физматгиз, 1962.
19. *Иорданский С. В.* Теорема Цемплена в магнитной гидродинамике. Докл. АН СССР, 1958, т. 121, № 4.
20. *Пушкарь Е. А.* Исследование магнитогиродинамических косых ударных волн и течения типа Прандтля – Майера при произвольном магнитном поле. Отчет Ин-та механ. МГУ, 1973, № 1514.
21. *Пушкарь Е. А.* Исследование поляри магнитогиродинамических и ионизирующих ударных волн в магнитном поле. В сб. «Исследования по механике жидкостей и твердых тел». М., Изд. МГУ, 1977.
22. *Bertram L. A.* Magnetogasdynamic shock polar: exact solution in aligned fields. *J. Plasma Phys.*, 1973, vol. 9, No. 3.
23. *Natter M.* MHD-Stosspolarendiagramme für Plasmen unendlicher Leitfähigkeiten. *VDJ-Forschungsh.*, 1974, Nr 565.
24. *Еркаев Н. В., Пивоваров В. Г.* Обтекание клина проводящим газом при наличии магнитного поля. Случай присоединенной ударной волны. В сб. «Численные методы механики сплошной среды», т. 5, № 2. Новосибирск, 1974.
25. *Natter M.* Maximale Strömungsumlenkung beim magnetohydrodynamischen Verdichtungsstoß. *Ingr – arch.*, 1974, vol. 43, No. 6.
26. *Пушкарь Е. А.* Регулярное отражение магнитогиродинамической ударной волны от проводящей стенки. Изв. АН СССР, МЖГ, 1977, № 3.
27. *Bazer J., Fleischman O.* Propagation of weak hydromagnetic discontinuities. *Phys. Fluids.*, 1959, vol. 2, No. 4.
28. *Бармин А. А., Куликовский А. Г.* О плоских стационарных течениях с ионизирующими ударными волнами в магнитном поле. Изв. АН СССР, МЖГ, 1974, № 5.