МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 3 • 1978

УДК 532.517.2

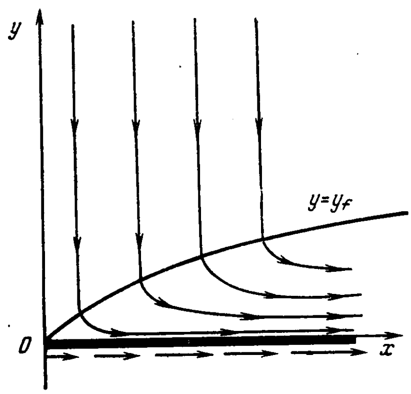
К ТЕОРИИ ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ НЕНЬЮТОНОВСКИХ НЕЛИНЕЙНО-ВЯЗКИХ СРЕД

К. Б. ПАВЛОВ

(*Москва*)

В связи со многими практическими приложениями имеется большое число исследований, посвященных теории пограничного слоя нелинейно-вязких жидкостей со степенным реологическим законом (см., например, обширную библиографию в монографиях [1, 2]). Особое место в теории пограничного слоя обычно уделяется рассмотрению автомодельных задач, так как их решения позволяют выявить особенности структуры пограничного слоя и могут быть использованы для разработки и обоснования приближенных методов расчета. Однако из-за математических трудностей при решении автомодельных задач в случае жидкостей со степенным реологическим законом, как правило, применяются численные методы, и некоторые принципиальные особенности структуры пограничного слоя в таких жидкостях могут выпасть из поля зрения.

Большое значение поэтому имеют автомодельные задачи, решения которых получены в аналитической форме; анализ подобных решений более информативен, чем анализ численных решений. Иллюстрацией этого является построенное ниже точное аналитическое решение одной автомодельной задачи теории пограничного слоя неньютоновской жидкости со степенным реологическим законом. Его анализ показал возможность строгой пространственной локализации области, в которой происходит изменение продольной составляющей скорости. Указанный факт обнаруживается также при рассмотрении задачи об обтекании степенной жидкостью плоской полубесконечной пластины; в частном случае определенного значения константы в реологическом законе здесь также удается построить аналитическое решение в замкнутом виде.



Фиг. 1

1. Пусть неньютоновская жидкость со степенным реологическим законом [3]

$$\sigma_{ij}=2k(2f_{\alpha\beta}f_{\alpha\beta})^{(n-1)/2}f_{ij} \tag{1.1}$$

заполняет пространство, в котором расположена бесконечная эластичная поверхность $y=0$. В (1.1) σ_{ij} — девиатор тензора напряжений; f_{ij} — тензор скоростей деформации; k и n — реологические константы жидкости (по принятой терминологии жидкости с $n>1$ называются дилатантными, с $n<1$ — псевдопластическими, случай $n=1$ соответствует ньютоновской вязкой жидкости). Предполагается, что поверхность испытывает в своей плоскости неоднородное растяжение, в результате которого ее точки движутся со скоростью

$$U(x)=C|x|^{n/(2n-1)}\operatorname{sign} x,\qquad n>{}^1/_2 \tag{1.2}$$

(значение n в показателе (1.2) численно равно значению второй константы в реологическом законе (1.1)). Вследствие растяжения поверхности в пространстве имеет место плоское стационарное течение жидкости (фиг. 1), описываемое системой уравнений пограничного слоя [1, 2]

$$u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{k}{\rho}\frac{\partial}{\partial y}\left(\left|\frac{\partial u}{\partial y}\right|^{n-1}\frac{\partial u}{\partial y}\right),\qquad \frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0 \tag{1.3}$$

Здесь $u(x, y)$ и $v(x, y)$ – продольная и поперечная проекции скорости жидкости, ρ – ее плотность. Учитывая симметрию течения, в дальнейшем ограничимся рассмотрением области $x, y \geqslant 0$.

Введение переменных Мизеса ξ, η [4] ($\xi = x$ – продольная координата слоя, $\eta = \psi$ – функция тока) позволяет свести систему (1.3) к тривиальному решению $u(\xi, \eta) = 0$ и уравнению

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} = a \frac{\partial}{\partial \eta}\left(\left|\frac{\partial u^2}{\partial \eta}\right|^{n-1} \frac{\partial u^2}{\partial \eta}\right), \quad a \equiv \frac{k}{2^n \rho} \tag{1.4}$$

Из постановки задачи очевидно, что искомое решение $u(\xi, \eta)$ должно удовлетворять условиям

$$u(\xi, 0) = C\xi^{n/(2n-1)}, \quad u(\xi, \infty) = 0 \tag{1.5}$$

Решение задачи (1.4), (1.5) автомодельно и может быть представлено в форме $u(\xi, \eta) = u(c\xi - \eta) \equiv u(\omega)$, где постоянная c будет определена ниже в процессе построения решения задачи. Подставляя $u(\omega)$ в (1.4), получаем обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка, интегрируя которое 1 раз от 0 до ω, имеем

$$a[(u^2)']^n - cu = a[(u^2)'(0)]^n - cu(0) \tag{1.6}$$

Здесь и всюду в дальнейшем штрихом обозначается обыкновенная производная по соответствующей автомодельной переменной.

Частное решение уравнения (1.6), удовлетворяющее первому условию (1.5), следует искать в форме $u = A\omega^{n/(2n-1)}$, $A = \text{const}$. В результате имеем

$$(u^2)'(0) = u(0) = 0$$

$$A = \left[\frac{c}{a}\left(\frac{2n-1}{2n}\right)^n\right]^{1/(2n-1)}$$

$$c = \left[aC^{2n-1}\left(\frac{2n}{2n-1}\right)^n\right]^{1/(n+1)}$$

Решение исходной задачи (1.3), (1.5) $u(\xi, \eta)$ можно представить в форме обобщенного решения, склеенного при $\eta = c\xi$ из найденного частного решения $u(\omega)$ и тривиального решения $u = 0$

$$u(\xi, \eta) = A(c\xi - \eta), \quad (\eta \leqslant c\xi); \quad u(\xi, \eta) = 0, \quad (\eta \geqslant c\xi) \tag{1.7}$$

Таким образом, для определенного значения $x = x_0 < \infty$, x — составляющая скорости обращается в нуль на линии тока $\psi = \psi_0 = cx_0$ и, следовательно, поток жидкости через прямую $x = x_0$ конечен. Возвращаясь от переменных (ξ, η) к (x, y), с помощью (1.7) можно получить выражения $\psi(x, y)$, $u(x, y)$, $v(x, y)$ $(x, y \geqslant 0)$. Если $n < 1$, то они имеют вид

$$\psi(x, y) = cx[1 - D^{(2n-1)/(n-1)}]$$

$$u(x, y) = A(cx)^{n/(2n-1)} D^{n/(n-1)}, \quad v(x, y) = -c[1 - D^{n/(n-1)}] \tag{1.8}$$

$$D \equiv 1 + \frac{A(1-n)}{2n-1} y (cx)^{(1-n)/(2n-1)}$$

Если $n>1$, то выражения (1.8) имеют место только при $0\leqslant y\leqslant y_f(x)$, а при $y_f(x)\leqslant y<\infty$

$$\psi(x, y)=cx, \quad u(x, y)=0, \quad v(x, y)=-c$$

Функция

$$y=y_f(x)=\frac{2n-1}{A(n-1)}(cx)^{(n-1)/(2n-1)} \quad (n>1) \tag{1.9}$$

определяет поверхность, ограничивающую область, в которой происходит полное изменение x-й проекции скорости $u(x, y)$.

В полученных выше выражениях функции тока и обеих проекций скорости могут быть проведены предельные переходы $n\to1\pm0$, определяющие их выражения для случая ньютоновской жидкости [5]

$$\psi(x, y)=cx(1-e^{-Ay})$$

$$u(x, y)=Acxe^{-Ay}, \quad v(x, y)=-c(1-e^{-Ay})$$

Как следует из (1.9), при $n\to1+0$ $y_f\to\infty$.

Таким образом, в случае дилатантных жидкостей ($n>1$) обнаружена пространственная локализация области изменения продольной составляющей скорости $u(x, y)$. Математически это явилось следствием того, что при заданных граничных условиях (1.5) в случае $n>1$ невозможно построить решение системы (1.3), имеющее единое аналитическое описание при всех значениях $x, y\geqslant0$. При $n>1$ задача (1.3), (1.5) имеет обобщенное решение со слабым разрывом на поверхности $y=y_f(x)$ (1.9). Физически пространственная локализация области изменения $u(x, y)$ связана с тем, что в дилатантных жидкостях сдвиговые возмущения распространяются с конечной скоростью [6, 7]. Вследствие движения жидкости в пограничном слое сдвиговые возмущения, связанные с изменением $u(x, y)$, сносятся по потоку в направлении продольной координаты слоя, успевая уйти лишь на конечное расстояние в направлении поперечной координаты от поверхности, на которой формируется пограничный слой.

Очевидно, что развитые выше соображения не связаны с конкретными условиями рассмотренной задачи и носят общий характер. В этой связи представляет интерес обнаружение эффекта пространственной локализации области изменения продольной составляющей скорости при анализе других автомодельных задач теории пограничного слоя нелинейно-вязких степенных сред, включая известные задачи (задача Блазиуса, задача о затопленной струе) [1, 2].

2. Остановимся на исследовании решения автомодельной задачи Блазиуса об обтекании плоской полубесконечной пластины неньютоновской жидкостью с реологическим законом (1.1). Если координаты пластины $x\geqslant0$, $y=0$, то решение этой задачи находится из системы (1.3) и граничных условий [1, 2]

$$u(0, y)=U_\infty-\mathrm{const} \quad (0\leqslant y<\infty) \tag{2.1}$$

$$u(x, 0)=v(x, 0)=0, \quad u(x, y\to\infty)\to U_\infty \quad (0<x<\infty)$$

При введении функции тока

$$\psi(x, y)=\left[\frac{kn(n+1)x}{\rho U_\infty^{1-2n}}\right]^{1/(n+1)}\varphi(\zeta)$$

(2.2)

$$u(x, y)=U_\infty\varphi', \quad v(x, y)=\left[\frac{knU_\infty^{2n-1}}{(n+1)^n\rho x^n}\right]^{1/(n+1)}(\zeta\varphi'-\varphi)$$

$$(2.3)\qquad \zeta=\left[\frac{\rho U_\infty}{kn(n+1)x}\right]^{1/(n+1)} y \quad (0\leqslant\zeta<\infty)$$

задача (1.3), (2.1) сводится к следующей:

$$(2.4)\qquad (\varphi'')^{n-1}\varphi'''+\varphi\varphi''=0$$

$$(2.5)\qquad \varphi(0)=\varphi'(0)=0$$

$$(2.6)\qquad \varphi'(\infty)=1$$

Численное решение задачи (2.4) — (2.6), которая в дальнейшем будет называться исходной, воспроизведено в различных работах; полученные в результате расчетов таблицы функции φ, φ', φ'' приведены, например, в [1]. Тем не менее ни в одной известной работе, посвященной решению этой задачи, не был сделан вывод о пространственной локализации области изменения продольной составляющей скорости в дилатантных жидкостях при любых значениях $n>1$. Между тем он может быть сделан, если убедиться в справедливости утверждения о том, что при $n>1$ исходная задача (2.4) — (2.6) не имеет решения с единым аналитическим описанием во всей области изменения автомодельной переменной ζ (2.3). Доказательство утверждения проведем, исходя из физически очевидного предположения о монотонности и равномерной непрерывности функции $\varphi'(\zeta)\geqslant 0$, определяющей продольную составляющую скорости $u(x, y)$ согласно (2.2). Из сделанного предположения и граничных условий для $\varphi'(\zeta)$ (2.5), (2.6) следует условие

$$(2.7)\qquad \varphi''(\infty)=0$$

которому должно удовлетворять решение исходной задачи, а также условие ограниченности $\varphi''(\zeta)$: $0\leqslant\varphi''\leqslant N<\infty$ $(0\leqslant\zeta<\infty,\ N-\text{const})$. Кроме того, из сделанного предположения и условий (2.5), (2.6) можно заключить, что для любого $M>0$ всегда можно найти такое ζ_M, для которого справедливо неравенство $\varphi(\zeta_M)>M$. Тогда для $\zeta>\zeta_M$ имеет место

$$(2.8)\qquad \int_{\zeta_M}^{\zeta}\varphi(\zeta)\,d\zeta>M(\zeta-\zeta_M)$$

Если уравнение (2.4) проинтегрировать от $\zeta_*-\varepsilon$ до $\zeta_*+\varepsilon$, где ζ_* — произвольное фиксированное значение автомодельной переменной (2.3), то в результате интегрирования можно получить

$$[\varphi''(\zeta_*+\varepsilon)]^n-[\varphi''(\zeta_*-\varepsilon)]^n=n\left[\int_{\zeta_*-\varepsilon}^{\zeta_*+\varepsilon}(\varphi')^2d\zeta-(\varphi\varphi')\Big|_{\zeta_*-\varepsilon}^{\zeta_*+\varepsilon}\right]$$

Из непрерывности φ и φ' следует, что в пределе при $\varepsilon\to 0$ $[\varphi''(\zeta_*+0)]^n=[\varphi''(\zeta_*-0)]^n$, а так как функция $\varphi''(\zeta)$ действительна и положительна. то из последнего равенства вытекает ее непрерывность.

При $n\neq 1$ уравнение (2.4) можно представить в форме $L_1(\varphi)L_2(\varphi)=0$; $L_1(\varphi)\equiv[(\varphi'')^{n-1}]'+(n-1)\varphi$, $L_2(\varphi)=\varphi''$. Уравнение (2.4) формально выполнено, если

$$(2.9)\qquad L_1(\varphi)=0$$

$$(2.10)\qquad L_2(\varphi)=0$$

Общее решение уравнения (2.10)

$$(2.11)\qquad \varphi(\zeta)=A_1+A_2\zeta,\quad A_1, A_2-\text{const}$$

кстати сказать, при $n>1$ являющегося особым решением уравнения (2.4) [8], не может удовлетворить одновременно трем условиям (2.5), (2.6), и, на первый взгляд, может показаться, что решение исходной задачи следует продолжить, как решение задачи (2.9), (2.5), (2.6). Это действительно так при $n<1$, но неверно при $n>1$. В самом деле, проинтегрировав уравнение (2.9) от 0 до $\zeta>\zeta_M$ и учитывая затем (2.8), можно получить неравенство

$$(2.12)\qquad \frac{1}{1-n}\{[\varphi''(\zeta)]^{n-1}-[\varphi''(0)]^{n-1}\}>M(\zeta-\zeta_M)$$

которое должно быть справедливо при тех же значениях $\zeta>\zeta_M$, при которых выполняется уравнение (2.9). Однако, учитывая ограниченность $\varphi''(\zeta)$, легко заметить, что неравенство (2.12) принципиально невыполнимо при $\zeta\to\infty$, $n>1$. Поэтому решение исходной задачи (2.4) — (2.6) с $n>1$ не может быть получено, как решение задачи (2.9), (2.5), (2.6), во всей области изменения автомодельной переменной ζ (2.3).

Покажем, что решение исходной задачи (2.4) — (2.6) с $n>1$ может быть получено, как обобщенное решение, имеющее различное аналитическое описание в области $0\leqslant\zeta<\infty$

$$(2.13)\qquad \varphi(\zeta)=\varphi_1(\zeta)\quad(0\leqslant\zeta\leqslant\zeta_f),\quad \varphi(\zeta)=\varphi_2(\zeta)\quad(\zeta_f\leqslant\zeta<\infty)$$

Здесь ζ_f — значение автомодельной переменной, при котором функции $\varphi_1(\zeta)$ и $\varphi_2(\zeta)$ сшиты одна с другой.

Построение обобщенного решения $\varphi(\zeta)$ (2.13) основывается на том, что в области $0\leqslant\zeta\leqslant\zeta_f$ имеет место уравнение (2.9), а $L_2(\varphi)\neq0$, в то время как в области $\zeta_f\leqslant\zeta<\infty$ имеет место уравнение (2.10), а $L_1(\varphi)\neq0$.

Сформулируем соответствующие задачи для определения функций $\varphi_1(\zeta)$ и $\varphi_2(\zeta)$ (2.13).

Для определения функции $\varphi_1(\zeta)$ из уравнения (2.9) дополнительно к условиям при $\zeta=0$ (2.5) должны быть заданы два условия при $\zeta=\zeta_f$, так как ζ_f также является искомой величиной задачи. Можно показать, что эти условия записываются в виде

$$(2.14)\qquad \varphi_1'(\zeta_f)=1,\quad \varphi_1''(\zeta_f)=0$$

иначе говоря, в случае дилатантных жидкостей ($n>1$) предельные условия (2.6), (2.7) оказываются выполненными как бы «досрочно» при конечном значении $\zeta=\zeta_f<\infty$, а не при $\zeta\to\infty$.

Действительно, функция $\varphi_2(\zeta)$, являющаяся решением уравнения (2.10), должна удовлетворять условиям (2.6) и (2.7), поэтому она записывается в форме выражения (2.11) с $A_2=1$

$$(2.15)\qquad \varphi_2(\zeta)=A_1+\zeta,\quad \varphi_2'(\zeta)=1,\quad \varphi_2''(\zeta)=0\quad(\zeta_f\leqslant\zeta<\infty)$$

Очевидно, что оба условия (2.14) непосредственно следуют из выражений φ_2', φ_2'' (2.15), а также из непрерывности первой и второй производных решения исходной задачи (2.4) — (2.6), включая точку $\zeta=\zeta_f$.

Таким образом, функция $\varphi_1(\zeta)$ должна быть определена из задачи (2.9), (2.5), (2.14).

Функция $\varphi_2(\zeta)$ определяется выражением (2.11), в котором константа A_1 должна быть найдена из условия $\varphi_1(\zeta_f)=\varphi_2(\zeta_f)$, следующего из непрерывности решения исходной задачи.

Построенное обобщенное решение $\varphi(\zeta)$ (2.13) принадлежит классу C^m, $m\geqslant3$, так как в точке $\zeta=\zeta_f$ могут терпеть разрыв производные $d^m\varphi/d\zeta^m$.

Из (2.2), (2.3) и (2.15) можно определить выражения x- и y-проекций скорости

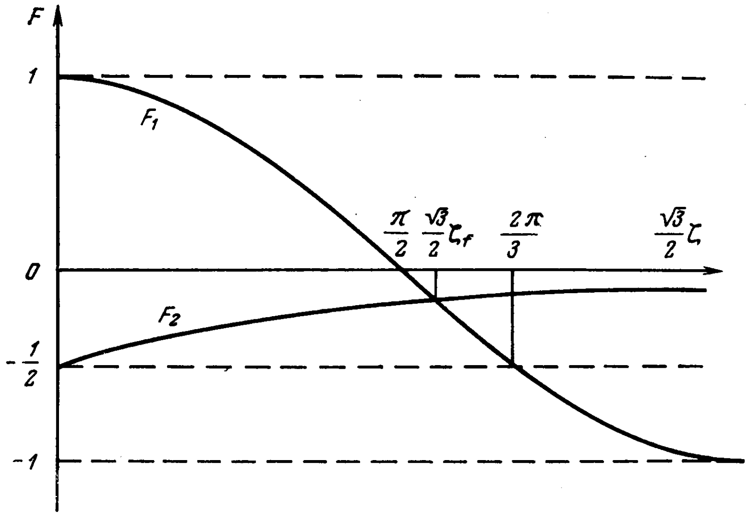
$$u(x,y)=U_\infty,\quad v(x,y)=-A_1\left[\frac{knU_\infty^{2n-1}}{(n+1)^n\rho x^n}\right]^{1/(n+1)}$$

$$(2.16)\qquad (0<x<\infty,\ y_f(x)\leqslant y<\infty)$$

$$y_f(x)=\zeta_f\left[\frac{kn(n+1)x}{\rho U_\infty}\right]^{1/(n+1)}$$

Как следует из (2.16), изменение продольной составляющей скорости целиком происходит внутри слоя $0\leqslant y\leqslant y_f(x)$.

Нахождение аналитического выражения $\varphi_1(\zeta)$ для произвольных значений n не представляется возможным. Тем не менее такое выражение



Фиг. 2

может быть получено в частном случае $n=2$, когда уравнение (2.9) линейно и имеет вид

$$L_1(\varphi)=\varphi'''+\varphi=0$$

В этом случае при решении задачи (2.9), (2.5), (2.14) можно получить выражение $\varphi_1(\zeta)$

$$(2.17)\qquad \varphi_1(\zeta)=\frac{e^{-\zeta}+2e^{1/2\zeta}\sin(\sqrt{3}/2\zeta-\pi/6)}{-e^{-\zeta_f}+2e^{1/2\zeta_f}\sin(\sqrt{3}/2\zeta_f+\pi/6)}$$

в котором $\zeta=\zeta_f$ должно быть определено из трансцендентного уравнения

$$(2.18)\qquad F_1(\zeta_f)\equiv\cos(\sqrt{3}/2\zeta_f)=-{}^1/_2e^{-3/2\zeta_f}\equiv F_2(\zeta_f)$$

Уравнение (2.18) имеет счетное множество корней, которые можно найти численно или графически (фиг. 2). Однако если исходить из предположения о монотонном изменении x-проекции скорости, то нетрудно показать, что ζ_f соответствует минимальному корню уравнения (2.18), заключенному в интервале $\pi/\sqrt{3}<\zeta_f<4\pi/3\sqrt{3}$. Численное решение уравнения (2.18) определяет значение $\zeta_f=1.8489$.

Из условия $\varphi_1(\zeta_f)=\varphi_2(\zeta_f)$ и (2.17) можно получить выражение константы A_1

$$A_1=-\zeta_f+\frac{e^{-\zeta_f}+2e^{1/2\zeta_f}\sin(\sqrt{3}/2\zeta_f-\pi/6)}{-e^{-\zeta_f}+2e^{1/2\zeta_f}\sin(\sqrt{3}/2\zeta_f+\pi/6)} \tag{2.19}$$

что окончательно определяет обобщенное решение $\varphi(\zeta)$ (2.13) в рассматриваемом случае $n=2$. Соотношения (2.16) и (2.19) определяют x- и y-проекции скорости при $y_f(x)\leqslant y<\infty$, а при $0\leqslant y\leqslant y_f(x)$ их выражения

$$u(x,y)=U_\infty\frac{e^{-\zeta}-2e^{1/2\zeta}\sin(\sqrt{3}/2\zeta+\pi/6)}{e^{-\zeta_f}-2e^{1/2\zeta_f}\sin(\sqrt{3}/2\zeta_f+\pi/6)}$$

$$v(x,y)=\left[\frac{knU_\infty^{2n-1}}{(n+1)^n\rho x^n}\right]^{1/(n+1)}\times$$

$$\times\frac{\zeta[e^{-\zeta}-2e^{1/2\zeta}\sin(\sqrt{3}/2\zeta+\pi/6)]+e^{-\zeta}+2e^{1/2\zeta}\sin(\sqrt{3}/2\zeta-\pi/6)}{e^{-\zeta_f}-2e^{1/2\zeta_f}\sin(\sqrt{3}/2\zeta_f+\pi/6)}$$

3. Аналогичный анализ удается выполнить при рассмотрении других автомодельных задач теории пограничного слоя неньютоновских жидкостей с реологическим законом (1.1). При этом, как и в рассмотренных выше примерах, в случае дилатантных жидкостей всегда обнаруживается пространственная локализация области полного изменения продольной составляющей скорости. Этот факт может быть, например, показан при аналитическом решении задачи о плоской затопленной струе степенной жидкости (1.1).

Действительно, затопленная струя вовлекает в движение жидкость, в которую она истекает, причем жидкость кроме продольной приобретает также поперечную составляющую скорости, направленную к оси струи. С другой стороны, скорость распространения сдвиговых возмущений в дилатантных жидкостях уменьшается по мере удаления от источника возмущений [6], находящегося в затопленной струе на ее оси. Поэтому на определенном расстоянии от оси струи скорость распространения сдвиговых возмущений становится равной поперечной составляющей скорости жидкости. В результате сдвиговые возмущения, связанные с изменением продольной составляющей скорости, могут распространиться лишь на конечное расстояние от оси струи дилатантной жидкости. Опуская соответствующие выкладки, приведем выражения границ области, в которой происходит локализация сдвиговых возмущений

$$\pm y=y_f(x)\equiv\left[\frac{3k^{1/2}n}{(2n-1)^n(n+1)^{n-1}\rho^{1/2}P^{2-n}}\right]^{1/(2n-1)}nB[p;q_1]x^{2/3n}$$

$$P\equiv\left\{\frac{\rho^{(4n-5)/2(2-n)}}{2n-1}\left[\left(\frac{I_0}{2B[p;q_2]}\right)^{2n-1}\frac{3(n+1)^{3n-1}}{k^{(5n-4)/2(2-n)}n^{2(n-1)}}\right]^{1/n}\right\}^{1/3}$$

$$p=\frac{n}{n+1},\qquad q_1=\frac{n-1}{2n-1},\qquad q_2=\frac{3n-1}{2n-1}$$

Здесь ось x совпадает с осью струи; I_0 – ее сохраняющийся продольный импульс; $B[p,q]$ – бета-функция [9].

Так как $B[p,q\to0)\to\infty$, то при $n\to1$ $y_f(x)\to\infty$. Нетрудно убедиться в справедливости предельного перехода к «предельной дилатантной» жидкости [2] ($n\to\infty$: $y_f(x)\to\to0$), когда бьющая из щели струя движется через покоящуюся среду, как твердый стержень через идеальную жидкость.

Отметим, что в известных работах, посвященных решению задачи о плоской затопленной струе степенной жидкости (их полный обзор содержится в монографиях [1, 2]), аналитическое решение в случае $n>1$ не было получено, поэтому там не мог быть получен вывод о пространственной локализации области изменения продольной составляющей скорости в случае дилатантных жидкостей.

Факт локализации области изменения продольной составляющей скорости в пограничных слоях дилатантных жидкостей подобен факту существования фронтовых решений типа тепловых волн в теории нелинейной теплопроводности [10]. В обоих случаях соответствующие процессы описываются нелинейными уравнениями (системами) параболического типа, обобщенные решения которых содержат поверхность слабого разрыва – фронт, на котором константное решение сшивается с переменным. В теории нелинейной теплопроводности имеет место связь между решениями типа тепловых волн и существованием особых решений соответствующих дифференциальных уравнений [11]. При рассмотрении решений автомодельных задач теории пограничного слоя дилатантных жидкостей, имеющих обобщенные решения, аналогичная связь также прослеживается.

Поступила 26 VII 1977

ЛИТЕРАТУРА

1. *Шульман З. П., Берковский Б. М.* Пограничный слой неньютоновских жидкостей. Минск, «Наука и техника», 1966.
2. *Шульман З. П.* Конвективный тепломассоперенос реологически сложных жидкостей. М., «Энергия», 1975.
3. *Рейнер М.* Реология. М., «Наука», 1965.
4. *Лойцянский Л. Г.* Ламинарный пограничный слой. М., Физматгиз, 1962.
5. *Матвеев Н. М.* Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. М., «Высшая школа», 1967.
6. *Павлов К. Б.* О магнитогидродинамическом течении несжимаемой вязкой жидкости, вызванном деформацией плоской поверхности. Магнитная гидродинамика, 1974, № 4.
7. *Мартинсон Л. К., Павлов К. Б.* Сдвиговые течения жидкости со степенным реологическим законом при наличии постоянной поперечной составляющей скорости. Изв. АН СССР, МЖГ, 1973, № 4.
8. *Мартинсон Л. К., Павлов К. Б.* Нестационарные сдвиговые течения проводящей жидкости со степенным реологическим законом. Магнитная гидродинамика, 1971, № 2.
9. *Берковский Б. М.* Одно точное решение уравнений пограничного слоя. Докл. АН БССР, 1965, т. 9, № 1.
10. *Зельдович Я. Б., Компанеец А. С.* К теории распространения тепла при теплопроводности, зависящей от температуры. Сборник, посвященный 70-летию акад. А. Ф. Иоффе. М., Изд-во АН СССР, 1958.
11. *Павлов К. Б.* Пространственная локализация тепловых возмущений при нагревании сред с объемным поглощением тепла. ПМТФ, 1973, № 5.