

## О СДВИГОВЫХ ТЕЧЕНИЯХ ТИКСОТРОПНОЙ ЖИДКОСТИ

Н. Х. ШАДРИНА

(Ленинград)

Рассматривается тиксотропная жидкость с вязкостью, зависящей от структурного параметра, который удовлетворяет простейшему кинетическому уравнению. Исследуется устойчивость и эволюционность сдвиговых течений такой жидкости. Рассмотрены некоторые классы задач, допускающих приближенные решения; получены решения задач об изменениях структуры в куэттовских колебательных течениях. Проанализирован эффект кажущейся вязкоупругости для тиксотропных жидкостей. Обсуждаются некоторые аспекты тиксотропного поведения крови.

1. Под тиксотропией обычно понимают обратимое изменение вязкости, происходящее за счет разрушения и восстановления внутренней, как правило, надмолекулярной структуры среды под действием сдвига. В том случае, когда рост сдвиговых напряжений сопровождается падением вязкости, жидкость называется тиксотропной. Тиксотропными свойствами обладают глинистые растворы, нефтепродукты с примесями, некоторые полимерные растворы, многие суспензии, в том числе и кровь.

Будем рассматривать тиксотропную жидкость с вязкостью  $\eta$ , зависящей от одного безразмерного структурного параметра  $\lambda$ , который удовлетворяет уравнению  $\partial\lambda/\partial t = F(\lambda, e_*^{-2}J)$ , где  $e_*^{-1}$  — постоянная с размерностью времени,  $J$  — второй инвариант тензора скоростей деформаций. Физический смысл параметра  $\lambda$  несуществен для дальнейших рассуждений (обычно  $\lambda$  обозначает среднее удлинение взвешенных частиц, их числовую концентрацию и т. п.).

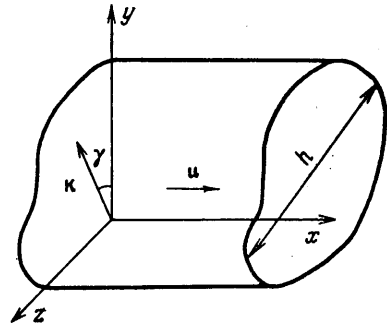
Вводя в качестве масштабов скорости, времени, координат, перепада давления, вязкости и функции  $F$  соответственно величины  $u_*$ ,  $t_*$ ,  $h$ ,  $u_*\eta/h^2$ ,  $\eta_*$  и  $1/q$ , для развитого течения (см. фиг. 1) в области с характерным поперечником  $h$  получим следующую систему уравнений:

$$(1.1) \quad S \frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} - \frac{\partial p(x, \tau)}{\partial x}, \quad \frac{\partial \lambda}{\partial \tau} = N_1 f(\lambda, NI)$$

$$\tau_{xy} = \eta(\lambda) \frac{\partial u}{\partial y}, \quad \tau_{xz} = \eta(\lambda) \frac{\partial u}{\partial z}, \quad I = (\nabla u)^2$$

$$S = \frac{\rho h^2}{\eta_* t_*}, \quad N_1 = \frac{t_*}{q}, \quad N = e_*^{-2} \frac{u_*^2}{h^2}, \quad t = t_* \tau, \quad F = \frac{f}{q},$$

$$J = I u_*^2 / h^2$$



Фиг. 1.

Здесь  $\rho$  — плотность жидкости,  $u(y, z, \tau)$ ,  $\tau_{ij}$ ,  $\eta$  — безразмерные скорость, компоненты тензора напряжений и вязкость.

Линеаризуем систему (1.1) относительно параметров стационарного течения, считая, что возмущения давления отсутствуют. Положим

$$\begin{aligned} u &= u^\circ(y, z) + \delta u(\tau, y, z), \quad \lambda = \lambda^\circ(y, z) + \delta \lambda(\tau, y, z) \\ \eta &= \eta^\circ(y, z) + \delta \eta(\tau, y, z) = \eta^\circ(\lambda^\circ) + \eta_\lambda^\circ \delta \lambda \\ I &= I^\circ + 2 \nabla u^\circ \nabla \delta u \quad (f(\lambda^\circ, N I^\circ) = 0, \eta_\lambda^\circ = \partial \eta^\circ / \partial \lambda^\circ) \end{aligned}$$

Здесь градусом обозначены стационарные составляющие, знаком  $\delta$  — соответствующие возмущения.

Подстановка этих соотношений в систему (1.1) дает уравнения для возмущений

$$\begin{aligned} (1.2) \quad S \frac{\partial \delta u}{\partial \tau} &= \eta^\circ \Delta \delta u + \delta \eta \Delta u^\circ + \nabla \eta^\circ \nabla \delta u + \nabla \delta \eta \nabla u^\circ \\ \delta \eta &= \eta_\lambda^\circ \delta \lambda, \quad \frac{1}{N_1} \frac{\partial \delta \lambda}{\partial \tau} = f_\lambda^\circ \delta \lambda + 2 f_I^\circ \nabla u^\circ \nabla \delta u \\ f_\lambda^\circ &= \frac{\partial f}{\partial \lambda}, \quad f_I^\circ = \frac{\partial f}{\partial I} \quad (\lambda = \lambda^\circ, I = I^\circ) \end{aligned}$$

Будем рассматривать решения вида  $\delta u = U \exp i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega\tau)$ ,  $\delta \lambda = \Lambda \exp i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega\tau)$ , полагая, что возмущения распространяются в плоскости  $(y, z)$  по однородному или медленно меняющемуся фону; в последнем случае длину волны считаем малой по сравнению с  $h$  ( $|k| \gg 1$ ).

Совместим ось  $y$  с вектором  $\mathbf{k}$  (т. е. с направлением распространения возмущений). Тогда из (1.2) обычным путем получим дисперсионное уравнение в виде

$$\begin{aligned} (1.3) \quad \omega^2 S + \omega [k \eta_v^\circ + i(k^2 \eta^\circ - S N_1 f_\lambda^\circ)] + k^2 N_1 (\eta^\circ f_\lambda^\circ - 2 \eta_\lambda^\circ f_I^\circ u_v^{\circ 2}) + \\ + i k N_1 [2 f_I^\circ u_v^\circ \nabla (\eta_\lambda^\circ \nabla u^\circ) - f_\lambda^\circ \eta_v^\circ] = 0 \end{aligned}$$

Рассмотрим вначале область больших  $k$ , при которых возмущения могут расти наиболее быстро. Для этого в уравнении (1.3) сохраним только главные члены, которые могут повлиять на поведение  $\omega$  при  $k \rightarrow \infty$  и любых  $N_1$ . Вводя обозначение  $s = i\omega$ , получим

$$(1.4) \quad s^2 S - s(k^2 \eta^\circ - f_I^\circ S N_1) - k^2 N_1 (\eta^\circ f_\lambda^\circ - 2 \eta_\lambda^\circ f_I^\circ u_v^{\circ 2}) = 0$$

Отсюда следует, что при  $k \rightarrow \infty$  и конечных  $N_1$  инкремент  $s$  остается ограниченным, и поэтому исходная система эволюционна. Вместе с тем  $s$  может принимать значения с отрицательной вещественной частью (порядка  $N_1$ ), что означает существование коротковолновой неустойчивости.

Для исследования неустойчивости во всем диапазоне длин волн введем обозначения

$$\begin{aligned} \kappa^2 &= \eta^\circ \frac{k^2}{S}, \quad \theta = \frac{\eta_v^\circ}{\sqrt{S} \eta^\circ}, \quad \Phi = N_1 f_\lambda^\circ \\ F &= N_1 \left( f_\lambda^\circ - \frac{2 \eta_\lambda^\circ}{\eta^\circ} f_I^\circ u_v^{\circ 2} \right) \\ \Phi &= N_1 [2 f_I^\circ u_v^\circ \nabla (\eta_\lambda^\circ \nabla u^\circ) - f_\lambda^\circ \eta_v^\circ] (S \eta^\circ)^{-1/2} \end{aligned}$$

Уравнение (1.3) тогда переписывается в виде

$$\omega^2 + \omega [\theta \kappa + i(\kappa^2 - \Phi)] + \kappa^2 F + i \kappa \Phi = 0$$

Комплексная функция  $\omega$  имеет две однозначные ветви, зависящие от вещественных аргументов  $\kappa, \theta, \varphi, F, \Phi$

$$\omega_{1,2} = -\frac{1}{2}[\theta\kappa + i(\kappa^2 - \varphi)] \pm \sqrt{D},$$

$$D = -\frac{1}{4}[\theta\kappa + i(\kappa^2 - \varphi)]^2 - \kappa^2 F - i\kappa\Phi$$

Для  $\sqrt{D}$  здесь берется ветвь, принимающая при  $\kappa=0$  значение  $\frac{1}{2}i|\Phi|$ .

При выполнении условия  $\text{Im } \omega > 0$  возмущения системы будут неограниченно возрастать. Существуют следующие области неустойчивости:

$$F < 0, \quad \kappa^2 < R_-; \quad F \geq 0, \quad \theta^2 - 4F \leq 0: \quad \kappa^2 < \infty$$

$$F \geq 0, \quad \theta^2 - 4F > 0, \quad \theta\Phi > 0: \quad \kappa^2 > R_+, \quad \kappa^2 < R_-$$

$$F \geq 0, \quad \theta^2 - 4F > 0, \quad \theta\Phi \leq 0: \quad \kappa^2 < \infty$$

$$R_{\pm} = [\theta\Phi \pm \sqrt{\Phi^2(\theta^2 - 4F)}] (2F)^{-1} + \varphi$$

Легко показать, что область неустойчивых длин волн расширяется с увеличением  $N_1$  (с уменьшением  $q$ ). Условием устойчивости для всех  $\kappa$  является выполнение неравенств  $F < 0, R_- < 0$ , откуда следуют необходимые условия  $f_\lambda^0 < 0, f_\lambda^0 - 2\eta_\lambda^0 f_I^0 u_y^0 / \eta^0 < 0$ .

Приравняв  $\text{Im } \omega$  нулю, определяем случаи возникновения на границе устойчивости консервативных сдвиговых волн, распространяющихся без затухания или раскачки. Для  $R_- > 0, R_+ > 0$  существуют две консервативные волны с частотами  $\omega_{1,2} = \frac{1}{2}(\pm \sqrt{\theta^2 - 4F} - \theta) \sqrt{R_{\pm}}$ , распространяющиеся в одном направлении при  $\theta^2 > 4F > 0$  и в противоположных направлениях при  $F < 0$ ; для  $R_+ > 0, R_- < 0$  имеется одна консервативная волна с частотой  $\omega_1$  при  $\theta^2 > 4F > 0$ ; для  $R_+ < 0, R_- > 0$  существует консервативная волна с частотой  $\omega_2$  при  $F < 0$ .

Для существования неустойчивости достаточно, чтобы одно из указанных выше условий реализовалось хотя бы при одной взаимной ориентации вектора  $\mathbf{k}$  и невозмущенного поля скоростей; для устойчивости нужно выполнение соответствующих неравенств при всех ориентациях.

Общее условие устойчивости имеет вид

$$(1.5) \quad \varphi < [\theta\Phi - \sqrt{\Phi^2(\theta^2 + 4|F|)}] (2|F|)^{-1}, \quad F < 0$$

Здесь в приведенных выше формулах для  $\varphi, \theta, F, \Phi$  надо заменить  $\eta_y^0, u_y^0$  на  $\eta^0 \cos \gamma + \eta_z^0 \sin \gamma, u_y^0 \cos \gamma + u_z^0 \sin \gamma$ ; неравенства (1.5) должны выполняться одновременно при всех  $\gamma$ . Нетрудно показать, что необходимые условия устойчивости выражаются неравенствами

$$(1.6) \quad f_\lambda^0 < 0, \quad f_\lambda^0 - 2 \frac{\eta_\lambda^0}{\eta^0} f_I^0 (\nabla u^0)^2 < 0$$

Физический смысл (1.6) очевиден: структура должна быть устойчива в отсутствие гидродинамических возмущений, а равновесная зависимость вязкости от скоростей сдвига ( $\eta_I^0 = \eta_\lambda^0 \lambda_I^0, \lambda_I^0 = -f_I^0 / f_\lambda^0$ ) не должна быть сильно убывающей.

Предельный переход  $N_1 \rightarrow \infty$  (исчезающе малые характерные времена изменения структуры) дает вместо (1.4)

$$s = k^2 S^{-1} (\eta^0 + 2\eta_I^0 u_y^0)$$

и предсказывает неэволюционность предельной нелинейно-вязкой модели при сильно убывающей функции  $\eta^0(I^0)$ . Условие эволюционности совпадает с полученным в статье [1]:  $\eta^0 + 2\eta_I^0 u_y^0 > 0$  или в общем случае  $\eta^0 + 2\eta_I^0 (\nabla u^0)^2 > 0$ . Условие коротковолновой устойчивости, получаемое из (1.4) при  $k \rightarrow \infty$ , имеет вид второго неравенства (1.5) и не отличается от условия эволюционности предельной модели, если  $f_\lambda^0 < 0$ .

Таким образом, если нелинейно-вязкая модель неэволюционна, то учет конечного времени структуроизменения устраняет неэволюционность; при этом коротковолновые возмущения остаются неустойчивыми. Эволюционной нелинейно-вязкой модели соответствует устойчивая тиксотропная модель только при  $f_\lambda^0 < 0$ .

2. Уравнения (1.1) содержат три безразмерных параметра ( $S, N_1, N$ ). Первый из них характеризует роль инерционных сил, а два других — ско-

рость структуроизменения и степень его связанности со скоростями сдвига в потоке.

При  $S \ll 1$  имеет место квазистационарное течение, при котором скорость зависит от времени только через граничные условия. В случае, когда первое уравнение (1.1) удается 1 раз проинтегрировать (например, для течений Куэтта и Пуазейля в плоской щели или круглой трубе), задача сводится к решению последнего уравнения, в которое  $y, z$  входят в качестве параметров.

При  $N_1 \ll 1, N_1 N \ll 1$ , когда характерное гидродинамическое время много меньше характерного времени структурообразования, решение ищется в виде разложения по параметру  $N_1$ :  $\lambda = \lambda^{(0)} + N_1 \lambda^{(1)} + \dots$ ,  $u = u^{(0)} + N_1 u^{(1)} + \dots$ . Нулевому приближению соответствует неизменное значение структурного параметра, которое находится либо как замороженное начальное значение (в задачах о переходных режимах), либо как среднее (в задачах об установившихся колебаниях) из соотношения  $\langle f(\lambda^{(0)}, NI^{(0)}) \rangle = 0$ , где  $\langle \rangle$  — символ осреднения по периоду колебаний.

В противоположном случае ( $N_1 \gg 1, NN_1^{-1} \ll 1$ ) решение строится в виде разложений по  $N_1^{-1}$ , причем нулевому приближению соответствует течение нелинейно-вязкой среды.

Условие  $N \ll 1$  означает, что характерная скорость сдвига в потоке много меньше некоторой критической, при которой происходит существенное изменение внутренней структуры. В этом случае структурный параметр слабо зависит от скорости сдвига и решение ищется в виде разложения по степеням  $N$ . В противоположном случае ( $N \gg 1$ ) характерная скорость сдвига намного превышает критическую и структурный параметр в нулевом приближении имеет значение  $\lambda = \lambda_\infty$ , соответствующее максимальной дисперсности среды. Поправки к значению  $\lambda_\infty$  можно представить в виде ряда по обратным степеням  $N$ .

Другие возможности приближенного решения системы (1.1) возникают при слабой зависимости вязкости от структурного параметра ( $\eta_\lambda \ll 1$ ) или при наличии малого параметра в граничных условиях, например амплитуды колебаний скорости стенки или градиента давления соответственно в течениях Куэтта и Пуазейля.

3. Рассмотрим некоторые примеры реализации названных приближенных решений. Для простоты ограничимся плоской задачей Куэтта. В качестве аргумента функции, характеризующей изменения структуры, примем скорость сдвига и в дальнейшем вместо  $f$  будем использовать  $\psi(\lambda, N_2 | \partial u / \partial y |) = f(\lambda, NI)$ ,  $N_2 = \sqrt{N}$ . Тогда из (1.1) получаем

$$(3.1) \quad S \frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \eta \frac{\partial u}{\partial y} \right), \quad \frac{\partial \lambda}{\partial \tau} = N_1 \psi \left( \lambda, N_2 \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right| \right)$$

Граничные условия в общем случае имеют вид  $u(1, \tau) = V(\tau)$ ,  $u(0, \tau) = 0$ .

Пусть стенка канала колеблется по гармоническому закону на фоне покоящейся жидкости, т. е.  $V = \varepsilon \sin \tau$ , причем  $0 < \varepsilon \leq 1$ . Приближенное решение ищем в виде  $u = \varepsilon u^{(1)}$ ,  $\lambda = \lambda^{(0)} + \varepsilon \lambda^{(1)}$ ; тогда

$$\begin{aligned} \eta(\lambda) &= 1 + \varepsilon \eta_\lambda \lambda^{(1)}, \quad \psi \left( \lambda, N_2 \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right| \right) = \\ &= \psi(\lambda^{(0)}, 0) + \varepsilon \psi_\lambda \lambda^{(1)} + \varepsilon \psi_I \left| \frac{\partial u^{(1)}}{\partial y} \right| \end{aligned}$$

Здесь частные производные  $\eta_\lambda = \partial \eta / \partial \lambda$ ,  $\psi_\lambda = \partial \psi / \partial \lambda$ ,  $\psi_I = \partial \psi / \partial | \partial u / \partial y |$  вычислены при параметрах покоящейся жидкости ( $\lambda = \lambda^{(0)} = \text{const}$ ,  $I = 0$ ): в качестве масштаба вязкости принято ее значение при  $\lambda = \lambda^{(0)}$ .

Теперь система (3.1) сводится к уравнениям

$$(3.2) \quad S \frac{\partial u^{(1)}}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 u^{(1)}}{\partial y^2},$$

$$\frac{\partial \lambda^{(1)}}{\partial \tau} = N_1 \left( \psi_\lambda \lambda^{(1)} + \psi_I \left| \frac{\partial u^{(1)}}{\partial y} \right| \right)$$

с граничными условиями  $u^{(1)}(0, \tau) = 0, u^{(1)}(1, \tau) = \sin \tau$ . Начальные условия не формулируются, так как будут отыскиваться только периодические решения.

Решение первого уравнения известно [2]: оно имеет вид  $u^{(1)} = L(y) \sin(\tau + \chi(y))$ ; формулы для функций  $L$  и  $\chi$ , используемые далее в вычислениях, для краткости здесь опущены.

Периодическое решение второго уравнения системы (3.2) имеет вид

$$(3.3) \quad \lambda^{(1)} = N_1 L_1 \psi_I \int_0^\infty |\sin(\tau - \tau' + \chi_1)| \exp(N_1 \psi_\lambda \tau') d\tau'$$

$$L_1 = p \sqrt{2} (\text{sh}^2 py + \text{cos}^2 py)^{1/2} (\text{sh}^2 p + \text{sin}^2 p)^{-1/2}$$

$$\text{tg } \chi_1 = \frac{\text{cos } p(1-y) \text{sh } p(1+y) + \text{cos } p(1+y) \text{sh } p(1-y)}{\text{sin } p(1-y) \text{ch } p(1+y) + \text{sin } p(1+y) \text{ch } p(1-y)}, \quad p = \sqrt{1/2 S}$$

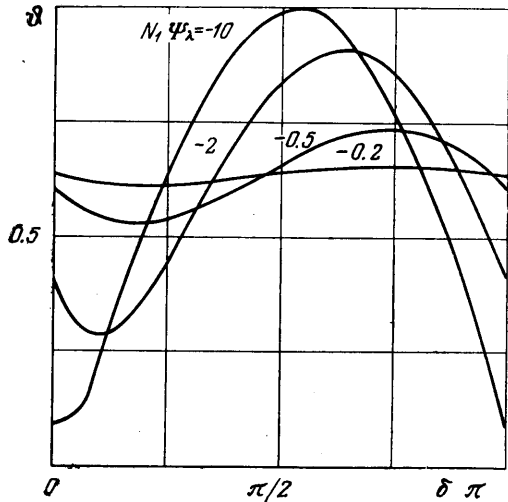
Введем периодическую функцию  $\delta$  при помощи равенства  $\delta = \tau + \chi_1 - \pi[(\tau + \chi_1)/\pi]$ , где квадратные скобки обозначают целую часть соответствующей величины. Очевидно, что  $\sin(\delta - \tau') = 0$  при  $\tau' = \delta + n\pi$  и  $|\sin(\delta - \tau')| = (-1)^{n+1} \sin(\delta - \tau')$  при  $\delta + n\pi < \tau' < \delta + (n+1)\pi, n = 0, 1, 2, \dots$ . Разобьем интеграл (3.3) на сумму интегралов с конечными пределами

$$\lambda^{(1)} = N_1 L_1 \psi_I \left[ \int_0^\delta \sin(\delta - \tau') \exp(N_1 \psi_\lambda \tau') d\tau' + \sum_{n=0}^\infty (-1)^{n+1} \int_{\delta+n\pi}^{\delta+(n+1)\pi} \sin(\delta - \tau') \exp(N_1 \psi_\lambda \tau') d\tau' \right]$$

Проводя интегрирование и суммирование в правой части, получим

$$(3.4) \quad \lambda^{(1)} = -\frac{N_1 L_1 \psi_I}{1 + N_1^2 \psi_\lambda^2} \left[ \text{cos } \delta + N_1 \psi_\lambda \text{sin } \delta - \frac{2 \exp(N_1 \psi_\lambda \delta)}{1 - \exp(\pi N_1 \psi_\lambda)} \right]$$

Таким образом, в этом случае имеем негармонические колебания структурного параметра  $\lambda$ . С уменьшением  $|N_1 \psi_\lambda|$  амплитуда колебаний структурного параметра падает. Физически это соответствует тому, что при увеличении времени структурообразования или возрастании частоты колебаний стенки структурный параметр «не успевает» изменять свое зна-



Фиг. 2

ченне. Среднее за период значение  $\lambda$  не зависит от  $N_1$

$$\langle \lambda \rangle = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \lambda d\tau = \lambda^{(0)} - \frac{2}{\pi \psi_\lambda}$$

На фиг. 2 представлены кривые зависимости величины  $\phi = (\lambda^{(0)} - \lambda) \psi_\lambda / \varepsilon L_1 \psi_I$  от  $\delta$  и  $N_1 \psi_\lambda$ .

Если колебания малой амплитуды накладываются на стационарный сдвиговой поток, то задача сводится к решению системы (3.2) с граничными условиями  $u(0, \tau) = 0$ ,  $u(1, \tau) = 1 + \varepsilon \sin \tau$ . Положим  $u = u^{(0)} + \varepsilon u^{(1)}$ ,  $\lambda = \lambda^{(0)} + \varepsilon \lambda^{(1)}$ , где  $u^{(0)} = y$ ,  $\lambda^{(0)} = \text{const}$ . При достаточно малых  $\varepsilon$  имеем  $|\partial u / \partial y| = 1 + \varepsilon (\partial u^{(1)} / \partial y)$ , и, следовательно

$$\psi \left( \lambda, N_2 \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right| \right) = \psi(\lambda^{(0)}, N_2) + \varepsilon \left( \psi_\lambda \lambda^{(1)} + \psi_I \frac{\partial u^{(1)}}{\partial y} \right)$$

$$\psi_\lambda = \frac{\partial \psi}{\partial \lambda}, \quad \psi_I = \frac{\partial \psi}{\partial |\partial u / \partial y|} \quad (\lambda = \lambda^{(0)}, I = 1)$$

Уравнения первого приближения имеют вид

$$(3.5) \quad S \frac{\partial u^{(1)}}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 u^{(1)}}{\partial y^2} + \eta_\lambda \frac{\partial \lambda^{(1)}}{\partial y}, \quad \frac{\partial \lambda^{(1)}}{\partial \tau} = N_1 \left( \psi_\lambda \lambda^{(1)} + \psi_I \frac{\partial u^{(1)}}{\partial y} \right)$$

$$\eta_\lambda = \frac{\partial \eta}{\partial \lambda} \quad (\lambda = \lambda^{(0)})$$

Исключая отсюда  $\lambda^{(1)}$ , получим уравнение для  $u^{(1)}$

$$S \frac{\partial^2 u^{(1)}}{\partial \tau^{(2)}} = \frac{\partial^2 u^{(1)}}{\partial \tau \partial y^2} + N_1 (\eta_\lambda \psi_I - \psi_\lambda) \frac{\partial^2 u^{(1)}}{\partial y^2} + N_1 \psi_\lambda \frac{\partial u^{(1)}}{\partial \tau}$$

После нахождения периодического решения этого уравнения в виде  $u^{(1)} = L(y) \sin(\tau + \chi(y))$  и подстановки его во второе уравнение (3.5) получим

$$\lambda^{(1)} = L_2(y) \sin(\tau + \chi_2(y))$$

$$L_2 = |p| N_1 \psi_I (\text{sh}^2 p_1 y + \text{cos}^2 p_2 y)^{1/2} [ (1 + N_1^2 \psi_\lambda^2) (\text{sh}^2 p_1 + \text{sin}^2 p_2) ]^{-1/2}$$

$$\text{tg } \chi_2 = - \frac{(N_1 \psi_\lambda p_1 - p_2) P_1 - (N_1 \psi_\lambda p_2 + p_1) P_2}{(N_1 \psi_\lambda p_1 - p_2) P_1 + (N_1 \psi_\lambda p_2 + p_1) P_1}$$

$$P_1 = \text{sin } p_2 (1 - y) \text{ch } p_1 (1 + y) + \text{sin } p_2 (1 + y) \text{ch } p_1 (1 - y)$$

$$P_2 = \text{cos } p_2 (1 - y) \text{sh } p_1 (1 + y) + \text{cos } p_2 (1 + y) \text{sh } p_1 (1 - y)$$

$$p = p_1 + i p_2, \quad p_{1,2} = \left( \frac{S^2 A}{4B} \right)^{1/4} q_{1,2}, \quad q_{1,2} = [1 \mp N_1 \eta_\lambda \psi_I (AB)^{-1/2}]^{1/2}$$

$$A = 1 + N_1^2 \psi_\lambda^2, \quad B = 1 + N_1^2 (\psi_\lambda - \eta_\lambda \psi_I)^2$$

Таким образом, в этом случае изменения структурного параметра представляют собой гармонические колебания, наложенные на исходное значение, соответствующее стационарному сдвигу; среднее значение  $\lambda$  за период остается постоянным ( $\langle \lambda \rangle = \lambda^{(0)}$ ), а амплитуда колебаний убывает при уменьшении  $N_1$ .

Иногда можно принять, что скорость изменения  $\lambda$  пропорциональна разности между его текущим значением и значением, соответствующим стационарному течению с той же скоростью сдвига, т. е.  $\psi = -[\lambda - \lambda_\infty(N_2 |\partial u / \partial y|)]$ . Легко убедиться, что

при этом выполнены условия устойчивости. Такое задание функции  $\psi$  (как и некоторые другие специальные ее виды) обеспечивает возможность точного решения уравнения для  $\lambda$  в явном виде и непосредственного получения связи среднего  $\langle \lambda \rangle$  с гидродинамическими параметрами.

Когда мал параметр  $N_2$ , что означает малые изменения  $\lambda$ ,  $\eta(\lambda)$ , для расчета  $\lambda$  в первом приближении можно воспользоваться уравнением, где  $\partial u / \partial y$  вычислено при постоянной вязкости  $\eta(\lambda^{(0)})$  ( $\lambda^{(0)} = \lambda$  при  $N_2 \rightarrow 0$ ). Если  $\lambda = \lambda^{(0)} + N_2 \lambda^{(1)}$ , то тогда

$$(3.6) \quad \frac{\partial \lambda^{(1)}}{\partial \tau} = -N_1 \left( \lambda^{(1)} - \lambda_{\infty} \left| \frac{\partial u^{(0)}}{\partial y} \right| \right), \quad \lambda_{\infty}' = \partial \lambda_{\infty} / \partial N_2 \quad (N_2 \rightarrow 0)$$

Для задачи о гармонических колебаниях стенки на фоне покоящейся жидкости получаем отсюда формулу, совпадающую с (3.4) при замене в последней  $\psi_{\lambda}$ ,  $\psi_I$  соответственно на  $-1$ ,  $\lambda'_{\infty}$ .

При тех же значениях параметра  $N_2$  для колебательного течения со средней скоростью, отличной от нуля и произвольной в отличие от ранее рассмотренной задачи амплитудой колебаний  $\epsilon$  из (3.6) имеем

$$\lambda^{(1)} = N_1 \lambda_{\infty}' \int_0^{\infty} e^{-N_1 \tau'} |1 + L_1 \epsilon \sin(\tau - \tau' + \chi_1)| d\tau'$$

Функции  $L_1(y)$ ,  $\chi_1(y)$  определены формулами (3.3). При  $|\epsilon L_1| \leq 1$  вычисления не вызывают затруднений. Пусть для определенности  $\epsilon L_1 > 0$ , тогда  $\lambda^{(1)} = N_1 \lambda'_{\infty} L_1 \epsilon M$ , где

$$M = e^{-N_1 \tau} \int_{-\infty}^{\tau} e^{N_1 \tau'} \left| \frac{1}{\epsilon L_1} + \sin(\tau' + \chi) \right| d\tau'$$

Для вычисления последнего интеграла введем величины  $\Delta$ ,  $\alpha$ ,  $z$  следующим образом:

$$0 \leq \Delta = \tau + \chi_1 - 2\pi \left[ \frac{\tau + \chi_1}{2\pi} \right] \leq 2\pi, \quad 0 < \alpha = \frac{1}{\epsilon L_1} < 1, \\ -\infty < z = \Delta + \tau' - \tau \leq \Delta$$

Тогда

$$(3.7) \quad M = e^{-N_1 \Delta} \int_{-\infty}^{\Delta} e^{N_1 z} |\alpha + \sin z| dz$$

Корни уравнения  $\alpha + \sin z = 0$ , лежащие в области  $(0, 2\pi)$ , которой принадлежит и точка  $z = \Delta$ , суть  $a_0 = \pi/2 - \arccos \alpha$ ,  $b_0 = 3\pi/2 + \arccos \alpha$ . Все другие корни определяются формулами  $a_n = a_0 - 2n\pi$ ,  $b_n = b_0 - 2n\pi$  ( $n = 1, 2, \dots$ ). При этом

$$\alpha + \sin z > 0 \quad (b_{n+1} < z < a_n), \quad \alpha + \sin z < 0 \quad (a_n < z < b_n)$$

$$\sin a_n = -\alpha, \quad \cos a_n = -\sqrt{1 - \alpha^2} = -\beta, \quad \sin b_n = -\alpha, \quad \cos b_n = \beta$$

Очевидно, что интеграл (3.7) можно разбить на сумму с учетом перемен знака подынтегральной функции

$$M = \left\{ \int_0^{\Delta} |\alpha + \sin z| e^{N_1 z} dz + \int_{b_1}^{\Delta} (\alpha + \sin z) e^{N_1 z} dz + \right. \\ \left. + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \int_{b_{n+1}}^{a_n} (\alpha + \sin z) e^{N_1 z} dz - \int_{a_n}^{b_n} (\alpha + \sin z) e^{N_1 z} dz \right] \right\} e^{-N_1 \Delta}$$

После интегрирования и суммирования получим

$$M = M_0 + \frac{2 \exp N_1 (-\Delta - 2\pi)}{N_1 (1 + N_1^2) [1 - \exp(-2\pi N_1)]} [(\beta N_1 + \alpha) \exp N_1 a_0 - (\beta N_1 - \alpha) \exp N_1 b_0]$$

$$M_0 = \frac{\alpha}{N_1} + \frac{N_1 \sin \Delta - \cos \Delta}{1 + N_1^2} \equiv M_1 \quad (0 \leq \Delta \leq a_0)$$

$$M_0 = -M_1 + 2 \frac{\beta N_1 + \alpha}{N_1(1+N_1^2)} \exp N_1(a_0 - \Delta) = M_2 \quad (a_0 < \Delta \leq b_0)$$

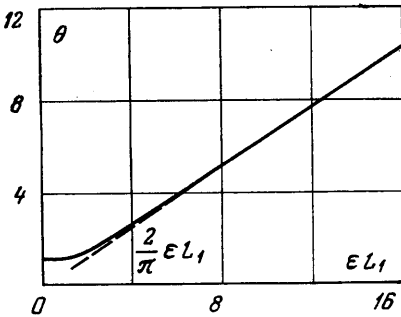
$$M_0 = 2M_1 + M_2 + \frac{2(\beta N_1 - \alpha) \exp N_1(b_0 - \Delta)}{N_1(1+N_1^2)} \quad (b_0 < \Delta \leq 2\pi)$$

Среднее за период значение структурного параметра и в этом случае не зависит от  $N_1$

$$\langle \lambda \rangle = \lambda^{(0)} + N_2 \lambda'_{\infty} \varepsilon L_1 \pi^{-1} [\alpha(\pi - b_0 + a_0) + 2\beta]$$

На фиг. 3 представлена зависимость величины  $\theta = (\langle \lambda \rangle - \lambda^{(0)}) / N_2 \lambda'_{\infty}$  от  $\varepsilon L_1$ . Горизонтальный участок кривой на отрезке (0, 1) соответствует полученному выше решению для малых значений  $\varepsilon$ .

При исследовании течения в щели с неподвижными стенками и пульсирующим градиентом давления соображения п. 2 сохраняют силу. Приближенные решения в обозримом виде удастся получить для функции  $\psi(\lambda, N_2 | \partial u / \partial y)$  общего вида при малой амплитуде пульсаций и равной нулю средней скорости потока, а также для функции  $\psi$ , линейной по  $\lambda$ , при  $N_2 \ll 1$ . Результаты показывают, что при фиксированном  $y$  изменения структурного параметра аналогичны соответствующим изменениям при сдвиговых колебаниях.



Фиг. 3

4. Когда силы инерции в колебательном куэттовском течении невелики ( $S \ll 1$ ), из уравнения импульса (3.1) следует, что касательное напряжение распределено однородно. Для большинства реологических моделей, в том числе и для рассматриваемой тиксотропной среды, это означает, что скорость сдвига также неизменна поперек течения,

т. е.  $u = V(\tau)y$ , и задача сводится к решению уравнения  $\partial \lambda / \partial \tau = \psi(\lambda, N | V)$ . Трение на стенке находится затем как  $\tau_w = \eta(\lambda)V$ . Очевидно, что колебания  $V$  и  $\tau_w$  будут происходить со сдвигом по фазе. Если жидкость обладает одновременно тиксотропными и вязкоупругими свойствами, то для колебаний с умеренной амплитудой допустимо принять связь между напряжениями  $T$  и скоростями сдвига  $\partial u / \partial y$  в виде

$$(4.1) \quad T + \zeta(\lambda) \frac{\partial T}{\partial \tau} = \eta(\lambda) \frac{\partial u}{\partial y} + \xi(\lambda) \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial \tau}$$

При этом  $\partial u / \partial y = V(\tau)$  зависит только от  $\tau$ , а  $\lambda$  удовлетворяет указанному выше уравнению. Допустим, что оно имеет периодическое решение с периодом, равным периоду  $|\partial u / \partial y|$ , т. е.  $\lambda \sim \cos \tau$ . С тем же периодом будут колебаться и коэффициенты  $\zeta$ ,  $\eta$ ,  $\xi$ , которые при естественных условиях непрерывности можно записать в виде фурье-разложений

$$\zeta = \zeta_0 + \zeta_2 \cos(2\tau - \varphi_{(\zeta)}) + \dots, \quad \eta = \eta_0 + \eta_2 \cos(2\tau - \varphi_{(\eta)}) + \dots$$

$$\xi = \xi_0 + \xi_2 \cos(2\tau - \varphi_{(\xi)}) + \dots$$

Подставляя  $T = T_1 \cos(\tau - \varphi_{(T)})$ ,  $\partial u / \partial y = e_1 \cos \tau$  и эти соотношения в (4.1) и пренебрегая вкладом от высших гармоник, выразим измеряемые обычно в эксперименте  $T_1/e_1$  и  $\varphi_{(T)}$  через параметры среды

$$\operatorname{tg} \varphi_{(T)} = \left[ \eta_0 \zeta_0 - \xi_0 + \frac{\xi_2 \xi_2}{4} \sin(\varphi_{(\xi)} - \varphi_{(\zeta)}) - \frac{\xi_2 \eta_2}{4} \cos(\varphi_{(\zeta)} - \varphi_{(\eta)}) + \dots \right]$$



$$\begin{aligned}
 & + \frac{\eta_2}{2} (\sin \varphi_{(\eta)} + \xi_0 \cos \varphi_{(\eta)}) + \frac{\xi_2}{2} (\cos \varphi_{(\xi)} - \xi_0 \sin \varphi_{(\xi)}) + \\
 & + \frac{\xi_2}{2} (\xi_0 \sin \varphi_{(\xi)} - \eta_0 \cos \varphi_{(\xi)}) \left[ \eta_0 + \xi_0 \xi_0 + \frac{\xi_2 \eta_2}{4} \sin(\varphi_{(\xi)} - \varphi_{(\eta)}) - \right. \\
 & - \frac{\xi_2 \xi_2}{4} \cos(\varphi_{(\xi)} - \varphi_{(\xi)}) + \frac{\eta_2}{2} (\cos \varphi_{(\eta)} - \xi_0 \sin \varphi_{(\eta)}) - \\
 (4.2) \quad & \left. - \frac{\xi_2}{2} (\sin \varphi_{(\xi)} + \xi_0 \cos \varphi_{(\xi)}) + \frac{\xi_2}{2} (\eta_0 \sin \varphi_{(\xi)} + \xi_0 \cos \varphi_{(\xi)}) \right]^{-1} \\
 \frac{T_1}{e_1} = & \left( -\xi_0 + \frac{\eta_2}{2} \sin \varphi_{(\eta)} + \frac{\xi_2}{2} \cos \varphi_{(\xi)} \right) (1 + \operatorname{tg}^2 \varphi_{(\tau)})^{1/2} \times \\
 & \times \left[ \operatorname{tg} \varphi_{(\tau)} \left( 1 + \frac{\xi_2}{2} \sin \varphi_{(\xi)} \right) - \xi_0 + \frac{\xi_2}{2} \cos \varphi_{(\xi)} \right]^{-1}
 \end{aligned}$$

Величины  $\xi_0, \xi_2, \eta_0, \dots, \varphi_{(\xi)}, \varphi_{(\eta)}, \dots$  зависят от вида функций  $\xi, \eta, \dots$  и свойств уравнения для  $\lambda$ ; в каждом конкретном случае они могут быть получены элементарными вычислениями.

При  $\xi_0 = \xi_2 = \eta_2 = \xi_0 = \xi_2 = 0$  (ньютоновская жидкость) из (4.2) следует:  $\varphi_{(\tau)} = 0, T_1/e_1 = \eta_0$ . В случае чистой вязкоупругости  $\xi_2 = \eta_2 = \xi_2 = 0$  и вместо (4.2) получаем известные формулы

$$(4.3) \quad \operatorname{tg} \varphi_{(\tau)} = \frac{\eta \xi - \xi}{\eta + \xi \xi}, \quad \frac{T_1}{e_1} = \left( \frac{\eta^2 + \xi^2}{1 + \xi^2} \right)^{1/2}$$

Для чисто тиксотропной жидкости  $\xi_0 = \xi_2 = \xi_0 = \xi_2 = 0$  и

$$(4.4) \quad \operatorname{tg} \varphi_{(\tau)} = \frac{\eta_2 \sin \varphi_{(\eta)}}{2\eta_0 + \eta_2 \cos \varphi_{(\eta)}}, \quad \frac{T_1}{e_1} = \left( \eta_0^2 + \frac{\eta_2^2}{4} + \eta_0 \eta_2 \cos \varphi_{(\eta)} \right)^{1/2}$$

Сопоставляя соотношения (4.3), (4.4), находим связь между кажущимися вязкоупругими (обозначены индексом  $a$ ) и истинными тиксотропными характеристиками

$$\begin{aligned}
 (4.5) \quad \xi_a = & \frac{1+r \cos \varphi_{(\eta)}}{r \sin \varphi_{(\eta)}} \left( \pm \frac{1}{|1+r \cos \varphi_{(\eta)}|} - 1 \right) \\
 \frac{\xi_a}{\eta_0} = & \frac{1+r \cos \varphi_{(\eta)}}{r \sin \varphi_{(\eta)}} \left( 1 \mp \frac{1+2r \cos \varphi_{(\eta)} + r^2}{|1+r \cos \varphi_{(\eta)}|} \right) \\
 \eta_a = & \eta_0 \quad (r = \eta_2/2\eta_0)
 \end{aligned}$$

Выбор верхнего знака в (4.5) и выполнение одной из систем неравенств

$$r \cos \varphi_{(\eta)} < 0, \quad r \sin \varphi_{(\eta)} > 0, \quad |r| < |\cos \varphi_{(\eta)}|$$

и

$$-2 < r \cos \varphi_{(\eta)} < -1, \quad r \sin \varphi_{(\eta)} < 0, \quad r^2 + 3r \cos \varphi_{(\eta)} + 2 < 0$$

необходимы и достаточны, чтобы  $\xi_a, \xi_a$  находились в области, допустимой для моделей вязкоупругих жидкостей:  $\xi_a > \xi_a/\eta_0 > 0$ .

Очевидно, что исключив  $\lambda$  из соотношений  $T = \eta(\lambda) \partial u / \partial y$  и  $\partial \lambda / \partial \tau = -\psi(\lambda, N_2 |\partial u / \partial y|)$ , придем к уравнению типа  $\Phi(T, \partial u / \partial y, \partial T / \partial \tau, \partial^2 u / \partial y \partial \tau) = 0$ , являющемуся как бы обобщением (4.1) при  $\lambda = \text{const}$ . Принципиальное отличие модели (4.1) от этой заключается в том, что временные эффекты в первой линейны, а в последней — существенно нелинейны. Поэтому в (4.2), (4.4)  $\varphi_{(\tau)}$  зависит от амплитуды скоростей сдвига через  $\xi_i, \eta_i, \xi_i, i=0,2$ .

5. Литература, посвященная течениям тиксотропных жидкостей, довольно обширна (см. например, [3, 4]), однако обычно исследуются вискозиметрические те-

чения с целью сопоставления теории и реологического эксперимента. В отличие от этих работ выше основное внимание уделено поведению структурного параметра. Причиной этому послужили опытные данные, свидетельствующие о тиксотропных свойствах крови и, следовательно, о возможности их описания с помощью уравнения структурной кинетики первого порядка [5-11]. Значительный интерес для физиологии представляет выяснение структуры крови при ее пульсирующем течении по сосудам. Решения приведенных выше и близких к ним модельных задач показывают, что для условий течения крови в артериях имеют место слабые колебания структурных параметров (например, среднего размера эритроцитарного агрегата) около значения, соответствующего средним скоростям сдвига.

Действительно, если отождествлять  $\lambda$  с числовой концентрацией агрегатов и принять для нее уравнение типа  $\partial\lambda/\partial\tau = -N_1(\lambda - N_2|\partial u/\partial y|)$ ,  $N_1 \ll 1$ , то периодическое решение есть

$$\lambda \approx N_2 \left[ \left\langle \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right| \right\rangle + N_1 \left( \left\langle (1-\tau) \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right| \right\rangle - \int_0^\tau \left( \left\langle \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right| \right\rangle - \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right| \right) d\tau \right) \right]$$

Это решение отличается от квазистационарного  $\lambda \approx N_2|\partial u/\partial y|$  на величину порядка  $N_2$ . Для кровеносных сосудов  $N_2 \gg 1$ , и поэтому квазистационарные теории применительно к кровеносным сосудам (см. [12, 13]) лишены смысла.

Заметим еще, что в некоторых работах, посвященных реологии крови (см. [14]), обнаружение сдвига фаз  $\varphi(\tau)$  в колебательном течении рассматривается как основание для приписывания крови вязкоупругих свойств. Однако эта гипотеза не подтверждена фактами, допускающими однозначное толкование, тогда как гипотеза о тиксотропном поведении крови, обусловленном образованием и распадом эритроцитарных агрегатов, имеет серьезную основу. Как показано выше, при течении тиксотропной жидкости существуют элементы кажущейся вязкоупругости.

В заключение автор благодарит С. А. Регирера за обсуждение работы и полезные замечания.

Поступила 27 IX 1977

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Регирер С. А., Руткевич И. М. Некоторые особенности уравнений гидродинамики неньютоновских сред. ПММ, 1968, т. 32, вып. 5.
2. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. М., «Наука», 1972.
3. Fredrickson A. G. A model for the thixotropy of suspensions. A. I. Ch. E. Journal, 1970, vol. 16, No. 3.
4. Ruckenstein E., Mewis J. Kinetics of structural changes in thixotropic fluids. J. Coll. and Interface Sci., 1973, vol. 44, No. 3.
5. Зеликсон Б. Б., Левтов В. А., Шадрина Н. Х. Оптические и электрические методы косвенного изучения реологических свойств крови. В сб. «Биомеханика». Рига, Рижск. НИИ травматологии и ортопедии, 1975.
6. Шадрина Н. Х. Агрегация эритроцитов и реологические свойства крови. В кн. «4-й Всесоюзный съезд по теоретической и прикладной механике. Аннотации докладов». Киев, «Наукова думка», 1976.
7. Chien S., King R. G., Skalak R., Usami S., Copley A. L. Viscoelastic properties of human blood and red cell suspensions. Biorheology, 1975, vol. 12, No. 6.
8. Copley A. L., King R. G., Chien S., Usami S., Skalak R., Huang C. R. Microscopic observations of viscoelasticity of human blood in steady and oscillatory shear. Biorheology, 1975, vol. 12, No. 6.
9. Huang C. R., Siskovic N., Robertson R. W., Fabisian W., Smitherberg E. H., Copley A. L. Quantitative characterization of thixotropy of whole human blood. Biorheology, 1975, vol. 12, No. 5.
10. Usami S., King R. G., Chien S., Skalak R., Huang C. R., Copley A. L. Microcinematographic studies on red cell aggregation in steady and oscillatory shear — a note. Biorheology, 1975, vol. 12, No. 5.
11. Apelblat A., Bourgoin D., Burean M., Healy J. C., Joly M. Transient behaviour and hysteresis of human whole blood in Couette flow. In: Proc. 7-th Intern. Congress Rheol., Gothenburg, 1976. Gothenburg, 1976, p. 570-571.
12. Taylor M. G. The influence of the anomalous viscosity of blood upon its oscillatory flow. Phys. Med. Biol., 1959, vol. 3, No. 3.
13. Gross J. F., Aroesty J. The fluid mechanics of pulsatile flow in the microcirculation. In: Fluid Dynam. Trans., vol. 6, pt 2. Proc. 10th. Sympos. Adv. Probl. and Math. in Fluid Mech. Rynia, 1971. Warszawa, 1971.
14. Thurston G. B. The effects of frequency of oscillatory flow on the impedance of rigid, blood — filled tubes. Biorheology, 1976, vol. 13, No. 3.