

Из расчета второго варианта течения по методу слоистой гидравлики следует, что на срезе сопла удельный импульс потока с неоднородными распределениями полных параметров меньше удельного импульса однородного одномерного потока на 1%, тогда как двумерный расчет дает значение удельного импульса газа на 2% меньше, чем значение удельного импульса однородного двумерного потока.

На фиг. 3 изображены линии  $M = \text{const}$  третьего варианта течения. Кривые, отмеченные на фиг. 3 цифрами 1-12, отвечают значениям  $M = 0.45, 0.64, 0.83, 1.03, 1.61, 1.80, 0.25, 0.45, 0.64, 0.83, 1.03, 1.41, 1.61$ .

В результате двумерного расчета третьего варианта получено значение расхода газа через сопло, равное 1.02. Из сравнения результатов двумерных расчетов второго и третьего вариантов следует, что расход газа через сопло во втором варианте на 5% больше, чем в третьем. Этот результат объясняется тем, что во втором рассчитанном варианте течения в сечении минимальной площади сопла плотность потока массы в струе газа, текущей у оси, в 1.5 раза больше, чем плотность потока массы в струе, текущей у стенки, в то время как в третьем варианте реализуется обратная ситуация. Из вышеизложенного можно сделать вывод, что с точки зрения необходимости пропускания наибольшего расхода газа через сопло данной геометрии при заданных  $\Phi_2, S_1, S_2, H_1$  и  $H_2$  второй вариант предпочтительнее третьего.

Однако из сравнения результатов двумерных расчетов следует, что на срезе сопла в случае третьего варианта значение удельного импульса всего потока газа на 6.5% больше, чем во втором варианте. Это связано с тем, что в третьем варианте удельный импульс газа в сечении среза сопла в струе, текущей у оси, больше, чем в струе газа, текущей у стенки, тогда как во втором варианте струя газа с большим удельным импульсом течет у стенки сопла. Следовательно, с точки зрения получения большого удельного импульса третий вариант предпочтительнее второго.

Автор благодарит А. Н. Крайко и Р. К. Тагирова за полезные советы и помощь.

Поступила 20 VII 1977

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Зимонт В. Л. О величине импульса сопла при неравномерных газодинамических параметрах потока. Изв. вузов, Авиац. техн., 1970, № 2.
2. Крайко А. Н., Ланюк А. Н. О влиянии неравномерностей полей полной энтальпии и энтропии на интегральные характеристики сопла Лавала. Изв. АН СССР, МЖГ, 1976, № 3.
3. Теленин Г. Ф., Липницкий Ю. М., Еремин В. В. Расчет вихревых течений в соплах. Науч. тр. Ин-та механ. МГУ, 1975, № 41.
4. Курочкина Н. Я., Тагиров Р. К. К расчету сверхзвуковой перерасширенной струи идеального газа, истекающей в спутный трансзвуковой поток. Изв. АН СССР, МЖГ, 1976, № 4.
5. Тагиров Р. К. Усовершенствование метода расчета трансзвукового обтекания тел вращения. Уч. зап. ЦАГИ, 1975, т. 6, № 6.

УДК 534.2

### НЕЛИНЕЙНЫЕ ВОЛНОВЫЕ ЯВЛЕНИЯ В ЗАКРЫТОЙ ТРУБЕ

Г. Е. ДУМНОВ, Г. Ф. ТЕЛЕНИН

(Москва)

В связи с возникновением колебаний в резонаторах, помещенных в движущийся поток, рассматривается задача о колебаниях газа в замкнутой полости, возбуждаемых синусоидально-колеблющимся поршнем. Из решения задачи во втором приближении для малых амплитуд колебаний найден подогрев газа в области частот вблизи частоты линейного резонанса за счет появления ударных волн и показано, что система асимптотически выходит из этой области частот. Приведено численное решение задачи, подтверждающее эти соотношения, из которого получен подогрев для больших амплитуд колебаний поршня. Рассчитанные величины колебаний давления на закрытом конце полости сравнивались по форме и амплитуде с экспериментальными данными.

Краевая задача о колебаниях газа в закрытой полости допускает классическую постановку ( $v=0$  на закрытом конце и  $v=l\omega \cos(\omega t)$  на движущемся поршне, где

$v$  — скорость газа,  $t$  — время,  $l$  и  $\omega$  — амплитуда и частота колебаний соответственно) и решается в предположении об одномерности течения в пренебрежении эффектами вязкости и теплопроводности.

Многократное отражение волн от концов полости создает значительную трудность для полного аналитического решения. Однако, если амплитуда колебаний параметров много меньше своих средних значений, можно использовать метод последовательных приближений. Решение задачи в первом приближении дает хорошо известную стоячую волну  $v=l\omega \cos(\omega t) [\sin(x\omega/a)/\sin(L\omega/a)]$ . Из него определяются резонансные частоты системы, при которых амплитуды колебаний становятся бесконечно большими.

Учитывая нелинейные эффекты во втором приближении, Честер в [1] получил, что в области частот (назовем ее резонансной областью) вблизи линейного резонанса, определяемой соотношением

$$\frac{\Delta\omega}{\omega} = \frac{2}{\pi} [(\gamma+1)l_0]^{1/2}$$

(здесь  $l_0=l/L$  — безразмерная амплитуда колебания поршня,  $\gamma$  — показатель адиабаты,  $L$  — длина трубы) задача не имеет непрерывного решения.

Этот факт трактовался в [1] как появление ударных волн, движущихся в полости. Из работы [1] можно определить перепад давления в скачке, отнесенный к среднему давлению

$$(1) \quad \Delta p = 2\gamma[\varepsilon(1-r^2)]^{1/2}, \quad \varepsilon = 4l_0/(\gamma+1), \quad r = \pi(\pi - B_0)/[(\gamma+1)B_0e^{1/2}]$$

Здесь  $B_0 = \omega L/a$  — безразмерная частота колебаний ( $a$  — средняя скорость звука в газе).

Образование ударных волн приводит к диссипации энергии, что влечет за собой увеличение средней скорости звука и уменьшение безразмерной частоты. Используя определение  $B_0$ , можно получить

$$(2) \quad \frac{1}{B_0} \frac{dB_0}{dt} = - \frac{1}{a} \frac{da}{dt}$$

Полагая среднюю плотность газа постоянной и выражая среднюю скорость звука через полную энтропию системы, соотношение (2) после интегрирования запишем в виде

$$(3) \quad B_0(t) = B_0(0) \exp\{-1/2\Delta S\}$$

Здесь  $\Delta S$  — изменение полной энтропии системы, нормированной на комплекс  $c_v M$  ( $M$  — масса находящегося в полости газа,  $c_v$  — теплоемкость при постоянном объеме).

Из соотношения (3) следует, что если система находится в узкой резонансной области, то  $\Delta S > 0$  и система стремится уменьшить свою безразмерную частоту колебаний и выйти из области резонанса, если  $\Delta S = 0$ , то система не изменит своих средних параметров и будет колебаться при неизменном  $B_0$ .

Выход системы из резонансной области можно характеризовать изменением производной энтропии системы по времени, которую можно представить, учитывая малость перепадов параметров в волне, в виде

$$\frac{d\Delta S}{d\tau} = \frac{\gamma^2 - 1}{12\gamma^2} \frac{B_0(0)}{B_0(\tau)} \Delta p^3$$

Здесь введено безразмерное время  $\tau$ , нормированное на  $L/a(0)$ .

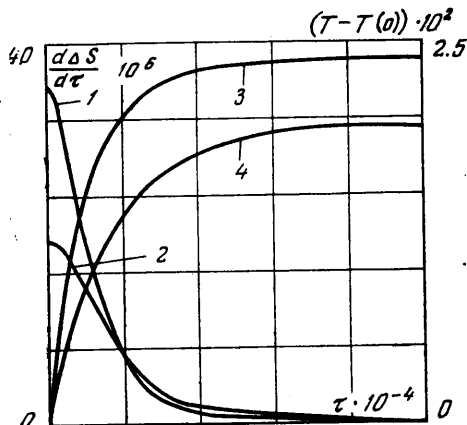
Подставляя в это соотношение выражения (1) и (3), получим уравнение для эволюции  $B_0$

$$\frac{dB_0}{d\tau} = - \frac{8}{3} \frac{\gamma(\gamma-1)}{(\gamma+1)^{1/2}} B_0(0) l_0^{3/2} \left[ 1 - \frac{(\pi - B_0)^2}{4(\gamma+1)l_0} \right]^{1/2}$$

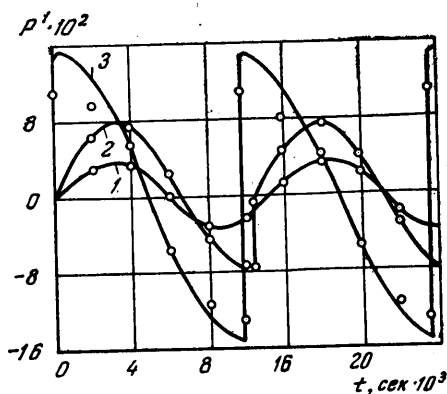
Решение этого уравнения имеет вид

$$B_0 = \pi - 2[(\gamma+1)l_0]^{1/2} (A\tau + c) / [(A\tau + c)^2 + 1]^{1/2}$$

$$A = \frac{4}{3} \frac{\gamma(\gamma-1)}{(\gamma+1)^{1/2}} B_0(0) l_0, \quad C = \operatorname{tg} \eta, \quad \operatorname{in} \eta = \frac{\pi - B_0(0)}{2[(\gamma+1)l_0]^{1/2}}$$



Фиг. 1



Фиг. 2

Теперь легко находятся выражения для определения изменения по времени остальных средних характеристик газа

$$(4) \quad \frac{d\Delta S}{d\tau} = \frac{16}{3} \frac{\gamma(\gamma-1)}{(\gamma+1)^{1/2}} \frac{B_0(0)}{\pi} l_0^{1/2} \left/ \left\{ [(A\tau+C)^2 + 1]^{1/2} - \frac{2}{\pi} [(\gamma+1)l_0]^{1/2} (A\tau+C) [(A\tau+C)^2 + 1] \right\} \right.$$

$$(5) \quad \Delta S = -2 \ln \left\{ \frac{\pi}{B_0(0)} - \frac{2[(\gamma+1)l_0]^{1/2}}{B_0(0)} \frac{A\tau+C}{[(A\tau+C)^2 + 1]^{1/2}} \right\}$$

$$(6) \quad T_0(\tau) = T_0(0) \left\{ \frac{\pi}{B_0(0)} - \frac{2[(\gamma+1)l_0]^{1/2}}{B_0(0)} \frac{A\tau+C}{[(A\tau+C)^2 + 1]^{1/2}} \right\}^{-2}$$

Из полученных соотношений видно, что система асимптотически стремится выйти из области разрывных решений. На фиг. 1 приведены графики зависимостей (4), (6). Кривые 1 и 2 изображают изменения производной энтропии для  $l_0 = 4 \cdot 10^{-4}$  и  $l_0 = 2.5 \cdot 10^{-4}$ , а кривые 3 и 4 — прирост средней температуры для  $l_0 = 4 \cdot 10^{-4}$  и  $l_0 = 2.5 \cdot 10^{-4}$ .

Устремляя  $\tau$  к бесконечности, можно получить предельное изменение полной энтропии газа и его предельную среднюю температуру после выхода системы из резонансной области

$$\Delta S_* = -2 \ln \left\{ \frac{\pi - 2[(\gamma+1)l_0]^{1/2}}{B_0(0)} \right\}, \quad T_{0*} = T_0(0) \left\{ \frac{\pi - 2[(\gamma+1)l_0]^{1/2}}{B_0(0)} \right\}^{-2}$$

Интересно отметить, что если непрерывно изменять частоту колебаний поршня, поддерживая систему на одном колебательном режиме ( $B_0 = \text{const}$ ), соответствующем разрывному решению, то можно достаточно быстро разогреть газ, находящийся в резонаторе, до больших температур

$$T_0(\tau) = T_0(0) \exp \left\{ \frac{16}{3} \frac{\gamma(\gamma-1)}{(\gamma+1)^{1/2}} l_0^{1/2} \tau \cos^3 \eta \right\}$$

Рассмотренная задача в одномерной постановке решалась численно с использованием разностной схемы, имеющей третий порядок точности по координате и по времени (алгоритм этой схемы можно найти в [2]). Поскольку разностная схема имеет повышенный порядок точности, при расчете краевых задач возникает необходимость в продолжении параметров за границу области интегрирования. В работе

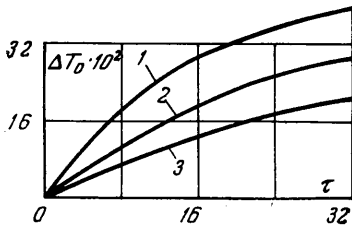
принято следующее продолжение за твердую границу:

$$p_- = p_+ - 2\Delta x \rho_1 (1 + \varphi) \frac{d^2 \varphi}{dt^2}, \quad u_- = 2 \frac{d\varphi}{dt} - u_+, \quad S_- = S_+$$

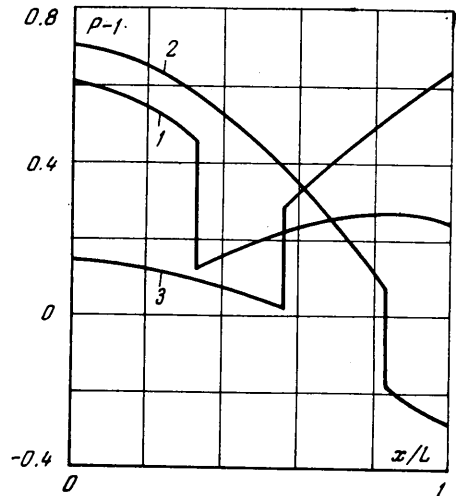
Здесь  $u$  — скорость,  $\varphi$  — закон движения твердой поверхности,  $\Delta x$  — шаг по  $x$ , индекс 1 обозначает величины на границе, а «минус» и «плюс» — слева и справа от нее,  $S$  — энтропия единицы массы.

Расчеты подтвердили существование резонансной области, т. е. области частот, в которой возникают ударные волны, и при малых амплитудах колебания поршня показали хорошее совпадение относительных перепадов давления в скачке с соотношением (1).

В [3] приведены экспериментальные данные, с которыми сравнивалось полученное численное решение. Результаты сравнения колебаний давления на закрытом конце трубы приведены на фиг. 2 (линия — расчет, точки — эксперимент; 1—3 —  $B_0 = 2.75, 2.92, 3.13$ ). Видно, что форма волн полностью идентична, однако амплитуда колебаний давления в режиме линейного резонанса в расчетах несколько превышает экспериментальное значение. Это различие объясняется наличием в реальных условиях



Фиг. 3



Фиг. 4

пограничного слоя, существенного для длинных тонких труб, неучтенного при численном решении задачи. Приближенный учет пограничного слоя приведен в [1].

На фиг. 3 показано увеличение средней температуры газа для различных значений  $l_0$  при  $B_0(0) = \pi$  (1—3 —  $l_0 = 7.95 \cdot 10^{-2}, 4.75 \cdot 10^{-2}, 3.2 \cdot 10^{-2}$ ). Распределение относительного давления по длине трубы показано на фиг. 4. Это дает наглядное представление о движении волн (1—3 —  $\tau = 0, 0.54, 1.08$ ).

Поступила 22 IX 1977

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Chester W., Resonant oscillations in closed tubes. J. Fluid. Mech., 1964, vol. 18, pt 1.
2. Балакин В. Б. О методах типа Рунге — Кутты для газовой динамики. Ж. вычислит. матем. и матем. физ., 1970, т. 10, № 6.
3. Merkli P., Thomann H. Thermoacoustic effects in a resonance tube. J. Fluid Mech., 1975, vol. 70, pt 1.

Технический редактор Е. В. Синицына

Сдано в набор 17.03.78 Подписано к печати 29.05.78 Т-00373 Формат бумаги 70×108<sup>1/16</sup>  
Высокая печать Усл. печ. л. 15,4 Уч.-изд. л. 17,0 Бум. л. 5,5 Тираж 1970 экз. Зак. 294

Издательство «Наука». 103717, Москва, Подсосенский пер., 21  
2-я типография издательства «Наука», 121099 Москва, Шубинский пер., 10