

## К ТЕОРИИ НЕСТАЦИОНАРНОЙ НЕРАВНОВЕСНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ НЕСМЕШИВАЮЩИХСЯ ЖИДКОСТЕЙ

А. П. ВИННИЧЕНКО

(Москва)

Предлагается модификация модели неравновесной фильтрации неоднородной жидкости, предложенной в [1]. Исследуется структура скачка насыщенности с учетом неравновесности, доказывается ее устойчивость в линейном приближении.

1. Основные уравнения. Процесс вытеснения одной жидкости другой, несмешивающейся с первой, описывается системой уравнений [2]

$$(1.1) \quad m\partial_t\sigma + \operatorname{div} V_1 = 0, \quad m\partial_t(1-\sigma) + \operatorname{div} V_2 = 0$$

$$V_i = -\frac{k}{\mu_i} f_i \operatorname{grad} p_i \quad (i=1, 2), \quad p_2 - p_1 = p_c$$

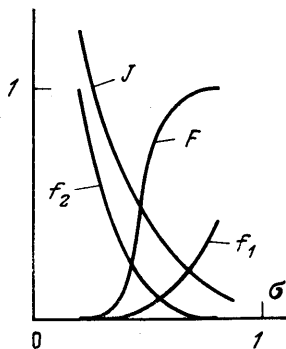
Здесь  $m$  — пористость среды,  $\sigma$  — насыщенность порового пространства вытесняющей фазой (приписываем ей индекс 1, вытесняемой фазе приписываем индекс 2),  $V_i$  — скорости фильтрации фаз,  $k$  — абсолютная проницаемость пористой среды,  $\mu_i$  — коэффициенты вязкости фаз ( $\mu_1 < \mu_2$ ),  $p_i$  — давления фаз,  $f_i$  — относительные проницаемости фаз,  $p_c$  — статическое капиллярное давление.

Относительные фазовые проницаемости определяются из экспериментов в условиях установившейся фильтрации, и в классической теории фильтрации считается, что определенные таким образом функции, зависящие от одной насыщенности  $\sigma$  (фиг. 1), характеризуют сопротивление движению фаз и в нестационарных процессах. Аналогично капиллярное давление  $p_c(\sigma)$  считается в классической теории фильтрации равным равновесному и для нестационарных процессов

$$(1.2) \quad p_c = T \cos \theta_0 \sqrt{m/k} J(\sigma)$$

Здесь  $T$  — поверхностное натяжение между фазами,  $\theta_0$  — угол смачивания,  $J(\sigma)$  — функция Лавретта [3], ее график для случая, когда более смачивающая жидкость вытесняет менее смачивающую, приведен на фиг. 1.

В [1] было предложено для учета неравновесных эффектов выбирать значения равновесных кривых фазовых проницаемостей и капиллярного давления не в точке, соответствующей мгновенному значению насыщенности  $\sigma(t, x)$ , а в точке  $\sigma(t \pm \tau, x)$ . Для этого предлагался механизм интернирования части жидкости при перестройке фильтрационного процесса в ходе повышения насыщенности вытесняющей жидкости.



Фиг. 1

Согласно этой модели в процессе вытеснения

$$(1.3) \quad \begin{aligned} f_1 &= f_1(\sigma(t-\tau, x)) \approx f_1(\sigma-\tau\partial_t\sigma), \quad f_2 = f_2(\sigma(t+\tau, x)) \approx f_2(\sigma+\tau\partial_t\sigma) \\ p_c &= p_c(\sigma(t-\tau, x)) \approx p_c(\sigma-\tau\partial_t\sigma) \end{aligned}$$

где  $\tau$  — время замещения, характерное время релаксации процесса перестройки поля насыщенности.

Таким образом, значения  $f_1, f_2$  здесь оказываются меньшими, чем в классической теории, а значение  $p_c$  — большим.

Хотя вытесняющая жидкость может оказаться интернированной, что действительно понижает значение ее фазовой проницаемости, однако интернированная часть вытесняемой жидкости в потоке вытесняющей играет роль стенки — она полностью заперта капиллярными затворами и ее можно просто заменить вытесняющей жидкостью. Поэтому эффективная насыщенность вытесняющей жидкости должна быть больше, чем реальная насыщенность. Итак, механизм интернирования, с одной стороны, приводит к понижению значения  $f_1$ , а с другой — к повышению этого значения. Поскольку интернированная часть вытесняемой жидкости, видимо, много больше интернированной части вытесняющей жидкости, вторая тенденция преобладает над первой.

Что касается капиллярного давления, то часть его расходуется на удержание интернированной вытесняемой жидкости капиллярными затворами, и поэтому на общее движение влияния не оказывает. Следовательно, величину  $p_c$  надо брать меньшей, чем в классической теории.

Предлагаемая в настоящей работе модель основана на предположении, что относительные проницаемости обеих фаз и капиллярное давление соответствуют равновесным при некоторой опережающей насыщенности, так что

$$(1.4) \quad \begin{aligned} f_1 &= f_1(\sigma(t+\tau, x)) \approx f_1(\sigma+\tau\partial_t\sigma), \quad f_2 = f_2(\sigma(t+\tau, x)) \approx f_2(\sigma+\tau\partial_t\sigma) \\ p_c &= p_c(\sigma(t+\tau, x)) \approx p_c(\sigma+\tau\partial_t\sigma) \end{aligned}$$

При этом зависимостью времени замещения от насыщенности пренебрегается, считается, что  $\tau$  постоянно.

Переходя к безразмерным параметрам [1], получаем систему уравнений

$$(1.5) \quad \begin{aligned} m\partial_\sigma\sigma + \operatorname{div}_z V_1 &= 0, \quad V_1 = -f_1(\sigma + \varepsilon_1\partial_\sigma\sigma) \operatorname{grad}_z P_1 \\ -m\partial_\sigma\sigma + \operatorname{div}_z V_2 &= 0, \quad V_2 = -\mu f_2(\sigma + \varepsilon_2\partial_\sigma\sigma) \operatorname{grad}_z P_2 \\ P_2 - P_1 &= \varepsilon_2 J(\sigma + \varepsilon_1\partial_\sigma\sigma) \end{aligned}$$

$$\mu = \frac{\mu_1}{\mu_2} < 1, \quad \varepsilon_1 = \frac{\tau}{\tau_1}, \quad \varepsilon_2 = \frac{T \cos \theta_0}{\Delta P} \sqrt{\frac{m}{k}}, \quad \tau = \frac{\mu_1 L^2}{k \Delta P}$$

Здесь  $\tau$  — характерное время;  $L$  — характерный размер области, в которой происходит фильтрация;  $\Delta P$  — характерный перепад давления (из граничных условий).

Для большинства задач величины  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$  малы. Для получения первого приближения решения пренебрежем параметрами  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$  (это можно сделать, если  $\partial_\sigma\sigma$  и  $\operatorname{grad}_z\sigma$  невелики), придем к классической системе уравнений Муската — Миреса [1, 4] для первого члена внешнего разложения. Эта схема, вообще говоря, приводит к разрывным решениям. Возникают скачки насыщенности, для расчета движения которых необходимо привлекать законы сохранения. На разрывах значения  $\partial_\sigma\sigma$  и  $\operatorname{grad}_z\sigma$  бесконечны, т. е. не выполняется основное условие внешнего разложения. Поэтому надо рассматривать внутреннее разложение, не пренебрегая параметрами  $\varepsilon_1$  и

$\varepsilon_2$ , а так как необходимость в этом рассмотрении имеется только в малой окрестности фронта разрыва, можно считать движение одномерным.

В окрестности поверхности разрыва сделаем замену:  $\theta = t\delta$ ,  $\xi_1 = x\delta$ ,  $\xi_2 = x_2$ ,  $\xi_3 = x_3$  (считая, что поверхность разрыва перпендикулярна оси  $\xi_1$ ), где  $\delta$  — малая величина. Кроме того, ясно, что член  $\varepsilon_2\partial_\theta\sigma$  в выражении  $\varepsilon_2J(\sigma + \varepsilon_1\partial_\theta\sigma)$  ввиду малости параметров  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_2$  дает эффект более высокого порядка, поэтому в первом приближении этим эффектом пренебрегаем и используем это выражение в виде  $\varepsilon_2J(\sigma)$ .

Пренебрегая малыми величинами, получаем

$$(1.6) \quad \begin{aligned} m\partial_t\sigma + \partial_x V_1 &= 0, & V_1 &= -f_1(\sigma + \delta_1\partial_t\sigma) \frac{1}{\delta} \partial_x P_1 \\ -m\partial_t\sigma + \partial_x V_2 &= 0, & V_2 &= -\mu f_2(\sigma - \delta_1\partial_t\sigma) \frac{1}{\delta} \partial_x P_2, & P_2 &= P_1 = \varepsilon_2 J(\sigma) \end{aligned}$$

где  $\delta_1 = \varepsilon_1/\delta$ ;  $\sigma$ ,  $V_1$ ,  $V_2$ ,  $P_1$ ,  $P_2$  — функции от  $(t, x)$ . Это приводит к уравнениям

$$(1.7) \quad \begin{aligned} m\partial_t\sigma + \partial_x V_1 &= 0, & \partial_x(V_1 + V_2) &= 0 \\ V_2 &= -\mu f_2(\sigma + \delta_1\partial_t\sigma) \left[ \delta_2 J'(\sigma) \partial_x\sigma - \frac{V_1}{f_1(\sigma + \delta_1\partial_t\sigma)} \right], & \delta_2 &= \frac{\varepsilon_2}{\delta} \end{aligned}$$

Считаем, что величины  $\delta_1$ ,  $\delta_2$  малы. Функция  $V(t) = V_1 + V_2$  находится из внешнего разложения как суммарный безразмерный поток жидкости через поверхность разрыва в окрестности рассматриваемой точки. Так как внешнее время  $\theta$  более медленное, чем внутреннее время  $t$ , то можно считать  $V(t)$  постоянной. Это предположение позволяет прийти к одному уравнению для насыщенности с граничными условиями, получающимися из внешнего разложения

$$(1.8) \quad \begin{aligned} m\partial_t\sigma + \partial_x [VF(\eta) + \delta_2\mu f_2(\eta)F(\eta)J'(\sigma)\partial_x\sigma] &= 0 \\ \sigma(t, -\infty) &= \sigma_-, & \sigma(t, +\infty) &= \sigma_+ \\ \eta &= \sigma + \delta_1\partial_t\sigma, & F(\eta) &= f_1(\eta) / [f_1(\eta) + \mu f_2(\eta)] \end{aligned}$$

график функции  $F(\eta)$  изображен на фиг. 1.

Пусть для определенности  $\sigma_- > \sigma_+$ ,  $V > 0$  (фронт вытеснения движется слева направо). Предположим, что величины  $\delta_1\partial_t\sigma$  и  $\delta_2\partial_x\sigma$  малы (это требует ограниченности  $\partial_t\sigma$  и  $\partial_x\sigma$ ). Пренебрегая в уравнении вторыми степенями малых величин, получаем

$$(1.9) \quad \begin{aligned} m\partial_t\sigma + \partial_x [V(F + \delta_1 F' \partial_t\sigma) + \delta_2 \mu f_2 F J' \partial_x\sigma] &= 0 \\ \sigma(t, -\infty) &= \sigma_-, & \sigma(t, +\infty) &= \sigma_+ \end{aligned}$$

где  $F$ ,  $F'$ ,  $f_2$ ,  $J'$  — функции от  $\sigma(t, x)$ .

**2. Анализ структуры фронта вытеснения.** Рассмотрим решение специального вида  $\sigma(t, x) = \sigma_0(x - ct)$ . Получим обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка с граничными условиями

$$(2.1) \quad \begin{aligned} \sigma_0' &= \frac{F - k_1\sigma_0 - k_2}{V\delta_1 k_1 m^{-1} F' - \delta_2 \mu V^{-1} f_2 F J'} \\ \sigma_0(-\infty) &= \sigma_-, & \sigma_0(+\infty) &= \sigma_+ \\ k_1 &= \frac{F(\sigma_-) - F(\sigma_+)}{\sigma_- - \sigma_+} > 0, & k_2 &= F(\sigma_+) - \frac{mc}{V} \sigma_+, & c &= \frac{V k_1}{m} \end{aligned}$$

Здесь  $F, F', f_2, J'$  — функции от  $\sigma_0(\xi)$ . Оба слагаемых в знаменателе больше нуля.

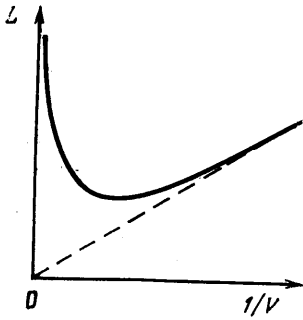
Из условия эволюционности для уравнения  $m\partial_t\sigma + V\partial_x F(\sigma) = 0$ , полученного из (1.9), пренебрегая малыми величинами  $\delta_1$  и  $\delta_2$  [5], получим

$$(2.2) \quad F'(\sigma_-) > k_1 > F'(\sigma_+)$$

Сопоставляя эти неравенства с графиком  $F(\sigma)$ , найдем, что внутри интервала  $(\sigma_+, \sigma_-)$  числитель уравнения (2.1) меньше нуля и обращается в нуль на концах этого интервала. Таким образом, решение уравнения (2.1) с нужными граничными условиями существует. На бесконечности оно экспоненциально приближается к граничным значениям. За ширину фронта естествен-

но взять длину  $L = - \int_{\sigma_+ + \alpha}^{\sigma_- - \alpha} d\sigma_0 / \sigma_0'$ , где  $\alpha$  — малая константа. Тогда

$$(2.3)$$



$$L = - \int_{\sigma_+ + \alpha}^{\sigma_- - \alpha} \frac{V^2 \delta_1 k_1 F' - \delta_2 \mu m f_2 F J'}{m V (F - k_1 \sigma_0 - k_2)} d\sigma_0 = V I_1 + \frac{1}{V} I_2$$

Фиг. 2

где  $I_1$  и  $I_2$  не зависят от  $V$  и больше нуля. График функции  $L(1/V)$  приведен на фиг. 2. Получается та же зависимость ширины фронта от скорости вытеснения, что и в [1]; при малых  $V$  в соответствии с уравнением Раппопорта — Лиса ширина  $L$  прямо пропорциональна  $1/V$ , а при больших  $V$ ,  $L$  прямо пропорциональна  $V$ , т. е.  $L(1/V)$  ведет себя так же, как и в экспериментах В. М. Рыжика и В. Н. Мартоса [2].

Основными предположениями при выводе уравнения (1.9) были предположения о малости  $\delta_1 \partial_t \sigma$  и  $\delta_2 \partial_x \sigma$ . Проверим, выполняются ли они для решений обыкновенного дифференциального уравнения (2.1). Можно показать, что

$$\begin{aligned} |\delta_1 c \sigma_0'| &\leq |(\sigma_- - \sigma_+) (\xi_1 - \xi_2) F''(\xi_3) / F'(\sigma_+)| \\ |\delta_2 \sigma_0'| &\leq \sqrt{\delta_2 / \delta_1} (\sigma_- - \sigma_+) (\xi_1 - \xi_2) \times \\ &\times F''(\xi_3) / [2 \sqrt{\mu k_1 m^{-1} \min_{\eta \in (\sigma_+, \sigma_-)} (F' f_2 F J')}] \end{aligned}$$

где  $\xi_1, \xi_2 \in (\sigma_+, \sigma_-)$ ,  $\xi_3 \in (\xi_1, \xi_2)$ .

Если разность  $(\sigma_- - \sigma_+)$  невелика (или мала производная  $F''$ ), то наши предположения выполняются. И если решения уравнения (1.9) близки к решениям уравнения (2.1), то основные предположения выполняются и для них.

3. Численный эксперимент. Для удобства перейдем к движущейся со скоростью  $c$  системе координат. Уравнение (1.9) при этом примет вид

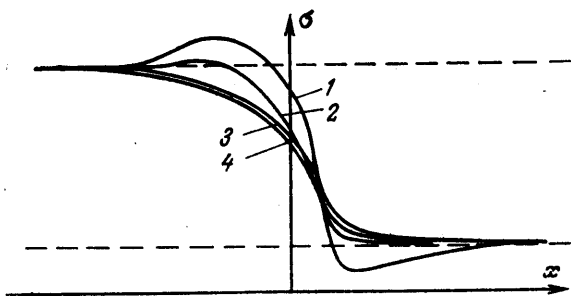
$$(3.1) \quad m \partial_t \sigma + \partial_x \{V [F - k_1 \sigma + \delta_1 (\partial_t \sigma - c \partial_x \sigma) F'] + \delta_2 \mu f_2 F J'\} \partial_x \sigma = 0$$

Решения уравнения (2.1) являются стационарными решениями этого уравнения, т. е. решениями вида  $\sigma(t, x) = \sigma_0(x)$ . Для исследования поведения решений уравнения (1.9) ставился численный эксперимент: при достаточно произвольных начальных условиях методом «дробных шагов» решалась задача Коши. Был установлен выход решения на стационарный режим (на решения уравнения (2.1)). График для

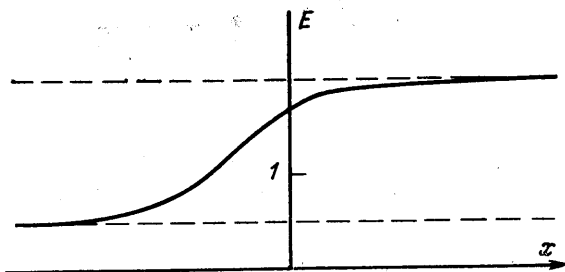
значений параметров  $m=0.5$ ,  $\mu=0.1$ ,  $V=1$ ,  $\delta_1=\delta_2=0.01$ ,  $\sigma_+=0.25$ ,  $\sigma_-=0.35$  изображен на фиг. 3 (кривая 1 соответствует  $t=0$ , кривая 2 -  $t=1$ , кривая 3 -  $t=10$ , кривая 4 - решению задачи (2.1)). Зависимости  $f_1$ ,  $f_2$ ,  $J$  согласно [2] аппроксимировались функциями

$$f_1(\sigma) = \left( \frac{\sigma-0.2}{0.8} \right)^3, \quad f_2(\sigma) = \left( \frac{0.8-\sigma}{0.6} \right)^3, \quad J(\sigma) = \sigma^{-1/2} - 1$$

Из фиг. 3 видно, что выход на стационарный режим происходит за довольно короткое время ( $t \sim 10$ ). Поскольку  $t$  - «быстрое» время, полученное из внешнего «медленного» времени  $\theta$  заменой  $t = \theta/\delta$ , где  $\delta$  - малая величина, то для  $\theta$  этот про-



Фиг. 3



Фиг. 4

межутки времени пренебрежимо мал. Следовательно, в физических экспериментах наблюдается не процесс установления стабилизированной зоны, а уже сама стабилизированная зона, поведение которой анализировалось в п. 2.

**4. Устойчивость стационарного решения.** Исследуем случай  $\delta_2=0$ . Рассматривая малые возмущения стационарного решения

$$(4.1) \quad \sigma(\tau, y) = \sigma_0(y) + E(y)v(\tau, y), \quad E(y) = k_1/F'(\sigma_0(y))$$

получим для  $v$  линеаризованное уравнение и граничную задачу

$$(4.2) \quad E\partial_t v + \partial_x[(1-E)v + \partial_t v - \partial_x v] = 0$$

$$v(t, \pm\infty) = 0, \quad t = \tau/\delta_1, \quad x = y/(\delta_1 c)$$

График функции  $E$  изображен на фиг. 4. Сделаем преобразование Лапласа по  $t$

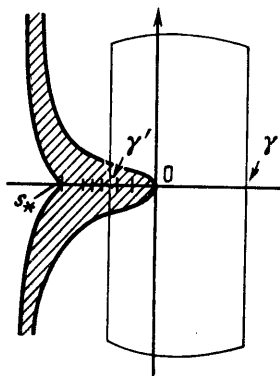
$$(4.3) \quad u(s, x) = \int_0^{\infty} e^{-st} v(t, x) dt, \quad \text{Re } s > \gamma_1$$

получим

$$(4.4) \quad u'' + (E-1-s)u' + (E'-sE)u = f(x), \quad u(s, \pm\infty) = 0 \\ f = -v'(0, x) - E(x)v(0, x)$$

Исследование асимптотик на  $\pm\infty$  показывает, что в комплексной плоскости  $s$  имеется область, что однородная задача, соответствующая задаче (4.4), разрешима тогда и только тогда, когда  $s$  принадлежит этой области. Она изображена на фиг. 5 и лежит в левой полуплоскости.

Будем рассматривать  $s$ , лежащие правее  $s_* = \max\{-[1-\sqrt{E(-\infty)}]^2; -[1-\sqrt{E(+\infty)}]^2\}$ . Сделаем замену переменных



Фиг. 5

$$u = w \exp \left\{ -\frac{1}{2} \int_0^x (E-1-s) d\xi \right\}$$

При этом задача (4.4) перейдет в

$$(4.5) \quad w'' + I(s, x)w = \varphi(s, x), \quad w(s, \pm\infty) = 0$$

$$I = -\frac{s^2}{4} - \frac{1+E}{2}s - \frac{(E-1)^2}{4} + \frac{E'}{2},$$

$$\varphi = f(x) \exp \left\{ \frac{1}{2} \int_0^x (E-1-s) d\xi \right\}$$

При  $\operatorname{Re} s > s_*$  задачи (4.4) и (4.5) равносильны. Рассмотрим однородное уравнение  $w'' + I(s, x)w = 0$  и определим его спектр, лежащий правее  $s_*$ . Домножим на  $\bar{w}$  и, интегрируя по частям, получаем, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} \{ \overline{I(s, x)} - I(s, x) \} |w|^2 dx = 0$$

Следовательно, либо  $\operatorname{Im} s = 0$ , либо существует  $x_0$ , где  $\overline{I} - I = \operatorname{Im} s \{ \operatorname{Re} s + 1 + E(x_0) \} = 0$ . Прямая  $\operatorname{Re} s = -[1 + E(x_0)]$  лежит левее  $s_*$ , поэтому в рассматриваемой области могут быть только вещественные точки спектра. Так как в этой области  $\partial I / \partial s < 0$  и при  $s=0$  уравнение интегрируется в явном виде

$$w = \exp \left\{ \frac{1}{2} \int_0^x (1-E) d\xi \right\}$$

— функция, не обращающаяся в нуль, то при  $s > 0$  собственных значений нет и  $s=0$  является первым собственным значением. Так как при  $s = s_*$   $I(s, \pm\infty)$  на одном из концов оси  $x$  становится равной нулю, то на сегменте  $[s_*, 0]$  находится счетное число точек спектра, имеющих точкой сгущения  $s_*$ . Решение задачи (4.9) выписывается в явном виде через функцию Грина

$$(4.6) \quad w(s, x) = \int_{-\infty}^{\infty} G(x, y; s) \varphi(s, y) dy$$

$$G(x, y; s) = \begin{cases} \frac{w_1(s, x)w_2(s, y)}{W(s)}, & x < y \\ \frac{w_1(s, y)w_2(s, x)}{W(s)}, & x \geq y \end{cases}$$

где  $w_1, w_2$  — решения однородного уравнения  $w'' + I(s, x)w = 0$  с граничными условиями  $w_1(s, -\infty) = 0, w_1 \neq 0; w_2(s, +\infty) = 0, w_2 \neq 0$  (при  $\text{Re } s > s_*$  такие решения всегда существуют);  $W(s)$  — определитель Вронского для  $w_1, w_2$  (он обращается в нуль тогда и только тогда, когда  $s$  является собственным значением).

Тогда, возвращаясь от  $w$  к  $u$  и делая обратное преобразование Лапласа, получаем, что решение задачи (4.2) выражается через  $G$  как

$$(4.7) \quad v(t, x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \exp\left\{st - \frac{1}{2} \int_0^x (E-1-s) d\xi\right\} \int_{-\infty}^{\infty} Gf \times \\ \times \exp\left\{\frac{1}{2} \int_0^y (E-1-s) d\xi\right\} dy ds + \int_D \exp\{st\} \Phi_1 u_0 d\chi d\xi$$

где  $\gamma$  — достаточно большая положительная константа,  $D$  — область, изображенная на фиг. 5,  $s = \chi + i\xi$ ,  $\Phi_1(s)$  — некоторая функция,  $u_0(s, x)$  — решение задачи (4.4) при  $f \equiv 0$  (общее решение неоднородной задачи представляется в виде суммы частного решения и общего решения однородной задачи). Для удобства будем считать, что начальные данные  $v(0, x)$  финитны, следовательно,  $f(y)$  финитна. Меняя порядок интегрирования, получаем

$$(4.8) \quad v(t, x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} f \exp\left\{\frac{1}{2} \int_x^y (E-1-s) d\xi\right\} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} G \times \\ \times \exp\left\{st + s \frac{x-y}{2}\right\} ds dy + \int_D \exp\{st\} \Phi_1 u_0 d\chi d\xi$$

Рассмотрим аналитические свойства функции  $G(x, y; s)$ ;  $w_1, w_2$  аналитичны по  $s$ , так как коэффициенты уравнения аналитичны по  $s$ . Следовательно, и  $W(s)$  аналитичен, причем  $W(s)$  обращается в нуль только в точках спектра. Поэтому  $G(x, y; s)$  аналитична в области  $\text{Re } s > s_*$  и имеет полюсы первого порядка в точках спектра (лежащих на отрицательной вещественной оси). При больших  $|s|$  решения  $w_1, w_2$  приближаются к решениям уравнения  $4w'' - s^2w = 0$ , следовательно,  $G(x, y; s) \sim \exp\{\pm s(x-y)/2\}/s$ . Рассмотрим следующий контур интегрирования (фиг. 5). На дугах  $\text{Re } s$  ограничено, поэтому ограничены  $|\exp\{\pm s(x-y)/2\}|$  и  $|G(x, y; s)| \sim 1/|s|$ . По лемме Жордано интеграл по этим дугам стремится к нулю. Получаем, что

$$(4.9) \quad \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} G \exp\{st + s(x-y)/2\} ds = \int_{\gamma'-i\infty}^{\gamma'+i\infty} G \exp\{st + s(x-y)/2\} ds + 2\pi i \Sigma \text{ вычетов}$$

Интеграл от  $\gamma'-i\infty$  до  $\gamma'+i\infty$  экспоненциально убывает по  $t$ , так как  $\text{Re } s < 0$ , а вычеты в полюсах функции  $G$  соответствуют элементарным волновым решениям (собственным функциям, соответствующим точкам спектра, попавшим в контур

интегрирования). Таким образом, решение задачи (4.2) представляется в виде

$$(4.10) \quad v(t, x) = \Phi(t, x) + \sum_{i=1}^n c_i \exp\{s_i t\} v_i(x) + \int_D \exp\{st\} \Phi_i u_0 d\chi d\xi$$

$$|\Phi| \leq D \exp\{\beta t\}, \quad \beta < \min_{i=1, \dots, n} \{s_i\}, \quad s_1 = 0, \quad s_i < 0, \quad i = 2, \dots, n$$

$c_i$  определяются из начальных условий. Наличие неубывающего со временем решения  $v_1(x) = \exp\{(1-E)x\}$  связано с тем [6], что исходная задача (3.1) и стационарное уравнение (2.1) были инвариантны относительно сдвигов по  $x$ . Это приводит к тому, что устойчивость надо понимать в некотором инвариантном смысле с точностью до сдвига. Или, чтобы исключить этот сдвиг, наряду с условиями  $v(t, \pm\infty) = 0$  надо поставить условие

$$\int_{-\infty}^{\infty} v(0, x) dx = 0$$

это приведет к тому, что в разложении (4.10) коэффициент  $c_1$  будет равен нулю.

Итак, решение задачи (4.2) стремится к нулю при  $t \rightarrow \infty$ . Тем самым доказана устойчивость «в малом» стационарного решения уравнения (3.1) при  $\delta_2 = 0$ , а численный эксперимент показывает, что эта устойчивость будет не только «в малом», но и «в большом», а также при  $\delta_2 \neq 0$ ; т. е. что при  $t \rightarrow \infty$  решения уравнения (3.1) выходят на решения уравнения (2.1).

В заключение автор признателен Г. И. Баренблатту за постоянное внимание к этой работе.

Поступила 29 III 1977

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Баренблатт Г. И. Фильтрация двух несмешивающихся жидкостей в однородной пористой среде. Изв. АН СССР, МЖГ, 1971, № 5.
2. Баренблатт Г. И., Ентов В. М., Рыжик В. М. Теория нестационарной фильтрации жидкости и газа. М., «Недра», 1972.
3. Leverett M. C. Capillary behavior in porous solids. Trans. AIME, 1941, vol. 142.
4. Muskat M. Physical principles of oil production. New York, McGraw-Hill, 1949. (Рус. перев.: Физические основы технологии добычи нефти. М., Гостоптехиздат, 1953.)
5. Гельфанд И. М. Некоторые задачи теории квазилинейных уравнений. Усп. матем. н., 1959, т. 14, № 2.
6. Баренблатт Г. И., Зельдович Я. Б. Об устойчивости распространения пламени. ПММ, 1957, т. 21, вып. 6.