

РАСЧЕТ ДВУМЕРНОГО ОБТЕКАНИЯ РЕШЕТКИ ВЯЗКОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТЬЮ С ОТРЫВОМ НА ВХОДНОЙ КРОМКЕ

Г. Л. ПОДВИДЗ, Г. Ю. СТЕПАНОВ

(Москва)

В течениях вязкой жидкости при больших числах Re с отрывом от обтекаемого профиля образуется сложное течение, состоящее из внешнего невязкого потока, застойной отрывной области и пограничного слоя, сильно взаимодействующих между собой. Для невязкой жидкости известны различные струйные и вихревые модели отрывного течения; для вязкой жидкости используются численные, асимптотические и интегральные методы [1-3].

В статье рассматривается плоское стационарное турбулентное течение через решетки турбомашин жидкости постоянной плотности без отрыва и с отрывом от входной кромки профиля и последующим присоединением потока к профилю (короткая тонкая отрывная область).

1. В рассматриваемой модели обтекания решетки (с положительным углом атаки набегающего потока $i > 0$) выделяется внешнее невязкое течение с границей на теле вытеснения и вязкий слой. Поток отрывается в точке S , близкой к передней критической точке K , и присоединяется в точке R на выпуклой стороне профиля (фиг. 1). Условия отрыва пограничного слоя не рассматриваются, за точку отрыва S принимается передняя критическая точка K при нулевом угле атаки $i = 0$, что достаточно точно выполняется на входной кромке большой кривизны.

Вязкий слой на профиле разбивается на области I-V. Изобарическая область I вязкого слоя SAC , ограниченная снаружи струйным турбулентным слоем смещения SEC .

Область II $ARBFC$ присоединения потока с однопараметрическим профилем скорости, учитывающим возвратное течение на участке AR . Граница тела вытеснения в изобарической области I замыкается на толщине вытеснения в области II присоединения потока. Трение на дуге SAB считается пренебрежимо малым. Через сечение AE жидкость из области II возвращается в застойную область SAE , далее через внутреннюю границу SE изобарической области I поступает в струйную область SEC и через сечение ED снова попадает в область II, образуя рециркуляционное движение в отрывной области $SDRAS$.

Область III BM на выпуклой стороне профиля и область V KN на вогнутой стороне с обычными пограничными слоями, слабо взаимодействующими с внешним невязким потоком.

Область IV выравнивания закромочных следов за решеткой.

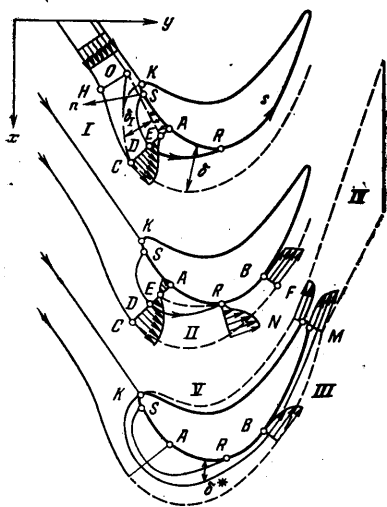
Области I, II, III, V считаются достаточно тонкими, чтобы можно было считать давление постоянным поперек вязкого слоя.

2. Исходное внешнее безотрывное течение через решетку рассматривается как плоское стационарное течение невязкой несжимаемой жидкости в координатах x, y (фиг. 2).

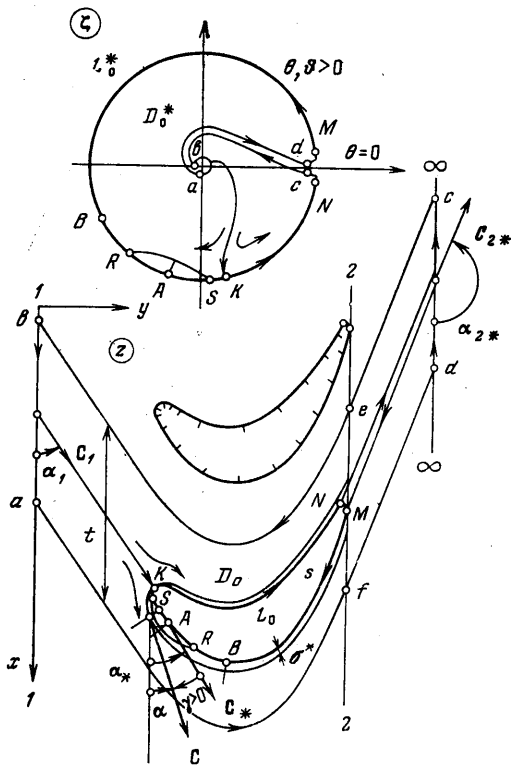
Задача ставится в полосе $abcd$ одного шага решетки t . В прямой задаче безотрывного обтекания имеются обычные граничные условия: контур профиля MKN является граничной линией тока; во входном сечении ab

заданы параметры набегающего потока c_1, α_1, ρ_1^* ; на граничных линиях ad, bc течение периодическое; в точках M, N на выходной кромке скорости течения равны ($|c_M| = |c_N|$).

Для интегрального представления сопряженной комплексной скорости $\bar{c}(z) = c_x - ic_y, z = x + iy$, непрерывной в одновязной области D_0 течения в решетке с границей L_0 на контуре профиля используется формула Коши. На контуре профиля получается линейное интегральное уравнение типа Фредгольма первого рода, совпадающее с уравнением работы [4] для абсолютного течения жидкости по-



Фиг. 1



Фиг. 2

стоянной плотности в слое постоянной толщины. Ядро уравнения в точке $s = \sigma$ имеет логарифмическую особенность. После устранения особенности ядра интегральное уравнение относительно скорости безотрывного течения на контуре профиля $c_*(s)$ имеет вид

$$(2.1) \quad c_*(s) \oint_{L_0} K(s, \sigma) d\sigma + \oint_{L_0} [c_*(\sigma) - c_*(s)] K(s, \sigma) d\sigma + C = \\ = y(s) c_{1x} - x(s) c_{1y} \\ K(s, \sigma) = \frac{1}{4\pi} \ln \frac{1}{2} \left[\operatorname{ch} \frac{2\pi}{t} (y - \eta) - \cos \frac{2\pi}{t} (x - \xi) \right] + \frac{y(s)}{t}$$

Здесь $x(s), y(s)$ — координаты профиля L_0 , s — длина дуги вдоль контура профиля, $\sigma(\xi, \eta)$ — переменная интегрирования. В левой части уравнения (2.1) первый интеграл вычисляется по контуру L_0 , за исключением малой окрестности точки $s = \sigma$, второй интеграл особенности не имеет.

Проекция скорости безотрывного течения невязкой жидкости на бесконечности за решеткой равняются

$$c_{2x*} = c_{1x} - \frac{1}{t} \int_{L_0} c_*(\sigma) d\sigma, \quad c_{2y*} = c_{1y}$$

Для дальнейших расчетов область D_0 безотрывного течения около профиля L_0 в полосе одного периода t плоскости z отображается на область D_0^* течения внутри единичного круга $\zeta = e^{i\theta}$ на плоскости ζ (фиг. 2).

Течение внутри круга образуется вихреисточником с интенсивностью $\Gamma_1 + iQ$, расположенным в точке $\zeta = 0$, и стоком с интенсивностью $-2Q$ в точке $\zeta = 1$. Комплексный потенциал этого течения

$$\Phi(\zeta) = \frac{\Gamma_1 + iQ}{2\pi i} \ln \zeta - \frac{Q}{\pi} \ln(\zeta - 1)$$

$$\Gamma_1 = -c_{1x}t = -c_1t \cos \alpha_1, \quad Q = c_{1y}t = c_1t \sin \alpha_1$$

Единственность отображения D_0 на D_0^* обеспечена заданным переходом бесконечно удаленной точки перед решеткой $z = -\infty$ в центр круга $\zeta = 0$ и бесконечно удаленной точки за решеткой $z = +\infty$ в точку $\zeta = 1$. Равенство приращений потенциала скорости на профиле от передней критической точки K и на окружности $\zeta = e^{i\theta}$ от критической точки $\theta_K = 2\pi - 2\alpha_1$

$$(2.2) \quad \varphi(s) - \varphi(s_K) = \int_{s_K}^s c_\sigma(\sigma) d\sigma$$

$$(2.3) \quad \varphi(\theta) - \varphi(\theta_K) = \frac{c_1t \sin \alpha_1}{\pi} \left(-\frac{\theta - \theta_K}{2} \operatorname{ctg} \alpha_1 - \ln \frac{\sin^{1/2} \theta}{\sin^{1/2} \theta_K} \right)$$

определяет отображение $\theta = \theta(s)$ профиля на окружность.

3. Отрыв потока от профиля характеризуется углом γ наклона граничной линии внешнего невязкого отрывного течения к стороне профиля (фиг. 2). При малых углах γ

$$(3.1) \quad \frac{c_{ne}}{c_{se}} \approx \frac{c_{ne}}{c_e} \approx \gamma$$

В области SAC со слабым возвратным движением рассматривается изобарическое течение с постоянной скоростью внешнего невязкого отрывного течения на внешней границе OC струйного слоя

$$(3.2) \quad p(s) = p_s = \text{const}, \quad c_e(s) = c_s = \text{const}$$

В области $SECO$ используется модель струйного турбулентного пограничного слоя, развивающегося от точки O . Пренебрегается кривизной струйного слоя и количеством движения на границе AE . По границе SE жидкость с постоянной скоростью c_n из застойной области SAE подсасывается в струйную область $SECO$, что эквивалентно равномерно распределенному вдуву в пограничный слой $SECO$ на участке SE . Линия тока SD разделяет область $HOSDC$ внешнего течения от области $SDRA$ циркуляционного движения.

Изменение толщины $\delta_I = n_c - n_E$ плоской изобарической струи определяется эмпирическим коэффициентом, константой турбулентности [5, 6]

$$(3.3) \quad \frac{d\delta_I}{ds} = b = \text{const}$$

Граничное условие в точке S определяется коротким участком KS турбулентного пограничного слоя (область V) при $s = s_B$:

$$\delta_I(s_S) = \delta_{vS}, \quad \delta_I^*(s_S) = \delta_{vS}^*$$

Отсюда следует изменение толщины струйного слоя вдоль контура

$$(3.4) \quad \delta_I(s) = b(s - s_S + s_0)$$

где $s_0 = \delta_{1S}/b$ — длина эквивалентной струи, развивающейся от точки O , соответствующая начальной толщине слоя смешения в точке отрыва S .

В струйном слое области I и слое присоединения области II принимается однопараметрический профиль скорости с параметром m и с функцией $f(\eta)$ аналогично струйным течениям в затопленной струе

$$(3.5) \quad \frac{c}{c_e} = 1 - mf(\eta), \quad m = \frac{c_e - c_m}{c_e}, \quad f = \frac{c_e - c}{c_e - c_m}$$

$$\text{в области I: } \eta_I = \frac{n - n_E}{n_c - n_E}, \quad m = 1, \quad c_m = 0$$

$$\text{в области II: } \eta_{II} = \frac{n}{\delta}, \quad m > 0, \quad c_m \geq 0$$

$$(3.6) \quad f(\eta) = 1 - 3\eta^2 + 2\eta^3$$

Относительные толщины слоя

$$H^*(m) = \frac{\delta^*}{\delta} = \int_0^1 \left(1 - \frac{c}{c_e}\right) d\eta = \frac{m}{2}$$

$$(3.7) \quad H^{**}(m) = \frac{\delta^{**}}{\delta} = \int_0^1 \frac{c}{c_e} \left(1 - \frac{c}{c_e}\right) d\eta = \frac{m}{2} \left(1 - \frac{26}{35}m\right)$$

$$H(m) = \frac{\delta^*}{\delta^{**}} = \left(1 - \frac{26}{35}m\right)^{-1}$$

В струйном слое принимается однопараметрический профиль скорости (3.5), (3.6) с параметром $m_I = 1$ и относительные толщины равняются

$$(3.8) \quad H_I^* = 1/2, \quad H_I^{**} = 9/70, \quad H_I = 70/18$$

Присоединенный расход жидкости на участке SE равен расходу жидкости, вытекающей на участке ED . Из уравнений неразрывности для контура $HODC$ и сохранения количества движения для контура $HOSAC$ с учетом (3.7) получается

$$(3.9) \quad \rho c_n (s_A - s_S) = \rho c_e \delta H_I^{**}$$

Изменение толщины потери импульса в струйном пограничном слое $SECO$ вдоль контура s получаем из (3.4), (3.7) в виде

$$(3.10) \quad \delta_I^{**}(s) = b(s - s_S + s_0) H_I^{**}$$

Линейное увеличение $\delta_I^{**}(s)$ соответствует росту δ^{**} в обычном пограничном слое на пластине со вдувом.

В области I тело вытеснения n_I образовано толщиной струйного слоя δ_I^* и толщиной застойной области n_E , $n_I = \delta_I^* + n_E$. Уравнение сильного взаимодействия связывает наклон границы тела вытеснения с наклоном граничной линии тока внешнего невязкого отрывного течения и с учетом (3.1) с граничным условием в точке S имеет вид

$$(3.11) \quad \frac{dn_I}{ds} = \gamma(s), \quad s = s_S, \quad n_I(s_S) = \delta_{vS}^*$$

4. В области $ARBFC$ присоединения потока используется модель турбулентного пограничного слоя присоединения. На контуре профиля ис-

пользуется уравнение движения [6] при $n=0$

$$(4.1) \quad c=c_m, \quad c_n=0, \quad \tau_w=0, \quad \rho c_m \frac{dc_m}{ds} = -\frac{dp}{ds} + \frac{\partial \tau}{\partial n} \Big|_w$$

На внешней границе слой срывается невязким безвихревым течением при $n=\delta$

$$(4.2) \quad c=c_e, \quad \tau_e=0, \quad \rho c_e \frac{dc_e}{ds} = -\frac{dp}{ds}$$

Принимается однопараметрический профиль скорости в слое с параметром m (3.7), (3.8), относительные толщины слоя (3.9).

Интегральное уравнение импульсов в обычном пограничном слое имеет вид

$$(4.3) \quad \frac{d\delta^{**}}{ds} + (2+H) \frac{d \ln c_e}{ds} \delta^{**} = \frac{\tau_w}{\rho c_e^2}$$

В слое присоединения области II $\tau_w=0$ и уравнение (4.3) имеет вид уравнения следа за телом

$$(4.4) \quad \frac{d \ln \delta^{**}}{ds} + (2+H) \frac{d \ln c_e}{ds} = 0$$

Кроме того, используется простейшая формула касательного напряжения в турбулентных струях

$$\tau = \rho \nu_t \frac{\partial c}{\partial n} \quad \nu_t = \kappa (c_e - c_m) \delta$$

и диссипативный член в правой части уравнения (4.1) равен

$$(4.5) \quad \frac{\partial \tau}{\partial n} \Big|_w = \frac{\rho m^2 c_e^2}{\delta} (-\kappa a), \quad a = \frac{d^2 f}{d\eta^2} \Big|_w$$

Величину $(-\kappa a) > 0$ можно считать эмпирической константой турбулентности в слое присоединения.

В области II тело вытеснения образовано толщиной вытеснения слоя $n_{II} = \delta_{II}^*$, уравнение сильного взаимодействия аналогично (3.11) и имеет вид

$$(4.6) \quad \frac{d\delta_{II}^*}{ds} = \gamma(s)$$

с граничным условием в точке A; при $s=s_A$ $\delta_{II}^*(s_A) = \delta_A^*$.

Система уравнений (4.1), (4.4) турбулентного слоя присоединения с учетом (4.2), (3.5), (3.7) примет вид

$$(4.7) \quad \begin{aligned} \frac{d \ln H}{dm} \frac{dm}{ds} - (2+H) \frac{d \ln c_e}{ds} &= \frac{\gamma}{\delta^*} \\ (1-m) \frac{dm}{ds} + m(2-m) \frac{d \ln c_e}{ds} &= -\frac{m^2}{\delta} (-\kappa a) \end{aligned}$$

Определитель системы (4.7) является функцией m

$$\Delta(m) = \frac{d \ln H}{dm} m(2-m) + (2+H)(1-m)$$

В диапазоне реальных значений $0 < m <^{35/26}$ параметры $H_{II}^{**}(m) > 0$, $H_{II}(m) > 0$, $\Delta(m) > 0$ и система уравнений (4.7) особых точек не имеет.

Расход возвратного течения из области II через сечение AE в застойную зону SAE равняется

$$(4.8) \quad \rho \delta c_e G(m, \eta_E) = - \int_0^{\eta_E} \rho c(n) dn = \rho \delta c_e \eta_E m \left[\frac{m-1}{m} - \eta_E^2 \left(1 - \frac{\eta_E}{2} \right) \right] > 0$$

Координата η_E линии ER в сечении s_A , на которой скорость в слое обращается в нуль ($c(\eta_E) = 0$), определяется по (3.5), (3.6) из уравнения

$$(4.9) \quad 1 - 3\eta_E^2 + 2\eta_E^3 = m_A^{-1}$$

5. В области III BM и области V KN рассматривается слабое взаимодействие обычного турбулентного пограничного слоя и внешнего невязкого течения. На внешней границе слоя $c_e = c_e(s)$ определяется отрывным обтеканием профиля, недеформированного на участках BM и KN , наклон тела вытеснения не учитывается ($\gamma_{III}(s) = 0$).

Принимается степенной профиль скорости в слое и относительные толщины

$$(5.1) \quad \frac{c}{c_e} = \eta^{1/p}, \quad \eta = \frac{n}{\delta}$$

$$\frac{\delta^*}{\delta} = \frac{1}{1+p}, \quad \frac{\delta^{**}}{\delta} = \frac{p}{(1+p)(2+p)}, \quad H = \frac{\delta^*}{\delta^{**}} = \frac{2+p}{p}$$

Интегральное уравнение импульсов в слое имеет вид (4.3), где используется простейший степенной закон трения на стенке

$$(5.2) \quad \frac{\tau_w}{\rho c_e^2} = A Re^{** - 1/m}, \quad Re^{**} = \frac{c_e \delta^{**}}{\nu}, \quad m = \frac{p+1}{2}, \quad H = \text{const}$$

Уравнение (4.3) с законом трения (5.2) в области III с граничным условием в точке B при $s = s_B$ $c_e(s_B) = c_{eB}$, $\delta_{II}^{**}(s_B) = \delta_B^{**}$ имеет решение

$$\frac{\delta^{**}(s)}{l} = \left[\frac{c_e(s)}{c_{eB}} \right]^{-(H+2)} \left[\left(\frac{\delta_B^{**}}{l} \right)^{1/m_1} \left(\frac{c_{eB}}{c_{e*}} \right)^{(H+2)/m_1} + \right.$$

$$\left. + A \frac{1}{m_1} Re_i^{-1/m} \int_{s_B/l}^{s/l} \left(\frac{c_e(s)}{c_{e*}} \right)^{(H+2)/m_1 - 1/m} d\left(\frac{s}{l} \right) \right]^{m_1}$$

Здесь $m_1 = m/(m+1)$, $Re_i = c_{e*} l / \nu$, l — хорда профиля.

В области V с граничным условием в точке K при $s = s_K$ $c_e(s_K) = 0$, $\delta^{**}(s_K) = 0$ уравнение (4.3) имеет аналогичное решение.

6. В качестве внешнего отрывного невязкого течения рассматривается обтекание тела вытеснения с углом γ между скоростью безотрывного обтекания на контуре профиля и скоростью отрывного обтекания на теле вытеснения ($\gamma(s) > 0$ при отходе потока от профиля, фиг. 1).

В областях сильного взаимодействия: в изобарической области I скорость течения постоянна $c_e(s) = c_s$, угол γ неизвестен; в области II присоединения $c_e(s)$ изменяется, γ определяется уравнением сильного взаимодействия (4.8). В областях III, V слабого взаимодействия $\gamma = 0$.

В предположении о малости толщины δ^* и угла γ скорость $c(s)$ отрывного течения на границе тела вытеснения и угол $\gamma(s)$ вычисляются на контуре профиля. После отображения контура профиля на окружность скорость отрывного течения $c(\xi)$ внутри единичного круга $\xi \leq 1$ (фиг. 2) находится из решения смешанной задачи для аналитической функции

$$(6.1) \quad f(\xi) = \ln |c(\xi)/c_e(\xi)| + i\gamma(\xi)$$

На единичной окружности $\zeta = e^{i\theta}$ функция $f(\theta)$ задается мнимой частью на интервалах (θ_M, θ_A) , (θ_S, θ_N) и действительной частью на интервале (θ_A, θ_S) в виде

$$(6.2) \quad f(\theta) = \begin{cases} i\gamma(\theta), & \theta_M < \theta < \theta_A \\ \ln|c_S/c_*(\theta)|, & \theta_A < \theta < \theta_S \\ i\gamma(\theta) = 0, & \theta_S < \theta < \theta_N \end{cases}$$

Дополнительно предполагается, что на интервале (θ_M, θ_A) функция $\gamma(\theta)$ ограничена $|\gamma(\theta)| \leq c|\theta|^{-\mu}$, $\mu > 0$, а функция $f(\theta)$ имеет предел 0 при $\theta \rightarrow 0$ и $\theta \rightarrow 2\pi$.

Решение задачи для функции $f(\theta)$ на окружности $e^{i\theta} = 1$ дается формулой Келдыша — Седова [7]

$$(6.3) \quad f(\theta) = \frac{1}{i\pi g(\theta)} \int_0^{2\pi} f(\vartheta) g(\vartheta) K(\theta, \vartheta) d\vartheta$$

$$K(\theta, \vartheta) = \frac{\sin(\theta/2)}{2 \sin((\vartheta - \theta)/2) \sin(\vartheta/2)},$$

$$g(\theta) = \sqrt{\frac{\sin^{1/2}\theta_A}{\sin^{1/2}\theta_S}} \sqrt{\frac{\sin^{1/2}(\theta_S - \theta)}{\sin^{1/2}(\theta_A - \theta)}}$$

Формула (6.3) дает единственное решение смешанной задачи, удовлетворяющее следующим условиям: $f(\theta)$ ограничена вблизи точки $\theta = \theta_A$, интеграл $\int f(\vartheta) d\vartheta$ ограничен вблизи точки $\theta = \theta_S$. На единичной окружности для функции $f(\theta)$ в выражениях (6.1), (6.3) приравниваются действительные части на интервалах (θ_M, θ_A) , (θ_S, θ_N) и мнимые части на интервале (θ_A, θ_S) . В области I на интервале (θ_A, θ_S) определяется угол наклона

$$(6.4) \quad \gamma_I(\theta) = -\frac{1}{\pi G(\theta)} [I_1(\theta) + I_2(\theta)]$$

в областях II, III, V на интервалах (θ_B, θ_A) , (θ_M, θ_B) , (θ_S, θ_N) определяется скорость отрывного невязкого обтекания

$$(6.5) \quad c(\theta) = c_*(\theta) \exp \left\{ \frac{1}{\pi G(\theta)} [I_1(\theta) + I_2(\theta)] \right\}$$

В формулах (6.4), (6.5) приняты обозначения

$$I_1(\theta) = \int_{\theta_B}^{\theta_A} \gamma_{II}(\vartheta) G(\vartheta) K(\theta, \vartheta) d\vartheta,$$

$$I_2(\theta) = \int_{\theta_A}^{\theta_S} \ln|c_S/c_{*I}(\vartheta)| G(\vartheta) K(\theta, \vartheta) d\vartheta$$

$$G(\theta) = \sqrt{\frac{\sin^{1/2}|\theta_S - \theta|}{\sin^{1/2}|\theta_A - \theta|}}$$

В точке $\theta = \theta_S$ функция $\gamma_I(\theta)$ имеет локальную особенность, которая устраняется в смысле главного значения, а величина $\gamma(\theta_S)$ доопределяется по непрерывности на интервале (θ_A, θ_S) . В интегралах $I_1(\theta)$, $I_2(\theta)$ учитывается наличие интегрируемой особенности функции $G(\vartheta)$ в точке $\vartheta =$

$=\theta_A$, особенность ядра $K(\theta, \theta)$ в точке $\theta=\theta$ устраняется в смысле главного значения.

Проекция скорости внешнего отрывного течения невязкой жидкости в сечении 22 равняются

$$(6.6) \quad c_{2x} = c_{1x} - \frac{1}{t} \int_{L_0} c(\sigma) d\sigma, \quad c_{2y} = \frac{1}{\mu} c_{1y}$$

$$\mu = 1 - \frac{\delta_M^* + \delta_N^*}{t \sin \alpha_2}$$

Здесь μ — коэффициент расхода в решетке.

7. В заранее неизвестном сечении s_A склейки слоя областей I и II выполняются условия непрерывности толщины вытеснения и потери импульса

$$(7.1) \quad \delta_I^*(s_A) = \delta_{II}^*(s_A), \quad \delta_I^{**}(s_A) = \delta_{II}^{**}(s_A)$$

и сохранения массы внутри области SDR : расход жидкости, вытекающей из области I на участке ED (3.10), равен расходу возвратного течения из области II на участке AE (4.8)

$$(7.2) \quad \rho c_e \delta H_I^{**} = \rho c_e G(m_A, \eta_E)$$

Условия склейки (7.1) незначительно отличаются от принятых в работе [3].

Длина области II присоединения потока задается числом n_1 расчетных точек интервала (s_A, s_B) . В сечении s_B склейки слоя областей II и III выполняется условие непрерывности толщины потери импульса $\delta_{II}^{**}(s_B) = \delta_{III}^{**}(s_B)$.

В области I угол $\gamma(s)$ определяется формулой (6.4) и интегрированием (3.11) находится граница тела вытеснения

$$n_1(s) = \delta_A^* - \int_{s_A}^s \gamma_I(\sigma) d\sigma$$

В сечении s_S склейки слоя областей I и V выполняется условие непрерывности толщины вытеснения (замыкание отрывного «пузыря»)

$$(7.3) \quad \delta_V^*(s_S) = n_1(s_S)$$

Замыкающими условиями для задачи в целом служат проекции уравнения изменения количества движения для контура $abef$ на оси x , y (фиг. 2)

$$(7.4) \quad \rho c_{1y} t \left(c_{1x} - \frac{\varphi}{\mu} c_{2x} \right) + R_x = 0,$$

$$\rho t \frac{c_2^2 - c_1^2}{2} + \rho c_{1y}^2 t \left(1 - \frac{\varphi}{\mu^2} \right) + R_y = 0$$

$$\varphi = 1 - \frac{(\delta^* + \delta^{**})_M + (\delta^* + \delta^{**})_N}{t \sin \alpha_2}$$

где R_x , R_y — проекции силы воздействия лопатки на поток, коэффициент расхода μ определяется по (6.6), φ — коэффициент скорости.

Итак, общая система уравнений задачи отрывного обтекания решетки включает в себя: неизвестные функции в области II ($m_{II}(s)$, $\gamma_{II}(s)$, $c_{eII}(s)$, $\delta_{II}^*(s)$) и дифференциальные уравнения слоя (4.7), взаимодействия (4.6),

интегральную формулу Келдыша — Седова (6.5); число неизвестных функций и число замыкающих уравнений совпадают.

Число неизвестных параметров $|s_A - s_S|$, c_S , δ_A^* , m_A , γ_A , η_E совпадает с числом условий склейки (7.1) — (7.4).

Контур профиля разбивается на участки со сгущением на входной и выходной кромках. Интегральное уравнение (2.1) для скорости безотрывного обтекания решетки с использованием трехточечной формулы Симпсона сводится к системе линейных неоднородных алгебраических уравнений в расчетных точках профиля, которая решается матричным методом. При начальном угле натекания α_{i0} (угол атаки $i=0$) определяется передняя критическая точка K , которая принимается за точку отрыва S .

Контур профиля отображается на окружность по формулам (2.2), (2.3) со сгущением точек у выходной кромки.

В интегриродифференциальной системе уравнений отрывного обтекания дифференциальные уравнения (4.6), (4.7) аппроксимируются центральными разностями, интегралы $I_1(\theta)$, $I_2(\theta)$ в формулах (6.4), (6.5) вычисляются по формуле трапеций, за исключением малой окрестности точек $\theta = \theta$, $\theta = \theta_A$, $\theta = \theta_S$.

Функции $m_{II}(s)$, $\gamma_{II}(s)$ на интервале (s_A, s_B) аппроксимируются в виде

$$m_{II}(s) = m_A + a_1(s - s_A)/l + a_2((s - s_A)/l)^2,$$

$$\gamma_{II}(s) = \gamma_A + b_1(s - s_A)/l + b_2((s - s_A)/l)^2.$$

Аппроксимация $m_{II}(s)$, $\gamma_{II}(s)$ может быть проведена многочленами более высокой степени или другими функциями.

В более простых задачах в качестве неизвестных можно выбирать значения функций m_{IIj} , γ_{IIj} в фиксированных точках s_j области II присоединения потока, однако это увеличивает число независимых переменных и затрудняет получение гладкого решения.

Для задачи отрывного обтекания составляется вектор независимых переменных

$$X = (|s_A - s_S|, c_S, \delta_A^*, m_A, \gamma_A, \eta_E, a_1, b_1, a_2, b_2)$$

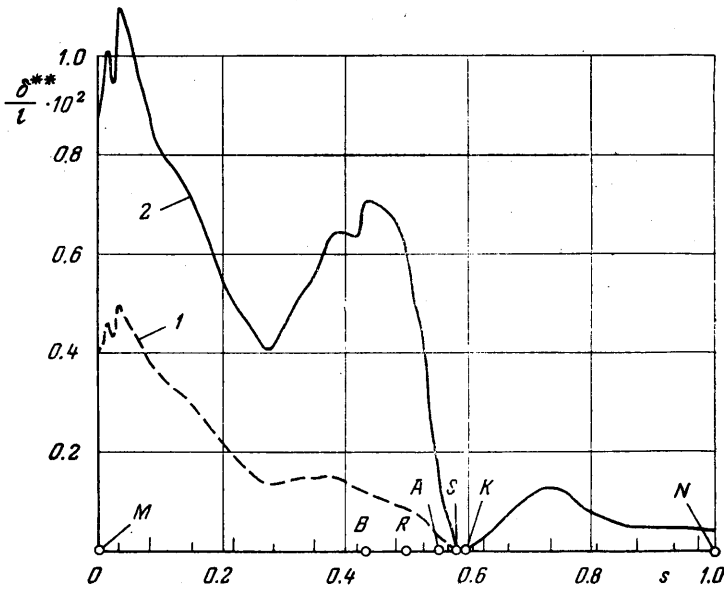
Функционал системы определяется суммой

$$F(X) = \sum_{n=1}^{n_2} b_n [\exp(|e_n|) - 1]$$

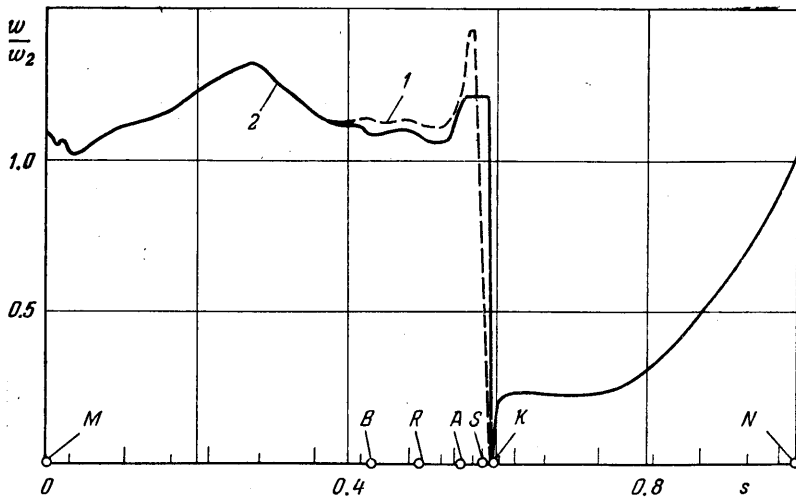
где e_i — нормированные невязки уравнений взаимодействия (4.7) в n_1 расчетных точках интервала (s_A, s_B) и шести условий склейки (7.1) — (7.4), b_i — весовые коэффициенты. Число независимых переменных вектора X равно 10, число невязок уравнений в функционале $F(X)$ равно $n_2 = 2n_1 + 6$.

Физический смысл задачи сводится к поиску вектора X , минимизирующего функционал $F(X)$, с ограничениями на область действительных значений вектора X . Поиск минимума $F(X)$ осуществляется методом вращающихся координат с ограничениями общего вида, разработанным В. И. Купцовым.

8. В качестве примера на ЭВМ типа БЭСМ-6 было рассчитано течение в рабочей решетке турбины (фиг. 2) с конструктивным углом решетки $\beta_{LK} = 40^\circ$ при положительном угле атаки $i = 10^\circ$ без отрыва и с отрывом от входной кромки. На профиле было расположено $n = 103$ расчетные точки, в областях III, V параметры закона трения в формуле (5.2) равны $A = 0.0128$, $m = 4$, $H = 1.285$, число Рейнольдса $Re = 0.9 \cdot 10^6$.



Фиг. 3



Фиг. 4

В результате ряда пробных расчетов выбрано число точек в области II присоединения потока $n_1=15$, при уменьшении n_1 решение задачи ухудшается; константы турбулентной вязкости $b=0.15$, $(-ka)=0.03$ обеспечивают наилучшее сопоставление с экспериментом. Были достигнуты безразмерные величины невязок e_i в уравнениях взаимодействия (4.7) порядка $e_i=0.001 \div 0.1$. На фиг. 3, 4 приведены расчетные зависимости w/w_2 , δ^{**}/l от $s=s/s_2$, где s_2 — длина контура профиля. Координата передней критической точки K определяется с точностью $\Delta s=0.0035$.

При безотрывном обтекании с положительным углом атаки $i=10^\circ$ (линии 1 на фиг. 3, 4) на выпуклой стороне профиля на входной кромке образуется максимум скорости и последующий участок интенсивного диф-

фузорного течения, пограничный слой утолщается наиболее значительно в косом срезе решетки. Колебания $w(s)$ (и соответственно $\delta^{**}(s)$) на выпуклой стороне профиля у тонкой выходной кромки вызваны погрешностью при аппроксимации интегрального уравнения (2.1) системой линейных уравнений. Расчетный коэффициент профильных потерь $\xi_{\infty} = 0.0273$. Из сопоставления с экспериментальным значением $\xi_{\infty} = 0.058$ следует, что безотрывное обтекание не реализуется.

При отрывном обтекании с углом атаки $i = 10^\circ$ (линии 2 на фиг. 3, 4) на входной кромке располагается короткая тонкая отрывная область с параметрами

$$|s_S - s_R|/l = 0.202, \delta_A^*/l = 0.0215, |s_A - s_R|/\delta_A^* = 5.3$$

Максимум скорости безотрывного обтекания на входной кромке заменяется изобарической областью, коэффициент восстановления давления в области присоединения $\sigma = (p_R - p_S)/(1/2 \rho c_S^2) = 0.221$, в точке B небольшой скачок $w(s_B)$ вызван скачкообразным изменением угла наклона γ на границе областей II и III ($\gamma_{II}(s_B) \neq 0$, $\gamma_{III}(s_B) = 0$). Толщина потери импульса δ^{**} увеличивается особенно значительно на участке отрывной области, в точке B небольшой скачок $\delta^{**}(s_B)$ вызван скачком скорости течения $w(s_B)$, в точке M на выходной кромке $(\delta^{**}/\delta^{**})_M = 1.75$. Расчетное значение $\xi_{\infty} = 0.055$ удовлетворительно согласуется с экспериментальным.

Поступила 14 IX 1977

ЛИТЕРАТУРА

1. Чжен П. Отрывные течения, т. 1-3. М., «Мир», 1972-1973.
2. Гогош Л. В., Нейланд В. Я., Степанов Г. Ю. Теория двумерных отрывных течений. В сб. «Гидромеханика», т. 8. М., Итоги науки и техники ВИНТИ АН СССР, 1975.
3. Гогош Л. В., Степанов Г. Ю. Отрывное обтекание уступа с образованием турбулентного следа. Изв. АН СССР, МЖГ, 1977, № 3.
4. Курманов Б. И., Подвидз Г. Л., Степанов Г. Ю. Расчет двумерного течения газа в решетках турбомашин методом интегральных уравнений. Изв. АН СССР, МЖГ, 1977, № 4.
5. Абрамович Г. Н. Теория турбулентных струй. М., Физматгиз, 1960.
6. Гиневский А. С. Теория турбулентных струй. М., «Машиностроение», 1969.
7. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного. М., «Наука», 1973.