

О РЕШЕНИИ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ КОНВЕКТИВНОЙ ДИФФУЗИИ И АДсорбЦИИ РАДИОАКТИВНОГО ГАЗА В ПОРИСТОЙ СРЕДЕ

В. Я. АРСЕНИН, Н. Б. ЗЯБРЕВ, Н. А. КУДРЯШОВ

(Москва)

В работе рассматривается задача определения формы импульса радиоактивного газа, подаваемого на вход пористой среды, по измеренной зависимости концентрации от времени на выходе и при известных параметрах среды. Анализируется поведение функции отклика среды в зависимости от кинетического коэффициента сорбции, коэффициента конвективной диффузии и коэффициента Генри. Описывается методика определения концентрации на входе пористой среды. Показано восстановление практически важных импульсов радиоактивного газа, переносимых газовым потоком. Исследуется влияние кинетического коэффициента сорбции при восстановлении концентрации.

Пусть через полубесконечную среду переносится с постоянной скоростью потока газа-носителя радиоактивная примесь. Рассмотрим задачу определения концентрации радиоактивного газа в пористой среде.

Подобные задачи встречаются при исследовании миграции радионуклидов из мест захоронения продуктов ядерной энергетики, при анализе свойств радиоактивных газов хроматографическими методами, при оценке стратификации подземных грунтовых вод методами введения радиоактивных индикаторов [1, 2] и т. д. На распределение радиоактивной примеси, переносимой газовым потоком через пористую среду, влияют различные факторы: скорость движения газа-носителя, радиоактивный распад, процессы конвективной диффузии и адсорбции. Если не учитывать массообмен на границе фаз газ-твердое тело, то движение радиоактивного газа описывается уравнением конвективной диффузии в пористой среде [3]. При постоянной скорости потока это уравнение приводится к уравнению теплопроводности, решения которого при различных начальных и граничных условиях хорошо изучены в литературе [4-6]. Поглощение газа слоем зернистого материала без учета процесса диффузии проанализировано в [7, 8].

Исследование нестационарной задачи переноса примеси газовым потоком через пористую среду с учетом процессов конвективной диффузии, адсорбции и десорбции наталкивается на значительные трудности даже в случае линейных уравнений. В [9-12] приводится постановка задачи и приближенные решения для концентрации неактивного газа при движении в пористой среде в случае, если на вход пористой среды подается постоянная концентрация. При нелинейной изотерме сорбции решение задачи рассматривалось в [13, 14].

1. **О постановке задачи.** В [15] приводится система уравнений для движения импульса радиоактивного газа с учетом процессов как кинетики сорбции, так и конвективной диффузии и радиоактивного распада. В линейном приближении и при условии, что коэффициент диффузии и кинетический коэффициент сорбции постоянны исследуется распределение примеси в пористой среде в случае, когда на вход сорбирующего слоя подается концентрация в виде дельта-функции. Решение такой задачи имеет вид

$$G(x, t) = G_1(x, t) + G_2(x, t)$$

$$G_1(x, t) = \frac{u_0 x}{\sqrt{4\pi Dt^3}} \exp \left\{ -t(\lambda + \beta) - \frac{(x - vt)^2}{4Dt} \right\}$$

(1.1)

$$G_2(x, t) = \frac{u_0 \beta \sqrt{\gamma}}{\sqrt{\pi D}} \exp[-t(\lambda + \beta)] \int_0^t \frac{I_1(2\beta \sqrt{\gamma \tau(t-\tau)})}{\tau \sqrt{t-\tau}} \times \\ \times \exp\left\{-\tau \beta(1-\gamma) - \frac{(x-v\tau)^2}{4D\tau}\right\} d\tau$$

Здесь β — кинетический коэффициент сорбции, γ — величина, обратная коэффициенту Генри, D — коэффициент конвективной диффузии, v — скорость газового потока, $I_1(x)$ — функция Бесселя первого рода от мнимого аргумента, u_0 — размерная постоянная, λ — постоянная радиоактивного распада, x — координата, t — время.

Функцию $G(x, t)$ называют функцией отклика среды. Она описывает реакцию (отклик) среды на концентрацию радиоактивного газа, подаваемую на вход пористой среды в виде дельта-функции. По своему смыслу функция отклика среды является функцией Грина соответствующей краевой задачи [15].

Целью прямой задачи конвективной диффузии и адсорбции радиоактивного газа в пористой среде является определение концентрации примеси во всем интервале изменения пространственного и временного аргументов по известной концентрации радиоактивного газа, подаваемого на вход пористой среды и известной функции отклика среды. Можно показать, что концентрация $u(x, t)$ радиоактивного газа в плоскопараллельном потоке ($0 \leq x < \infty$) при условиях $u(0, t) = \varphi(t)$ и $u(x, 0) = a(x, 0) = 0$ ($a(x, t)$ — количество адсорбированной радиоактивной примеси в единице объема пористой среды) запишется в виде интеграла [15]

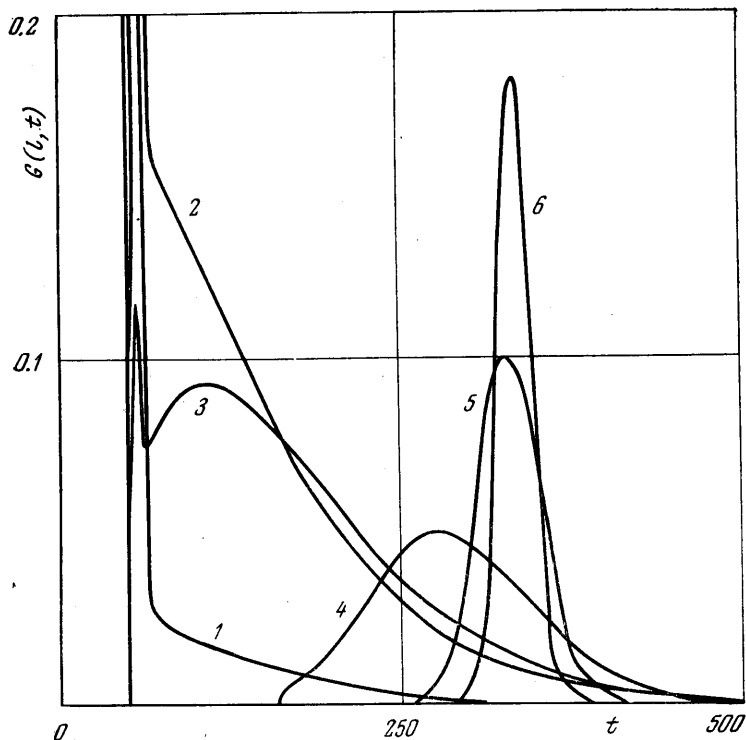
$$(1.2) \quad \int_0^t \varphi(\tau) G(x, t-\tau) d\tau = u(x, t)$$

Однако при решении ряда задач (вычисление концентрации радионуклидов в полости захоронения продуктов отхода ядерной энергетики, определение функции отклика среды в хроматографической колонке и т. д.) возникает необходимость решения обратных задач, например по измеренной концентрации $u(x, t)$ в некоторой точке x и известной функции отклика среды $G(x, t)$ определить концентрацию на входе пористой среды $\varphi(\tau)$. Задача определения параметров среды (кинетического коэффициента сорбции β , коэффициента диффузии D , коэффициента Генри $\Gamma = \gamma^{-1}$) по известным $u(x, t)$ и $\varphi(\tau)$ также относится к обратным. Как правило, обратные задачи являются некорректно поставленными [16] и для их решения необходимо применять специальные методы, реализуемые на ЭВМ.

В настоящей работе в линейном приближении и при условии, что коэффициент диффузии и кинетический коэффициент сорбции постоянны, исследуется зависимость функции отклика среды $G(x, t)$ от параметров, рассматривается решение уравнения (1.2) относительно функции $\varphi(\tau)$ по приближенно заданным $u(x, t)$ и $G(x, t)$ и обсуждаются вопросы влияния кинетического коэффициента сорбции на полученное приближенное решение.

2. Анализ функции отклика среды. Рассмотрим поведение функции отклика среды в зависимости от параметров задачи. Выражение (1.1) представляет собой сумму двух слагаемых, каждое из которых описывает проявление различных физических процессов. Первое слагаемое характеризует концентрацию радиоактивного газа, максимум которой переносится со скоростью потока. При $\beta = 0, \lambda = 0$ (кинетический коэффициент сорбции пористой среды и постоянная радиоактивного распада пренебрежимо

малы) (1.1) совпадает с функцией Грина задачи Коши для уравнения диффузии в движущейся среде. Второе слагаемое обусловлено концентрацией радиоактивного газа, отдаваемого пористой средой в поток, на величину которой влияют кинетический коэффициент сорбции и коэффициент Генри. При $\beta=0$ или $\gamma=0$ второе слагаемое обращается в нуль. Если $\beta \rightarrow \infty$



Фиг. 1

(случай равновесной адсорбции) предельным переходом из (1.1) получаем, что $G_1(x, t) \rightarrow 0$

$$(2.1) \quad G(x, t) = G_2(x, t) = \frac{u_0 x \sqrt{1+\gamma}}{\sqrt{4\pi D t^3 \gamma}} \times \exp \left\{ -\frac{[x - \nu \gamma t (1+\gamma)^{-1}]^2 (1+\gamma)}{4D \gamma t} - \lambda t \right\}$$

Из (2.1) следует, что в случае равновесной адсорбции максимум концентрации движется в пористой среде со скоростью $\nu \gamma (1+\gamma)^{-1}$, зависящей от скорости газового потока и коэффициента Генри.

На фиг. 1 показана зависимость концентрации радиоактивного газа от времени для $x=300$ см при различных кинетических коэффициентах сорбции β : 0.0055, 0.055, 0.085, 0.55, 5.5, 55 сек^{-1} . Для расчета функции отклика использовались следующие значения параметров: $\nu=5$ см/сек , $D=0.8$ $\text{см}^2/\text{сек}$, $\lambda=0.01$ сек^{-1} , $\gamma=0.2$. Видно, что при малых кинетических коэффициентах β радиоактивная примесь выходит преимущественно со скоростью газового потока. При больших β концентрация примеси появляется с задержкой, очевидным образом определяемой из выражения (2.1). Для некоторых значений кинетических коэффициентов сорбции ($\beta=$

$= 0.085 \text{ сек}^{-1}$) может быть зафиксировано два максимума концентрации.

Кинетический коэффициент сорбции характеризует степень перекачки радиоактивной примеси из импульса, движущегося вместе с газовым потоком, в импульс, движущийся с задержкой. При проведении хроматографических исследований (анализ газов, находящихся в пробе и т.д.) с целью получения полной перекачки концентрации из первого импульса во второй для адсорбентов подбираются материалы с большими кинетическими коэффициентами сорбции (угли, силикагели, цеолиты и т.д.). С увеличением β ширина функции отклика уменьшается, что можно использовать для улучшения разрешающей способности хроматографической колонки. От коэффициента β , как это следует из фиг. 1, зависит (особенно значительно в переходной области значений $t \sim \beta^{-1}$) время выхода из среды максимума концентрации радиоактивной примеси, что позволяет делать выводы о величине самого кинетического коэффициента сорбции [15].

Коэффициент Генри влияет на задержку при движении второго максимума концентрации примеси в газовом потоке. При $\beta t \gg 1$ и фиксированных x и ν величина задержки не зависит от β и определяется только параметром γ . С увеличением γ время появления второго максимума на выходе адсорбера уменьшается, в пределе сливаясь с временем появления первого максимума концентрации.

Процесс конвективной диффузии приводит к размытию формы импульса радиоактивного газа и уменьшает область значений β , при которых существуют два максимума. Если влиянием конвективной диффузии можно пренебречь, то интеграл в $G_2(x, t)$ вычисляется и полученное значение концентрации совпадает с приведенными в [18].

3. Метод решения. Рассмотрим уравнение (1.2). Известно, что задача нахождения $\varphi(\tau)$ из этого уравнения является некорректно поставленной [16]: произвольно малым (например, в пределах погрешности измерения) изменениям функции $u(x, t)$ могут отвечать сколь угодно большие изменения его решения $\varphi(\tau)$; кроме того, точное решение уравнения (1.2) существует не для всякой правой части, получаемой приближенно. Поскольку в практических задачах правая часть уравнения (1.2) обычно известна приближенно, то имеет смысл только задача отыскания приближенного решения уравнения (1.2), причем понятие приближенного решения должно быть так определено, чтобы решение было устойчивым к малым изменениям входной информации, иначе его нельзя будет разумно интерпретировать физически. Устойчивое решение уравнения (1.2) нельзя искать обычными способами, например заменяя интегральное уравнение системой линейных алгебраических уравнений (она получается вырожденной или плохо обусловленной) или с помощью преобразования Фурье или Лапласа. Для решения следует воспользоваться методом регуляризации. Приближенное решение, полученное методом регуляризации, называется регуляризованным решением [16].

Применяя к обеим частям уравнения (1.2) преобразование Фурье, получим $K(\omega)\Phi(\omega) = U(\omega)$. Здесь $K(\omega)$, $\Phi(\omega)$, $U(\omega)$ — Фурье-образы функций $G(x, t)$, $\varphi(\tau)$ и $u(x, t)$ при фиксированном x . Кажется естественным использовать формулу обращения и в качестве приближенного решения уравнения (1.2) брать

$$(3.1) \quad \varphi(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{U(\omega)}{K(\omega)} \exp(-i\omega\tau) d\omega$$

Будем интересоваться лишь непрерывными приближенными решениями. Однако, чтобы правая часть формулы (3.1) была непрерывной функцией $\varphi(\tau)$, необходимо, чтобы ее Фурье-образ $\Phi(\omega) = U(\omega)/K(\omega)$ убывал при $\omega \rightarrow \infty$ не медленнее, чем $o(\omega^{-2})$, что требует согласованного убывания $U(\omega)$ и $K(\omega)$ при $\omega \rightarrow \infty$. Если функции $u(x, t)$ и $G(x, t)$ заданы приближенно, то $U(\omega)$ и $K(\omega)$ имеют случайный характер и их отношение может не удовлетворять указанным требованиям. «Решение» $\varphi(\tau)$, вычисляемое по формуле (3.1), может даже не существовать, если, например, интеграл (3.1) расходится из-за несогласованного характера стремления к нулю (при $\omega \rightarrow \infty$) $U(\omega)$ и $K(\omega)$. Но даже если функция $U(\omega)K^{-1}(\omega)$ имеет обратное преобразование

Фурье, отклонение $\varphi(\tau)$ от точного решения $\varphi_0(\tau)$ может быть как угодно велико. Из сказанного следует, что в качестве приближенного решения уравнения (1.2) нельзя брать точное решение этого уравнения, если функция $U(x, t)$ и, возможно, $G(x, t)$ известны приближенно.

Учитывая вид уравнения, основываясь на методе регуляризации [16], будем применять метод, предложенный в [17]. Этот метод позволяет учесть погрешность как в функции $u(x, t)$, так и в ядре $G(x, t)$ уравнения (1.2) и найти решение $\varphi(\tau)$, близкое к оптимальному (в смысле $\min M[\|\varphi - \varphi_0\|_{L^2}^2]$, где M — оператор математического ожидания, φ_0 — точное решение уравнения (1.2) с точными $u(x, t)$ и $G(x, t)$, которое предполагается существующим). Идея метода заключается в том, что приближенное решение $\varphi(\tau)$ ищется в виде

$$(3.2) \quad \varphi(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{K(-\omega)U(\omega)}{K(\omega)K(-\omega) + R^2(\omega)} \exp(-i\omega\tau) d\omega$$

Введение специально подобранной функции $R^2(\omega)$ в знаменатель (3.2) позволяет получить решение $\varphi(\tau)$, устойчивое к малым возмущениям $U(x, t)$ и $G(x, t)$.

При реализации на ЭВМ интеграл в (3.2) заменяют интегральной суммой, выбирая $R^2(\omega_i)$ на каждом шаге интегрирования по ω .

Предполагим, что дисперсии функций $u(x, t)$ и $G(x, t)$ известны на сетке измерений и погрешности этих функций независимы в каждой точке, причем математические ожидания погрешностей равны нулю. На практике, как правило, реализуются именно эти условия. Тогда, как показано в [17], числа $R^2(\omega_i)$ можно брать равными:

$$(3.3) \quad \begin{aligned} R^2(\omega_i) &= 3.5\sigma_i^2 + 2\delta_i^2\rho_i^{-2}, \quad (\eta_i \geq \alpha\delta_i, \quad r_i \geq \alpha\sigma_i) \\ R^2(\omega_i) &= \infty \quad (\eta_i < \alpha\delta_i \quad \text{или} \quad r_i < \alpha\sigma_i) \\ \rho_i^2 &= \max\{D[\operatorname{Re} U(\omega_i)], \quad D[\operatorname{Im} U(\omega_i)]\}, \\ \sigma_i^2 &= \max\{D[\operatorname{Re} K(\omega_i)], \quad D[\operatorname{Im} K(\omega_i)]\} \end{aligned}$$

Здесь D — оператор дисперсии, $r_i = |K(\omega_i)|$, $\eta_i = |U(\omega_i)|$, $\rho_i = \eta_i r_i^{-1}$. Величины δ_i^2 и σ_i^2 вычисляются по известным дисперсиям величин $u(x, t_j)$ и $G(x, \tau_j)$ из вида квадратурных формул, использованных при вычислении $K(\omega_i)$ и $U(\omega_i)$. Из (3.3) видно, что если для i -го номера нарушаются условия $\eta_i \geq \alpha\delta_i$ и $r_i \geq \alpha\sigma_i$, то i -е слагаемое интегральной суммы, приближающей (3.2), отбрасывается. Параметр α играет роль параметра «вырезания». Неудачный выбор α сильно влияет на получаемое решение.

Приведенные в [17] оценки и практические расчеты показали, что $2 \ll \alpha \ll 4.5$. Выбор α из этого интервала следует осуществлять из условия гладкости получаемого решения или из других условий, наложенных на решение по его физическому смыслу. Удобно также использовать априорную информацию не о решении, а о модуле Фурье-образа, например о поведении при $\omega \rightarrow \infty$. Большая наглядность при этом достигается при анализе графика $\rho = \rho(\omega)$. Вообще говоря, правила (3.3) могут быть изменены с учетом имеющейся информации. Так, если $\eta_i < \alpha\delta_i$ или $r_i < \alpha\sigma_i$, в соответствии с методом, изложенным в [16], можно брать $R^2(\omega_i) = \alpha_i \omega_i^2$, где параметр α_i находится из условия непрерывности вектора $\rho(\omega_i)$.

Изложенная методика позволяет также правильно выбрать конечные пределы интегрирования в (3.2) (см. [17]).

4. Результаты и их обсуждение. Практически важными являются случаи, когда на вход пористой среды подается концентрация радиоактивного газа, определяемая функциями вида

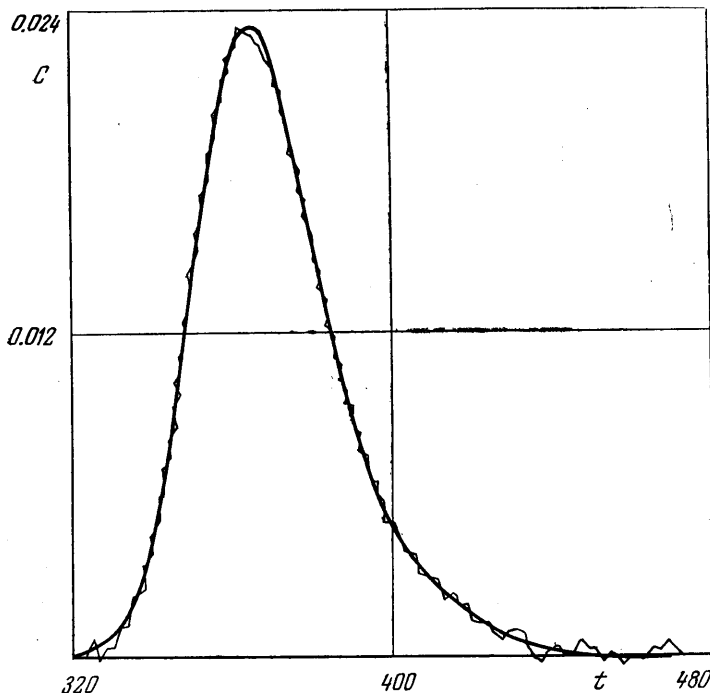
$$(4.1) \quad \varphi_1(t) = a_1 \exp(-a_2 t) [1 - \exp(-a_3 t)], \quad t \geq 0$$

$$(4.2) \quad \varphi_2(t) = a_1 \exp(-a_2 t), \quad t \geq 0$$

Здесь a_1, a_2, a_3 — размерные постоянные. Подставив (4.1) или (4.2) в уравнение (1.2) с ядром (1.1) и параметрами ν, D, γ , указанными выше, $\lambda = 0, x = 300 \text{ см}, \beta = 300 \text{ сек}^{-1}$ (что соответствует $\beta t \gg 1$), получим концентрацию $u(x, t)$ на выходе пористой среды.

На фиг. 2 представлены кривые, соответствующие точной $u(x, t)$, полученной в результате расчета по формуле (1.2) с $\varphi_1(t)$, где $a_1 = 1, a_2 =$

$=0.07 \text{ сек}^{-1}$, $a_3=0.01 \text{ сек}^{-1}$, и возмущенной на 2% концентрации $u(x, t)$. Параметры a_1 , a_2 , a_3 выбирались таким образом, чтобы полуширина решения была бы меньше полуширины ядра и размытие импульса после прохождения пористого слоя было бы существенным. Этот случай представляет наибольший интерес для задачи восстановления, так как если полуширина ядра много меньше характерной области изменения импульса на



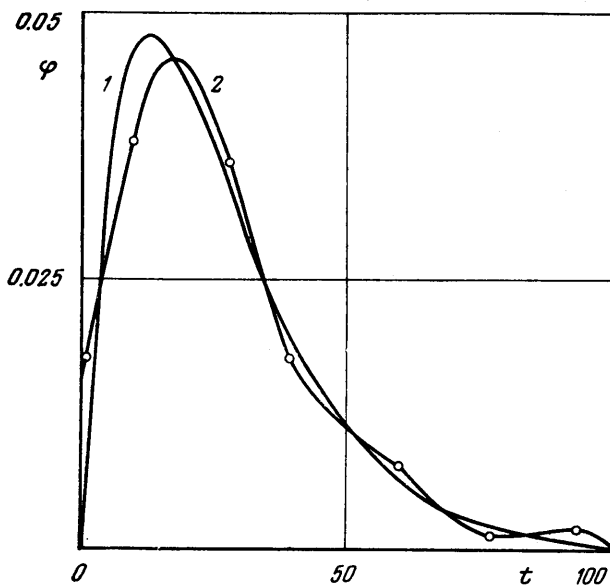
Фиг. 2

входе, то импульс на выходе почти не изменится и для определения $\varphi(\tau)$ достаточно измерить $u(x, t)$.

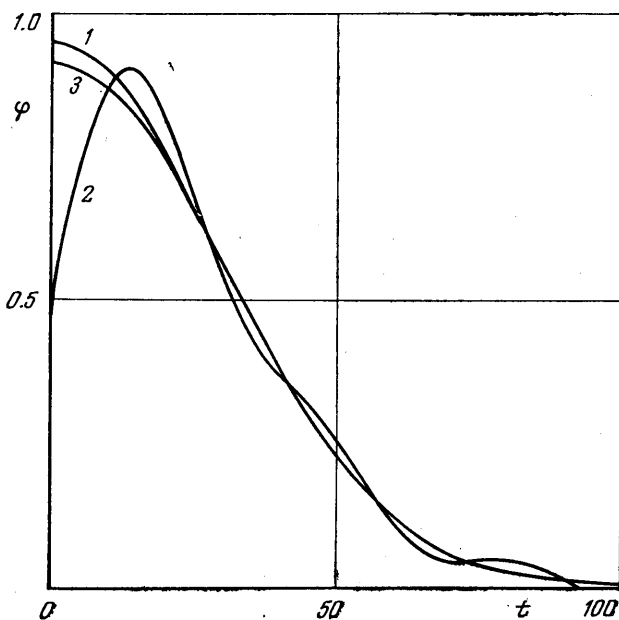
Фиг. 3 иллюстрирует сравнение заданной концентрации (4.1), подаваемой на вход пористой среды (кривая 1), и восстановленной зависимости концентрации от времени (кривая 2) по возмущенной концентрации $u(x, t)$ с помощью выбранной методики.

В целом кривая 2 верно приближает кривую 1. Максимальное несовпадение наблюдается при $t=0$. Это связано с тем, что в спектре восстановленного сигнала отсутствуют высокочастотные компоненты, которые невозможно получить из-за наличия погрешности в $u(x, t)$. Поэтому кривая 2 при $t \rightarrow 0$ ведет себя более полого, чем кривая 1. При стремлении уровня погрешности в $u(x, t)$ к нулю кривая 2 приближается к кривой 1.

Применение указанной выше методики к восстановлению гладких функций, не имеющих крутых фронтов, дает хорошие результаты. Однако восстановление функций, имеющих большие (по сравнению с шагом сетки) скачки, может не привести к удовлетворительным результатам, поскольку в спектре таких функций существенную роль играют высокочастотные компоненты, так как модуль Фурье-образа разрывной функции медленно уменьшается с ростом ω , а на больших ω влияние погрешности измерения становится преобладающим. Именно с такими трудностями приходится сталкиваться при обработке функции (4.2), где неявно считается $\varphi(t) = 0$ при $t < 0$.



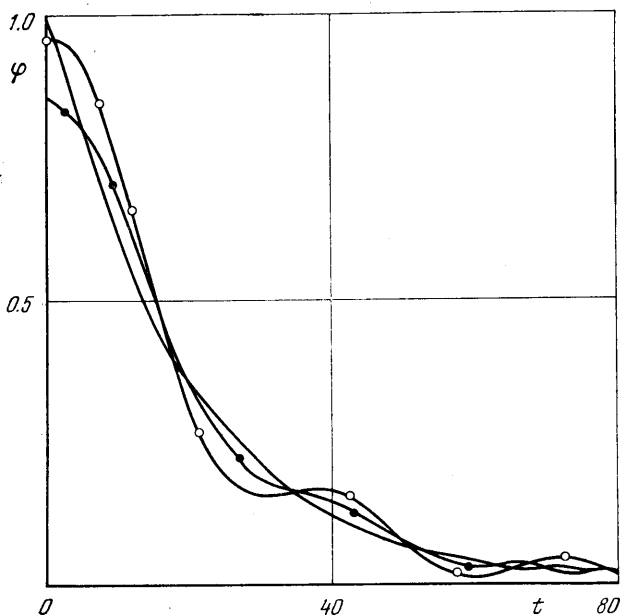
Фиг. 3



Фиг. 4

В этих случаях результаты можно значительно улучшить, если ядро уравнения симметрично или близко к симметричному, что имеет место для ядра (1.1) при $\beta t \gg 1$. Для этого задачу следует изменить так, чтобы искать не заданное (с разрывом), а симметризованное (и поэтому гладкое) решение. Пусть, например, $\varphi(t)$ имеет вид $\varphi(t) = \exp(-5 \cdot 10^4 t^2)$ при $t > 0$. Считая, что о решении ничего не известно, кроме того, что при $t = 0$ у него есть разрыв, а ядро — финитная симметричная функция, преобразуем соответствующую заданную функцию $u(x, t)$ к виду, которому отвечает сим-

метризованное решение $\varphi(t) = \exp(-5 \cdot 10^4 t^2)$, $-\infty < t < \infty$. Решение (1.2) по преобразованной функции $u(x, t)$ можно искать только в области значений $t \geq 0$. На фиг. 4 изображены кривые, соответствующие точному решению (кривая 1) и восстановленным решениям (кривая 2 — по методике, описанной в работе [17], кривая 3 — с применением симметризации). Если для кривой 2 максимальное отклонение от точного решения составляет 50%, то для кривой 3 — только 3%.



Фиг. 5

Рассмотрим восстановление с помощью изложенной методики функции (4.2) с параметрами $a_1=1$, $a_2=0.05 \text{ сек}^{-1}$. При решении исследовался вопрос о влиянии неточности значения параметра β на погрешность полученного решения. Для этого восстановление проводилось по одной и той же возмущенной функции $u(x, t)$, но в качестве ядра брались функции отклика (1.1) с параметрами 200, 300, 400 сек^{-1} . Напомним, что функция $u(x, t)$ была получена при свертывании (4.2) с ядром, у которого полагаем $\beta=300 \text{ сек}^{-1}$. На фиг. 5 показаны кривые, соответствующие этим значениям β , и точное решение (немаркированная кривая). Как видим, результаты восстановления при всех значениях β почти не отличаются друг от друга. Следовательно, при $\beta t \gg 1$ влияние параметра β на восстановленное решение малосущественно.

Описанная методика решения обратных задач по определению концентрации, подаваемой на вход в пористую среду, с функцией отклика (1.1) применялась при решении реальных задач и дала хорошие результаты. Отметим, что определение концентрации $u(x, t)$ в заданной точке x можно проводить и с экспериментально измеренным ядром. Его можно измерить, подавая на вход сигнал, длина которого много меньше длины восстанавливаемого решения. Применяя изложенную методику, уравнение (1.2) можно решать не только относительно $\varphi(\tau)$, но и относительно $G(x, \tau)$ при известных $\varphi(\tau)$ и $u(x, t)$, что дает возможность определить функцию отклика среды для данного x в том случае, если ее невозможно измерить непосредственно. Экспериментальное определение функции

отклика $G(x, \tau)$ в конечном числе точек x пористой среды позволяет, используя выражение (1.1), аппроксимировать $G(x, \tau)$ в любой другой точке x .

Решение уравнения (1.2) с функцией отклика типа (1.1) может использоваться и при рассмотрении других физических задач, например при определении свойств металла или полупроводника по известным зависимостям концентрации нейтральных атомов примеси или заряженных примесных ионов от времени (см. [19-21]).

Поступила 11 VIII 1977

ЛИТЕРАТУРА

1. Iwai S., Inoue J. A method for estimation of groundwater stratification. In: Radioisotopes in Hydrology. Proc. Simpos. Tokio, 1963. Vienna, IAEA, 1963.
2. Соколовский Э. В. Применение радиоактивных изотопов для контроля за разработкой нефтяных месторождений. М., «Недра», 1968.
3. Николаевский В. Н. Конвективная диффузия в пористых средах. ПММ, 1959, т. 23, вып. 6.
4. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. М., «Наука», 1965.
5. Арсенин В. Я. Методы математической физики и специальные функции. М., «Наука», 1974.
6. Лыков А. В. Теория теплопроводности. М., «Высшая школа», 1967.
7. Жуховицкий А. А., Тихонов А. Н., Забежинский Я. Л. Поглощение газа из тока воздуха слоем зернистого материала. Ж. физ. химии, 1945, т. 19, вып. 6.
8. Тихонов А. Н., Жуховицкий А. А., Забежинский Я. Л. Поглощение газа из тока воздуха слоем зернистого материала. Ж. физ. химии, 1946, т. 20, вып. 10.
9. Шестаков В. М. К теории динамики сорбции при фильтрации в зернистых материалах. Ж. физ. химии, 1961, т. 35, вып. 10.
10. Николаевский В. Н., Бондарев Э. А., Миркин М. И., Степанова Г. С., Терзи В. П. Движение углеводородных смесей в пористой среде. М., «Недра», 1968.
11. Марон В. И. Модель диффузии с учетом сорбции. Инж.-физ. ж., 1976, т. 30, № 3.
12. Андрианов Б. В., Андрианов М. Н., Мисин М. С. Внешний и внутренний массообмен в динамике адсорбции для неподвижного слоя адсорбента. В сб. «Кинетика и динамика физической адсорбции». М., «Наука», 1973.
13. Цабек Л. К. Интегрирование квазилинейных уравнений движения смеси через пористую недеформированную среду. Изв. АН СССР, МЖГ, 1974, № 2.
14. Кузнецов Н. Н. Некоторые математические задачи хроматографии. В сб. «Вычислительные методы и программирование», вып. 6. М. Изд. МГУ, 1967.
15. Бондаренко А. Г., Колобашкин В. М., Кудряшов Н. А. Диффузия и адсорбция радиоактивного газа в пористой среде. Изв. АН СССР, МЖГ, 1976, № 5.
16. Тихонов А. Н., Арсенин В. Я. Методы решения некорректных задач. М., «Наука», 1974.
17. Арсенин В. Я., Зябрев Н. Б. Оценки погрешности приближенных решений систем линейных алгебраических уравнений. М., Препринт ИПМ АН СССР, 1976, № 80.
18. Бондаренко А. Н., Козорезов Е. В., Колобашкин В. М. Неравновесная адсорбция радиоактивного газа в пористой среде. Изв. АН СССР, МЖГ, 1975, № 4.
19. Schroeder K. Diffusion in crystals with traps: a simple phenomenological model. Z. Physik, B., 1976, vol. 25, No. 1.
20. Болотов В. В., Васильев А. В., Смирнов Л. С. Реакция в кристаллах как фактор, определяющий процессы диффузии. Физика и техника полупроводников, 1974, т. 8, № 6.
21. Беликова М. Н., Заставный А. В., Король В. М. О замедляющем действии радиационных дефектов при диффузии натрия в кремнии. Физика и техника полупроводников, 1976, вып. 3.