

О ВЛИЯНИИ ГРАНИЦ ПОТОКА НА ПАРАМЕТРЫ ТРАНСЗВУКОВЫХ ТЕЧЕНИЙ ОКОЛО ТЕЛ ВРАЩЕНИЯ

Ю. Б. ЛИФШИЦ, А. С. ФОНАРЕВ

(Москва)

В работе рассматриваются осесимметричные течения газа около тел вращения, расположенных вдоль оси рабочей части аэродинамической трубы с перфорированными стенками. Предполагается, что расстояние от оси до стенок трубы велико по сравнению с толщиной тела, а скорость потока на бесконечности близка к звуковой. При выполнении этих предположений исследование характера влияния границ потока на параметры течения основывается на анализе асимптотических свойств трансзвуковых течений. Полученные результаты представляются в виде законов подобия и сравниваются с расчетами течений при помощи релаксационной разностной схемы и данными эксперимента.

1. Пусть тело вращения расположено вдоль оси x цилиндрической системы координат x, y , имеет длину L и относительную толщину τ , причем $\tau \ll 1$. Поперечное сечение рабочей части аэродинамической трубы считается кругом, радиус которого равен H ; ее ось симметрии совпадает с осью x . Кроме того, предположим, что скорость набегающего потока мало отличается от звуковой, а влияние вязкости и теплопроводности пренебрежимо мало. Тогда для описания потока газа можно воспользоваться уравнениями теории малых возмущений трансзвуковых осесимметричных течений [1].

Согласно этой теории поле возмущений скорости относительно равномерного звукового потока вдоль оси x обладает потенциалом $\Phi(x, y)$, который записывается в виде

$$(1.1) \quad \Phi(x, y) = a \cdot \tau^2 L \Phi'(x', y'), \quad x' = x/L, \quad y' = y\tau/L$$

где a — критическая скорость звука.

Подставим формулы (1.1) в уравнения движения Эйлера и уравнение Бернулли. Оставляя только главные члены разложения по τ , получим известное уравнение Кармана теории малых возмущений [1]

$$(1.2) \quad -(\kappa+1) \frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{1}{y} \frac{\partial \Phi}{\partial y} = 0$$

Здесь κ — показатель адиабаты Пуассона, штрихи над всеми зависимыми и независимыми переменными в (1.2) и ниже для сокращения записи опущены.

Решение уравнения (1.2) должно удовлетворять условию непротекания на теле вращения $Y = \tau L \tilde{y}(x)$ и некоторому условию на перфорированной границе рабочей части аэродинамической трубы. В переменных (1.1) граница расположена на расстоянии $\tau H/L$ от оси симметрии $y=0$. Согласно теории малых возмущений условие непротекания сносится на ось x и имеет вид

$$(1.3) \quad \lim_{y \rightarrow 0} y \frac{\partial \Phi}{\partial y} = \tilde{y} \frac{d\tilde{y}}{dx}$$

На перфорированной границе трубы возьмем линейное условие идеальной перфорации [2]

$$(1.4) \quad (V_x - U_\infty)p_f + V_y = 0.$$

Здесь V_x , V_y — составляющие вектора скорости частиц, U_∞ — скорость невозмущенного потока, p_f — коэффициент проницаемости стенки.

Равенство (1.4) при $p_f = 0$ является точным условием непротекания на сплошной стенке трубы. При $p_f = \infty$ оно переходит в линеаризованное условие на границе свободной струи. При промежуточных значениях p_f условие (1.4) соответствует феноменологической модели протекания газа через пористую стенку, которое происходит в соответствии с законом Дарси. В частности, в этой модели частицы газа, вытекающие из трубы, не отличаются от проникающих в трубу, хотя они имеют различные значения постоянных Бернулли.

В 1950 г. А. А. Никольский [3] получил линейное условие (1.4) для стенки с перфорацией в виде щелей, поперечных к невозмущенному потоку. В нем коэффициент проницаемости p_f зависел от M_∞ согласно формуле

$$(1.5) \quad p_f = \sqrt{1 - M_\infty^2} \mu(\sigma)$$

в которой μ — некоторая функция коэффициента перфорации σ , различная для дозвуковой и сверхзвуковой скоростей невозмущенного потока.

Подставляя равенства (1.1) в (1.4) и (1.5), получим, пренебрегая высшими членами разложения по τ , граничное условие при $y = \tau H/L$ в виде

$$(1.6) \quad \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} + K \right) K^{1/2} \mu_1 + \frac{\partial \Phi}{\partial y} = 0, \quad K = \frac{2}{\kappa + 1} \frac{1 - M_\infty}{\tau^2}, \quad \mu_1 = (\kappa + 1)^{1/2} \mu(\sigma)$$

Формула (1.6) теряет смысл при $K \rightarrow 0$, так как равенства (1.4) и (1.5) установлены в [3] при помощи уравнений линейной теории, которая справедлива, если возмущенные скорости малы и их отношение к скорости набегающего потока мало по сравнению с разностью $1 - M_\infty$. Применяя методику работы [3] к уравнению Кармана, можно получить аналог условия (1.6) для стенки с поперечными щелями при трансзвуковых скоростях потока. Результат будет представлять собой линейную комбинацию величин $(\partial \Phi / \partial x)^3$ и $(\partial \Phi / \partial y)^2$. Однако вывод приводимых ниже результатов о характере влияния стенки не основывается на конкретном виде граничного условия на ней. Поэтому их численная проверка может быть проведена при любом граничном условии. В настоящей работе для этой цели используется условие (1.6).

В случае рабочей части трубы с перфорацией в виде продольных щелей граничное условие является линейным при любом значении K [2]. В переменных (1.1) оно имеет вид

$$(1.7) \quad \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} + K \right) \frac{L}{\tau H} \mu_2(\sigma, n) + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} = 0$$

$$\mu_2 = -\frac{n}{2} \left(\ln \sin \frac{\pi \sigma}{2} \right)^{-1}$$

Здесь μ_2 — функция только от коэффициента перфорации и числа щелей n , параметр $\tau H/L$, равный расстоянию от оси до стенки трубы, входит в (1.7) явно.

Можно считать, что граничное условие (1.7) реализуется в экспериментах в аэродинамических трубах с продольной щелевой перфорацией, ре-

зультаты которых приведены в [4]. Часть этих результатов будет использована ниже.

2. Из формул (1.2), (1.3), (1.6), которые определяют постановку задачи обтекания тела вращения в аэродинамической трубе с перфорированными стенками, следует, что потенциал возмущения зависит от трех параметров: K , $\tau H/L$ и σ . Целью настоящей работы является выяснение асимптотического характера этой зависимости при $K \ll 1$ и $\tau H/L \gg 1$.

В предельном случае $K=0$ и $\tau H/L=\infty$ решением задачи (1.2), (1.3), (1.6) будет потенциал $\varphi(x, y)$, описывающий безграничный поток газа около тела вращения со звуковой скоростью на бесконечности. На больших расстояниях от тела его можно представить в виде асимптотического ряда [5-8]

$$(2.1) \quad \varphi(x, y) = \sum_{i \geq 1} y^{-2i/7} \varphi_i(\xi), \quad \xi = xy^{-4/7}(\kappa+1)^{-1/2}$$

Если $K \neq 0$, а $\tau H/L = \infty$, то решением рассматриваемой задачи будет потенциал $\Omega(x, y; K)$. Он также описывает безграничный поток около тела вращения, но со скоростью на бесконечности, отличной от звуковой. При малых K можно записать

$$(2.2) \quad \Omega = \varphi(x, y) + \delta(K) \varphi'(x, y; K)$$

где $\delta(K) \rightarrow 0$ при $K \rightarrow 0$.

Добавочный потенциал φ' удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$(2.3) \quad -(\kappa+1) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial \varphi'}{\partial x} \right) + \frac{\partial^2 \varphi'}{\partial y^2} + \frac{1}{y} \frac{\partial \varphi'}{\partial y} = (\kappa+1) \delta \frac{\partial \varphi'}{\partial x} \frac{\partial^2 \varphi'}{\partial x^2}$$

которое получается, если сумму (2.2) подставить в исходное уравнение (1.2).

Кроме того, на оси x выполняется условие $\lim_{y \rightarrow 0} y \delta \varphi' / \partial y = 0$, а при $x^2 + y^2 \rightarrow \infty$ — условие $\delta \partial \varphi' / \partial x = -K$.

В области I_0 , где $\delta \varphi' \ll \varphi$ правая часть (2.3) много меньше слагаемых левой части. Поэтому в I_0 функция φ' подчиняется уравнению (2.3) с нулевой правой частью. Его решение должно удовлетворять прежнему условию отсутствия особенностей на оси x и при удалении в бесконечность затухать менее быстро, чем $\varphi(x, y)$.

Задача определения $\delta(K)$ и $\varphi'(x, y)$ рассмотрена в работах [9-11]. В них показано, что в области I_0 на больших расстояниях от тела для φ' имеет место асимптотическое разложение

$$(2.4) \quad \varphi'(x, y) = \sum_{i \geq 0} y^{-2(m+i)/7} \chi_{m,i}(\xi), \quad \delta = K^{(1-m)/3}$$

В формулах (2.4) целое число $m < 0$, причем $m = -4$ в области перед скачком уплотнения и $m = -1$ за скачком уплотнения. При помощи равенств (2.1), (2.4) и условия $\varphi \sim \delta \varphi'$ легко оценить размеры x_0 и y_0 области I_0 . Они получаются следующими:

$$(2.5) \quad |x_0| = O(K^{-2/3}), \quad y_0 = O(K^{-1/6})$$

При больших, но отличных от бесконечности значениях параметра $\tau H/L$ решение задачи (1.2), (1.3), (1.6) можно записать в виде суммы

$$(2.6) \quad \Phi = \Omega + \varepsilon \varphi''$$

в которой малый параметр $\varepsilon \rightarrow 0$ при $\tau H/L \rightarrow \infty$.

Добавочный потенциал φ'' удовлетворяет уравнению (2.3), если в нем φ , φ' и δ заменить соответственно на Ω , φ'' и ε . Граничные условия на оси x одинаковы для φ'' и φ' . На прямой $y = \tau H/L$ условие для φ'' следует из (1.6) и (2.6).

В области I_ε , где $\Omega \gg \varepsilon \varphi''$, уравнение для φ'' становится линейным и однородным. Однако I_ε не охватывает всей области течения. На стенках трубы при $y = \tau H/L$ искомым потенциал удовлетворяет граничному условию (1.6), в котором все члены должны быть одинакового порядка. Поэтому граница y_ε области I_ε имеет оценку

$$(2.7) \quad y_\varepsilon = O(\tau H/L)$$

Сравнивая (2.5) и (2.7), получаем в зависимости от величины параметра $G = K(\tau H/L)^{2/7}$ три различных режима течения: а) $y_\varepsilon \ll y_0$ при $G \ll 1$, в) $y_\varepsilon \sim y_0$ при $G \sim 1$, с) $y_\varepsilon \gg y_0$ при $G \gg 1$.

В случае первых двух режимов в I_ε в сумме (2.2), определяющей потенциал $\Omega(x, y)$, главным будет первое слагаемое. Поэтому в I_ε линейное однородное уравнение для φ'' в точности совпадает с соответствующим уравнением для φ' в области I_0 , а его решение дается первой из формул (2.4). В области $I_{0\varepsilon}$ внутреннюю часть которой составляет I_ε , оба слагаемых в (2.6) имеют одинаковый порядок, т. е. $\Omega \sim \varepsilon \varphi''$. На границе областей Ω и $\varepsilon \varphi''$ можно представить при помощи разложений (2.1) и (2.4). Приравнивая в них главные по ε члены, получим оценку границ области I_ε , выраженную через ε

$$(2.8) \quad y_\varepsilon = O(\varepsilon^{7/2(m-1)}), \quad |x_\varepsilon| = O(\varepsilon^{2/m-1})$$

Из (2.7) и (2.8) следует искомое соотношение между параметрами ε и $\tau H/L$

$$(2.9) \quad \varepsilon = (\tau H/L)^{2(m-1)/7}$$

Решения в области I_ε и $I_{0\varepsilon}$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ должны асимптотически сращиваться. Это возможно, если ввести в $I_{0\varepsilon}$ новые независимые переменные x_0 , y_0 и искомую функцию $\Phi_0(x_0, y_0)$, связанные с x , y и $\Phi(x, y)$ при помощи равенств

$$(2.10) \quad \Phi_0(x_0, y_0) = \varepsilon^{1/(m-1)} \Phi(x, y), \quad x_0 = \varepsilon^{-2/(m-1)} x, \quad y_0 = \varepsilon^{-7/2(m-1)} y$$

Действительно, заменим согласно [12] переменные x , y на x_0 , y_0 в формулах (2.1) и (2.4) для φ и $\varepsilon \varphi''$, умножив их предварительно на $\varepsilon^{1/(m-1)}$. Сумма полученных результатов при $\varepsilon \rightarrow 0$ будет функцией только x_0 , y_0 .

Преобразование (2.10) является частным видом преобразований подобия Кармана [1], по отношению к которым уравнение (1.2) инвариантно. Поэтому $\Phi_0(x_0, y_0)$ удовлетворяет уравнению (1.2). Стенки трубы в координатах x_0 , y_0 расположены согласно (2.9) на расстоянии $y_0 = 1$. Граничное условие (1.6) на них, переписанное при помощи (2.10), имеет вид

$$(2.11) \quad \left(\frac{\partial \Phi_0}{\partial x_0} + G \right) G^{1/2} \mu_1(\sigma) + \frac{\partial \Phi_0}{\partial y_0} = 0$$

Хотя в уравнение (2.11) параметр ε явно не входит, он остается в записи условия непротекания (1.3) в переменных (2.10)

$$\lim_{y_0 \rightarrow 0} y_0 \frac{\partial \Phi_0}{\partial y_0} = \varepsilon^{1/(m-1)} \tilde{y} \frac{d\tilde{y}}{dx}$$

Сформулированная задача для потенциала $\Phi_0(x_0, y_0)$ в I_{0e} полностью эквивалентна исходной задаче (1.2), (1.3), (1.6). Ее решение зависит от параметров G , ε и σ . Однако в области I_e , непосредственно примыкающей к телу, эта зависимость определяется равенством

$$(2.12) \quad \Phi(x, y) = \varphi(x, y) + K^{(1-m)/3} \varphi'(x, y) + (\tau H/L)^{2(m-1)/7} \varphi''(x, y)$$

которое в силу процедуры асимптотического сращения действительно представляет собой $\Phi_0 e^{-1/(m-1)}$ при $x_0, y_0 \rightarrow 0$.

Функция φ' , вообще говоря, зависит от K , а функция φ'' — от $\tau H/L$, σ и K . Значения этих параметров входят в коэффициенты функций $\chi_{m, i}(\xi)$ разложения (2.4). Однако потенциал $\Omega(x, y; K)$ существует при всех K . Одновременно φ' существует, конечно и не обращается в нуль при $K=0$. Поэтому в первом приближении зависимостью φ' от K можно пренебречь.

Иначе обстоит дело с добавочным потенциалом φ'' . При любой величине $\tau H/L$ и небольших σ существует блокирующее значение $K=K_*$ такое, что при меньших $\tau H/L$ стационарное течение в аэродинамической трубе невозможно. Следовательно, φ'' не является непрерывной функцией K при фиксированном $\tau H/L$ и $K \rightarrow 0$. В случае же фиксированного конечного K и $\tau H/L \rightarrow \infty$ непрерывность φ'' имеет место. Поэтому при больших $\tau H/L$ на режимах, далеких от блокирующего, функция φ'' в первом приближении от $\tau H/L$ не зависит. Для этих же режимов естественно предположить дифференцируемость φ'' по параметру K . Тогда членом, определяющим основное изменение $\Phi(K)$, будет второе слагаемое суммы (2.12), а функцию φ'' можно считать зависящей только от параметра σ .

Выше формула (2.9), связывающая параметры ε и $\tau H/L$, была получена при помощи метода сращиваемых асимптотических разложений. Ее можно вывести и другим способом, применяя к решению (2.6) преобразование подобия Кармана (1.1). При этом осуществляется переход от безразмерных переменных к исходным размерным.

Поскольку уравнение Кармана инвариантно по отношению к преобразованию (1.1), то уравнения для φ , φ' и φ'' своего вида не изменят. Изменяются только граничные условия (1.3), (1.6) и условие для φ' на бесконечности. В условии (1.3) на оси x войдут параметры τ и L , а из остальных двух условий параметр τ исключится. Функции φ' и φ'' удовлетворяют нулевому условию на оси x и их зависимость от τ и L обуславливается только зависимостью коэффициентов уравнения (2.3) от этих параметров. Ее легко установить, если преобразованию (1.1) подвергнуть решения (2.1) и (2.4). При этом оказывается, что в преобразованное выражение для φ входит только параметр τ и произведение $\tau^4 L^3$, а в его главный член при $y \rightarrow \infty$ входит только последнее произведение. Аналогичным свойством обладает и слагаемое $\varepsilon \varphi''$. Предполагая далее, что $\varepsilon = \varepsilon(\tau H/L)$, можно из этих двух условий получить формулу (2.9).

В случае режима течения, при котором $I_{0e} \ll I_e$, искомая зависимость $\varepsilon(\tau H/L)$ не поддается определению, поскольку неизвестен вид потенциала Ω вне I_0 . Только на очень больших расстояниях от тела, где Ω приближенно удовлетворяет уравнению Прандтля — Глауэрта при $K > 0$ или волновому уравнению при $K < 0$, можно установить характер затухания φ'' . В этих предельных случаях влияние границы потока оказывается таким же, как при чисто дозвуковом или сверхзвуковом течении.

3. Воспользуемся формулой (2.12) для расчета сопротивления тела вращения в рабочей части аэродинамической трубы. Для этого возьмем контрольный контур, охватывающий тело и целиком расположенный в области I_e , и вычислим x -составляющую потока импульса через него. В ре-

результате получим

$$(3.1) \quad c_x^* = \frac{\rho_\infty U_\infty^2}{\rho_* a_*^2} c_x = \tau^2 \left[A_1 - A_2 K^{(1-m)/3} + A_3 (\sigma) \left(\frac{\tau H}{L} \right)^{2(m-1)/7} \right]$$

Здесь ρ — плотность, звездочкой отмечены критические значения параметров, а коэффициент сопротивления c_x отнесен к площади миделя тела вращения.

В формуле (3.1) все $A_i > 0$ и зависят от формы тела вращения. Величина $m = -1$, поскольку параметры потока за скачком уплотнения оказываются более чувствительными к изменению условий на больших расстояниях. Они определяют изменение положения скачка и в конечном счете зависимость c_x^* от K и $\tau H/L$.

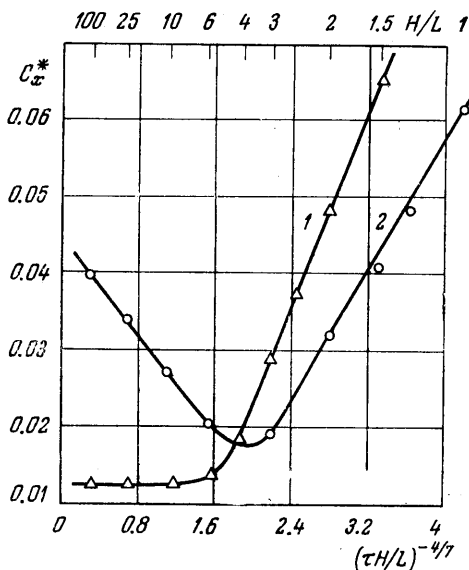
На фиг. 1 приведены результаты расчетов коэффициента сопротивления тела вращения, образующая которого является дугой окружности с $\tau = 0.083$. В качестве уравнения движения газа было взято уравнение Кармана (1.2); на стенке трубы выполнялось условие (1.6). Задача (1.2), (1.3), (1.6) решалась при помощи релаксационной разностной схемы, близкой к изложенной в [13].

Две кривые фиг. 1 получены при одном и том же значении $\mu_1 = 0.139$. Точки кривой 1 соответствуют течениям с $M_\infty = 0.99237$ и различным H/L . Как видно из графика, при $H/L < 4$ коэффициент сопротивления c_x^* линейно зависит от $(\tau H/L)^{-1/7}$, что находится в полном соответствии с формулой (3.1). При $H/L > 6$ реализуется, вероятно, случай $I_6 < I_*$ и зависимость c_x^* от H/L становится чрезвычайно слабой.

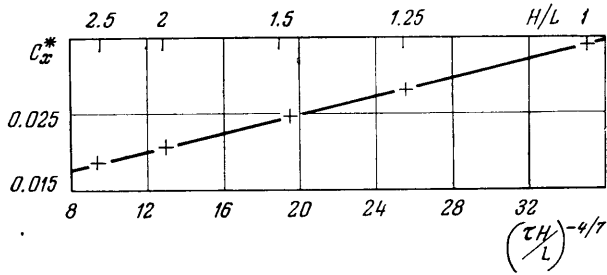
Кривая 2 на фиг. 1 проведена через расчетные точки, полученные при $G = K(\tau H/L)^{1/7} = 0.358$. При $H/L < 3$ в согласии с (3.1) она оказывается прямой линией. При $H/L > 6$ зависимость c_x^* от $(\tau H/L)^{-1/7}$ также линейная, но определяется только первыми двумя членами формулы (3.1) при $G = \text{const}$.

В расчетах с $G = \text{const}$ возможен случай, когда второй и третий члены формулы (3.1) взаимно компенсируются. Тогда течение за скачком уплотнения при всех $\tau H/L$ меняется так же слабо, как и перед скачком, и в формуле (3.1) следует положить $m = -4$. Такой режим был получен при $\mu_1 = 0.695$. Данные расчетов течений около тела вращения (фиг. 1) при этом значении μ_1 и $G = 0.358$ приведены на фиг. 2 в виде зависимости c_x^* от $(\tau H/L)^{-10/7}$. При $H/L < 3$ линия, проходящая через расчетные точки, оказывается прямой, что согласуется с (3.1).

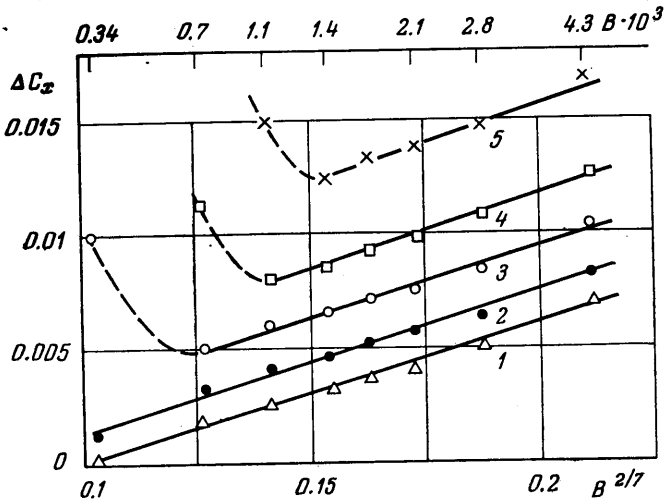
В работе [4] представлено много результатов испытаний нескольких тел вращения в аэродинамических трубах с перфорацией в виде продольных щелей. Часть из них, относящаяся к подобным телам типа С, приведена на фиг. 3. Здесь по оси ординат отложены значения Δc_x , равные разности коэффициентов сопротивления в указанном на фигуре режиме течения и в полностью дозвуковом течении при $M_\infty = 0.9$, когда влияние границы потока пренебрежимо мало. Вдоль оси абсцисс отложены значения $B^{1/7}$, где



Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3

B — параметр загрузки рабочей части трубы. Для труб с круглой рабочей частью

$$B = \tau^4 (\tau H/L)^{-2/4}$$

Результаты опытов изображены на фиг. 3 в виде точек, относящихся к фиксированным значениям чисел M_∞ (цифрами 1–5 обозначены течения с числом Маха $M_\infty = 0.980, 0.985, 0.990, 0.995, 1.0$). В соответствии с (3.1) через них проведены прямые линии. Это свидетельствует о существовании области режимов течений, которые адекватно описывает изложенная выше теория. Однако при очень малых B и M_∞ , близких к единице, рассогласование между теорией и экспериментом становится заметным.

Предположим далее, что характер зависимости Φ от K , $\tau H/L$ и σ , данный формулой (2.12) на больших расстояниях от тела в области I_2 , сохраняется вплоть до поверхности тела. Продифференцируем (2.12) и запишем выражение для коэффициента давления на теле

$$c_p^* = \tau^2 [B_1(x) - B_2(x) K^{(1-m)/3} + B_3(x; \sigma) (\tau H/L)^{2(m-1)/7}]$$

Здесь $m = -4$ для точек тела перед скачком уплотнения и $m = -1$ для точек за скачком уплотнения.

На фиг. 4 даны результаты расчетов c_p^* в нескольких точках $x = \text{const}$ описанного выше тела вращения перед скачком уплотнения. Вдоль оси абсцисс отложена величина $(\tau H/L)^{-10/7}$. Если предположения, приводящие

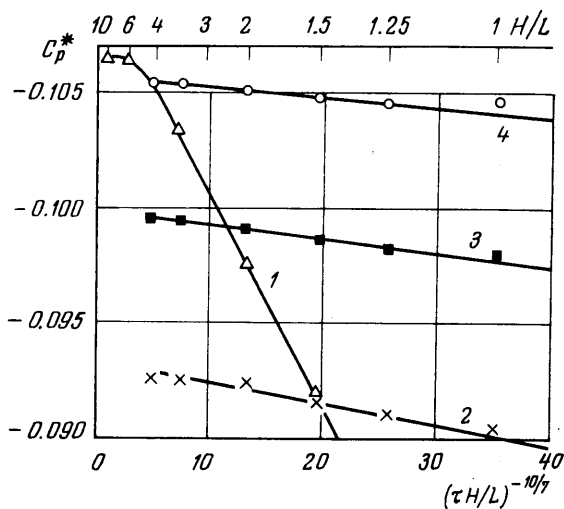
к формуле (3.2), верны, то проходящие через расчетные точки кривые будут прямыми линиями. Кривая 1, соответствующая значению $x=0.500$, проходит через точки, полученные при $M_\infty=0.99237$ и $\mu_1=0.139$. Из фиг. 4 видно, что при $H/L < 4$ линия 1 является прямой. Кривые 2–4 построены для $x=0.442, 0.471, 0.500$ и относятся к режимам течений с прежним значением μ_1 и $G=K(\tau H/L)^{0.71}=0.358$. Соответствующие им зависимости от $(\tau H/L)^{-0.71}$ при $H/L < 4$ также мало отличаются от линейных.

В заключение отметим, что анализ свойств течений, следствием которого стали формулы (3.1) и (3.2), был проведен в предположении $\tau H/L \ll 1$. Поэтому указанные формулы не могут быть применены при достаточно малых H/L . Истинное значение границы области их применимости должно определяться в результате расчетов или опытов.

Поступила 3 VIII 1977

ЛИТЕРАТУРА

1. Von Kármán Th. The similarity law of transonic flow. J. Math. and Phys., 1947, vol. 26, No. 3.
2. Goethert V. H. Transonic wind tunnel testing. Oxford, Pergamon Press., 1961.
3. Никольский А. А. О течениях газа с перфорированными границами. В кн. Гродзовского Г. Л., Никольского А. А., Свищева Г. П., Таганова Г. И. «Сверхзвуковые течения газа в перфорированных границах», гл. 4. М., «Машиностроение», 1967.
4. Couch L. M., Brooks C. W. Effect of blockage ratio on drag and pressure distributions for bodies of revolution at transonic speeds. NASA TN, 1973, No. D-7331.
5. Guderley G., Yoshikawa H. An axial-symmetric transonic flow pattern. Quart. Appl. Math., 1951, vol. 8, No. 4.
6. Barish D. T., Guderley G. Asymptotic forms of shock waves in flows over symmetrical bodies at Mach 1. J. Aeron. Sci., 1953, vol. 20, No. 7.
7. Euvrard D. Etude asymptotique de l'écoulement à grande distance d'un obstacle se déplaçant à la vitesse du son. 3-eme part. J. Mécanique, 1968, t. 7, No. 3.
8. Tournemine G. Comportement asymptotique de l'écoulement sonique autour d'un corps de révolution de dimensions finies, en aval de l'onde de choc. J. Mécanique, 1968, t. 7, No. 3.
9. Диеперов В. Н., Лифшиц Ю. Б., Рыжов О. С. Закон стабилизации для трансзвуковых течений около тел вращения. Изв. АН СССР, МЖГ, 1974, № 5.
10. Диеперов В. Н., Лифшиц Ю. Б. О сопротивлении тел вращения при трансзвуковых скоростях потока. ПММ, 1975, т. 39, вып. 2.
11. Рыжов О. С. О зависимости сопротивления тел от числа Маха набегающего потока в трансзвуковом диапазоне скоростей. Докл. АН СССР, 1975, т. 233, № 3.
12. Ван-Дайк М. Методы возмущений в механике жидкостей. М., «Мир», 1967.
13. Krupp J. A., Murman E. M. The numerical calculation of steady transonic flow past thin lifting airfoils and slender bodies. AIAA paper, 1971, No. 566.



Фиг. 4