

ния, содержащей участок максимальной кривизны стенки, с последующим измельчением расчетной сетки [7]. Выделяемая область II показана в нижней части фиг. 3 вертикальными линиями. Была взята сетка 16×17 и проведен расчет течения для этой области. Полученные распределения давления вдоль оси симметрии (p_-) и вдоль стенки (p_+) показаны на фиг. 3. В результате расчета найдены также коэффициент расхода $\mu=0.982$ и коэффициент тяги $R=0.958$. Видно, что при расчете с выделением области течения локальные и интегральные характеристики сопла удовлетворительно согласуются с экспериментом. В нижней части фиг. 3 показаны линии, соответствующие числам $M=0.6, 1$ и 1.6 . Они также удовлетворительно согласуются с экспериментальными данными [4].

С помощью предложенного метода [7] можно исследовать также течение в сопле, состоящем из конической сужающейся части и конической расширяющейся части и имеющем точку излома в критическом сечении. Были исследованы два сопла, имеющие $\alpha_1=30^\circ$, $y_A=0.658$, $l_1=0.4$, $l_2=0.592$, $l_3=1.1$, $\pi=5$ и отличающиеся значением угла наклона стенки сверхзвуковой части. Одно сопло имело $\alpha_2=2^\circ$ (фиг. 4), второе — $\alpha_2=4^\circ$. В верхней части фиг. 4 показаны контуры сопла (кривая 2), в нижней части — полученные в результате расчета распределения давления вдоль стенки. При этом для случая $\alpha_2=2^\circ$ расчеты были проведены для областей I, II, III с сетками 19×15 , 16×18 , 12×23 соответственно. При расчете в области II было найдено $\mu=0.932$, в области III — $\mu=0.938$. Линейная экстраполяция [7] по этим двум значениям на нулевой размер ячейки ($h=0$) определяет окончательную величину $\mu=0.943$. Это значение приблизительно согласуется с максимальным значением коэффициента расхода для конического сужающегося сопла с $\alpha_1=30^\circ$ [11]. Для случая $\alpha_2=4^\circ$ расчет был проведен только для области I с сеткой 19×15 (кривая 1 на фиг. 4).

Поступила 26 VII 1977

ЛИТЕРАТУРА

1. Годунов С. К., Забродин А. В., Иванов М. Я., Крайко А. Н., Прокопов Г. Н. Численное решение многомерных задач газовой динамики. М., «Наука», 1976.
2. Иванов М. Я., Крайко А. Н. Численное решение прямой задачи о смешанном течении в соплах. Изв. АН СССР, МЖГ, 1969, № 5.
3. Лаваль П. Нестационарный метод расчета трансзвуковых течений в соплах. В сб. «Численные методы в механике жидкостей». М., «Мир», 1973.
4. Cline M. C. Computation of steady nozzle flow by a time-dependent method. AIAA Journal, 1974, vol. 12, No. 4.
5. Brown E. F., Hamilton G. L. Survey of methods for exhaust-nozzle flow analysis. AIAA paper, 1975, No. 60.
6. Иванов М. Я., Ланюк А. Н. К расчету сверхзвуковой перерасширенной струи идеального газа при наличии в потоке диска Маха. Уч. зап. ЦАГИ, 1973, т. 4, № 4.
7. Тагиров Р. К. Теоретическое исследование течения идеального газа в сужающихся соплах. Изв. АН СССР, МЖГ, 1978, № 2.
8. Le Fur V. Etude des tuyères convergentes-divergentes de sortie avec écoulement externe supersonique. Techn. et sci Aéronaut., 1958, № 4.
9. Авдучевский В. С. Метод расчета пространственного турбулентного пограничного слоя в сжимаемом газе. Изв. АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение, 1962, № 4.
10. Тагиров Р. К. Трансзвуковое обтекание тела вращения при истечении реактивной струи из его кормовой части. Изв. АН СССР, МЖГ, 1974, № 2.
11. Fenain M., Dutouquet L., Solignac J. L. Calcul des performances d'une tuyère propulsive convergente. Comparaison avec l'expérience. Recherche Aéronautique, 1974, № 5.

УДК 533.6.011:538.4

ОБ ИНТЕГРАЛЕ БЕРНУЛЛИ И СОХРАНЕНИИ ЦИРКУЛЯЦИИ СКОРОСТИ В ПОЛЯРИЗУЮЩЕЙСЯ ИЛИ НАМАГНИЧИВАЮЩЕЙСЯ ЖИДКОСТИ

В. В. ГОРСКИЙ

(Горький)

Рассмотрим непрерывное движение электрически поляризующейся сжимаемой жидкости при отсутствии свободных зарядов, вязкости, тепло- и электропроводности в приближении электрогидродинамики [1]. Будем считать, что электрическая индукция \mathbf{D} и напряженность электрического поля \mathbf{E} связаны соотношением $\mathbf{D}=\varepsilon(\rho, T, E)\mathbf{E}$, где ε , ρ , T — соответственно электрическая проницаемость, плотность и температура жидкости. Важно отметить, что ввиду существования глубокой аналогии все рас-

суждения и выводы работы переносятся также на намагничивающуюся жидкость в приближении феррогидродинамики [1], если формально заменить ϵ , E , D соответственно на μ , H , B — магнитные проницаемость, напряженность и индукцию.

Уравнение импульсов для рассматриваемой поляризующейся жидкости имеет вид [1, 2]

$$(1) \quad \rho \frac{dv}{dt} = -\nabla p + \frac{\epsilon}{8\pi} \nabla E^2 - \rho \nabla G, \quad p = p_0 + \frac{1}{4\pi} \int_0^E \left[\epsilon - \rho \left(\frac{\partial \epsilon}{\partial \rho} \right)_{T,E} \right] E dE$$

где v , p — скорость и давление жидкости, p_0 — давление в отсутствие поля, G — потенциал массовых сил. Учитывая влияние поля и $\epsilon = \epsilon(\rho, T, E)$, легко обобщается [3, 4] известное термодинамическое тождество $dw_0 = \rho^{-1} dp_0 + T ds_0$

$$(2) \quad dw = \rho^{-1} dp + T ds + (4\pi)^{-1} E d(\rho^{-1} D)$$

$$w = w_0 + \frac{ED}{4\pi\rho} + \frac{1}{4\pi\rho} \int_0^E \left[T \left(\frac{\partial \epsilon}{\partial T} \right)_{\rho,E} - \rho \left(\frac{\partial \epsilon}{\partial \rho} \right)_{T,E} \right] E dE,$$

$$s = s_0 + \frac{1}{4\pi\rho} \int_0^E \left(\frac{\partial \epsilon}{\partial T} \right)_{\rho,E} E dE$$

где w , s — энтальпия и энтропия единицы массы; w_0 , s_0 — те же параметры в отсутствие поля. С помощью (2) находим $\nabla p = \rho \nabla w - \rho T \nabla s - (4\pi)^{-1} \rho E_i \nabla(\rho^{-1} D_i)$. Подставим это выражение для ∇p в (1)

$$(3) \quad \frac{dv}{dt} = T \nabla s - \nabla \left(G + w - \frac{ED}{4\pi\rho} \right)$$

С другой стороны, подставив ∇p в уравнение импульсов в форме Громеки — Лемба, получим обобщение уравнения Крокко — Вайоньи [5]

$$(4) \quad \frac{\partial v}{\partial t} - [v \times \Omega] = T \nabla s - \nabla \left(\frac{v^2}{2} + w - \frac{ED}{4\pi\rho} + G \right), \quad \Omega = \text{rot } v$$

Найденные уравнения (3), (4) позволяют сравнительно просто обобщить теорему Кельвина и интегралы Бернулли и Лагранжа — Коши. Действительно, известно, что скорость изменения циркуляции Γ по замкнутому контуру C , движущемуся вместе с жидкостью, равна

$$(5) \quad \frac{d\Gamma}{dt} = \oint_C \frac{dv}{dt} dr = \iint_{\sigma} \text{rot} \left(\frac{dv}{dt} \right) d\sigma$$

Здесь dr — бесконечно малый вектор, имеющий направление касательной к C , а σ — поверхность, ограниченная контуром C . Подставляя сюда выражение ускорения из (3), получаем

$$(6) \quad \frac{d\Gamma}{dt} = \iint_{\sigma} \text{rot}(T \nabla s) d\sigma = \iint_{\sigma} [\nabla T \times \nabla s] d\sigma$$

Таким образом, выражение для $d\Gamma/dt$ получилось по виду таким же, как и в обычной гидродинамике, но с учетом изменения энтропии s (2). Из (6) следует, что циркуляция скорости Γ будет сохраняться постоянной для непрерывного течения, в чем и состоит суть теоремы Кельвина, если выполняется хотя бы одно из следующих трех условий: $T = \text{const}$ — течение изотермическое; $s = \text{const}$ — течение изэнтропическое; $\nabla T \parallel \nabla s$. Последнее условие выполняется, в частности, для движений, обладающих свойством одномерной, или цилиндрической, или сферической симметрии.

Условие баротропности $p = p(\rho)$ в отличие от обычной гидродинамики не ведет к выполнению теоремы Кельвина, и в частном случае несжимаемой жидкости $\rho = \text{const}$ циркуляция скорости, вообще говоря, не сохраняется. Исследуем подробнее этот последний случай. Используя выражение силы, приходящейся на единицу массы, $f \rho^{-1} = [(8\pi)^{-1} \epsilon \nabla E^2 - \nabla p - \rho \nabla G] \rho^{-1}$, имеем при $\rho = \text{const}$

$$\text{rot} \left(\frac{f}{\rho} \right) = \frac{1}{8\pi\rho} \text{rot}(\epsilon \nabla E^2) = \frac{1}{8\pi\rho} [\nabla \epsilon \times \nabla E^2] = \frac{E}{8\pi\rho} \left(\frac{\partial \epsilon}{\partial T} \right)_{\rho,E} [\nabla T \times \nabla E]$$

Тогда отсюда и из (5) следует, что для несжимаемой поляризующейся жидкости теорема Кельвина выполняется при одном из условий: $\partial \epsilon / \partial T = 0$ (и, конечно, при более сильном условии $T = \text{const}$); $E = \text{const}$, $\nabla T \parallel \nabla E$.

Рассмотрим далее с помощью уравнения (4) случаи, когда можно получить обобщенные интегралы Бернулли и Лагранжа — Коши. Так, вдоль любой кривой, например вдоль некоторой линии тока L , параметры T , s связаны между собой, так что существует скалярная функция $\chi(L)$, для которой верно $T(s, L) \nabla s = \nabla \chi(L)$. Учитывая это и умножая (4) при установившемся движении скалярно на v , получаем, что вдоль линии тока L (и вдоль вихревой линии) выполняется обобщенный интеграл Бернулли

$$(7) \quad \frac{v^2}{2} + w - \frac{ED}{4\pi\rho} - \chi(L) + G = \alpha(L)$$

где α — постоянная на L . В частности, для адиабатического установившегося движения ($v \nabla s = 0$) имеем $\chi(L) = \text{const}$ на L , а при $T = T(L) = \text{const}$ на линии тока или вихревой линии $\chi(L) = T(L)s$.

При неустановившемся движении можно получить обобщенный интеграл Лагранжа — Коши, предполагая потенциальность течения ($\text{rot } v = 0$, $v = \nabla \phi$). Действительно, в этом случае из (4) получаем $\text{rot}(T \nabla s) = 0$, т. е. существует такая скалярная функция χ , что $T \nabla s = \nabla \chi$. В итоге имеет место следующий интеграл Лагранжа — Коши:

$$(8) \quad \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{v^2}{2} + w - \frac{ED}{4\pi\rho} - \chi + G = f(t)$$

Здесь $f(t)$ — произвольная функция времени t , одинаковая для всей области потенциального течения.

Заметим, что в частном случае $\epsilon = \epsilon(\rho)$ из (7) и (8) с учетом (2) следуют интегралы, найденные впервые в [6]; а при $\epsilon = \epsilon(\rho, T)$ и адиабатических установившихся условиях из (7) следует интеграл Бернулли, найденный ранее в [7].

В случае установившегося движения при условии $[v \times \text{rot } v] = 0$ из (4) вытекает, что всюду в потоке $T \nabla s = \nabla \chi$, т. е. в интеграле (7) для всего потока $\alpha = \text{const}$. Условие $[v \times \text{rot } v] = 0$ имеет место для безвихревых движений, винтовых движений $v \parallel \text{rot } v$ и для покоящейся жидкости $v = 0$. В последнем случае $v = 0$ интеграл Бернулли является условием равновесия жидкости. В частности, если $T = \text{const}$, $G = \text{const}$, имеем $\chi = Ts + \text{const}$ и (7) имеет вид

$$(9) \quad \xi = \xi_0 - \frac{1}{4\pi} \int_0^E \left(\frac{\partial \epsilon}{\partial \rho} \right)_{T, E} E dE = \text{const}$$

Здесь $\xi_0 = w_0 - Ts_0$ — химический потенциал единицы массы жидкости в отсутствие поля. Условие термодинамического равновесия поляризующейся жидкости можно получить в еще более простом виде, если пренебречь изменением плотности жидкости под влиянием поля [8]. В результате вместо (9) из уравнения импульсов (1) при $G = \text{const}$ получаем условие [8]

$$(10) \quad p_0 - \frac{\rho}{4\pi} \int_0^E \left(\frac{\partial \epsilon}{\partial \rho} \right)_{T, E} E dE = \text{const}$$

Разумеется, уравнения (9), (10) переходят при $(\partial \epsilon / \partial E)_{\rho, T} = 0$ в условия [8].

Важно также получить интегралы Бернулли и Лагранжа — Коши для несжимаемой жидкости $\rho = \text{const}$. Проще найти их непосредственно из уравнения (1). При этом возможны два случая: 1) $\epsilon = \epsilon(T, E)$, $\partial \epsilon / \partial \rho = 0$; 2) $\epsilon = \epsilon(\rho, T, E)$, $\partial \epsilon / \partial \rho \neq 0$, что соответствует жидкому коллоиду, проницаемость которого зависит от числа поляризующихся взвешенных частиц (аналогично феррожидкости).

В первом случае $\rho = \text{const}$, $\partial \epsilon / \partial \rho = 0$ уравнение (1) принимает вид

$$(11) \quad \rho \frac{dv}{dt} = -\nabla \left(p_0 + \frac{1}{4\pi} \int_0^E \epsilon E dE \right) + \frac{\epsilon(T, E)}{8\pi} \nabla E^2 - \rho \nabla G = f$$

Правда, при произвольном виде функции $\epsilon = \epsilon(T, E)$ искомые интегралы получить не удастся, так как нельзя представить $\epsilon(T, E) \nabla E^2$ в форме градиента скалярной функции. Поэтому рассмотрим частные случаи зависимости $\epsilon = \epsilon(T, E)$.

а) $\epsilon = \epsilon(E)$, что возможно при $T = T(E)$ или $\partial \epsilon / \partial T = 0$. Но тогда $\epsilon(E) \nabla E^2$ равно градиенту интеграла (в пределах от 0 до E) от $2\epsilon E dE$, и при известных предположениях гидродинамики получаются обычные интегралы Бернулли и Лагранжа —

Коши для несжимаемой жидкости. В результате создается обманчивое представление, что в этом случае электромагнитное поле не оказывает влияния на движение и равновесие жидкости. На самом же деле здесь эффекты поляризации и намагничивания проявляются в основном на границе данной жидкости-диэлектрика (магнетика) с внешней средой.

Так, на поверхности раздела двух несмешивающихся изотропных диэлектриков, приравнивая нормальные к этой поверхности составляющие сил [3], имеем при $\varepsilon = \varepsilon(E)$

$$(12) \quad \left\{ p_0 - \frac{1}{4\pi} \varepsilon E_n^2 + \frac{1}{4\pi} \int_0^E \varepsilon E dE \right\} = 0$$

где обозначение $\{E\}$ определяет скачок величины E при переходе через поверхность раздела. Для простоты здесь не рассмотрено поверхностное натяжение, которое при необходимости можно легко учесть.

Предположим далее, что граница между жидкостями является свободной поверхностью, причем у покоящейся атмосферы $\varepsilon = \text{const}$. Тогда интеграл Бернулли для атмосферы примет вид $p_0 + \rho G = \text{const}$. Вычитая его из обычного интеграла Бернулли для движущейся жидкости и подставляя результат в (12), получаем граничное условие на свободной поверхности

$$(13) \quad \frac{1}{2} \rho v^2 + \{\rho\} G + \frac{1}{4\pi} \left\{ \varepsilon E_n^2 - \int_0^E \varepsilon E dE \right\} = \text{const}$$

причем здесь $v^2 = v_\tau^2$, так как $v_n = 0$, (τ , n — касательная и нормаль к поверхности). В частности, это уравнение описывает свойства свободной поверхности покоящейся жидкости ($v = 0$) и горизонтальной струи ($G = gz = \text{const}$, g — ускорение свободного падения, z — вертикальная координата). Таким образом, уравнение (13) в принципе объясняет и известные эксперименты с феррожидкостью [9, 10].

б) $\varepsilon = \varepsilon(T)$. Здесь правая часть уравнения (11) приобретает вид

$$f = -\nabla p_0 - (8\pi)^{-1} [\nabla(\varepsilon E^2) - \varepsilon \nabla E^2] - \rho \nabla G = -\nabla p_0 - (8\pi)^{-1} E^2 \nabla \varepsilon - \rho \nabla G$$

Следовательно, выражение $\rho^{-1} f$ нельзя представить в градиентной форме, кроме простого случая $E = \text{const}$. Поэтому здесь только для $E = \text{const}$ можно получить при обычных предположениях гидродинамики искомые обобщенные интегралы Бернулли и Лагранжа — Коши, которые отличаются от обычных интегралов только на одно слагаемое $(8\pi)^{-1} \varepsilon(T) E^2$.

Во втором случае $\rho = \text{const}$, $\partial \varepsilon / \partial \rho \neq 0$ будем дополнительно предполагать, что $\varepsilon - 1$ пропорционально плотности, т. е. $\varepsilon - 1 = \rho \Phi(T, E)$, где Φ — некоторая функция указанных аргументов. Тогда уравнение (1) запишется в виде

$$\rho \frac{dv}{dt} = -\rho \nabla G - \nabla p_0 + \rho \Phi \nabla \left(\frac{E^2}{8\pi} \right) = -\nabla(\rho G + p_0) + P \nabla E, \quad P = \frac{\varepsilon - 1}{4\pi} E$$

Отсюда следует, что когда $\rho^{-1} P$ зависит только от E или $T = T(E)$, получаются обобщенные интегралы Бернулли и Лагранжа — Коши для поляризующейся жидкости, которые совпадают с аналогичными интегралами для феррожидкости [10] с точностью до замены E на H .

Поступила 1 VII 1977

ЛИТЕРАТУРА

1. Гогосов В. В., Васильева Н. Л., Тактаров Н. Г., Шапошникова Г. А. Уравнения гидродинамики поляризующихся и намагничивающихся многокомпонентных и многофазных сред. Разрывные решения. Исследование разрывных решений со скачком магнитной проницаемости. М., Изд-во МГУ, 1975.
2. Тарапов И. Е. К гидродинамике поляризующихся и намагничивающихся сред. Магнитная гидродинамика, 1972, № 1.
3. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Электродинамика сплошных сред. М., Гостехиздат, 1957.
4. Боа-Те Чу. Термодинамика электропроводных движущихся сред. В сб. «Плазма в магнитном поле и прямое преобразование тепловой энергии в электрическую». М., Атомиздат, 1962.
5. Серрин Дж. Математические основы классической механики жидкости. М., Изд-во иностр. лит., 1963.
6. Седова Г. Л. Простые волны и малые возмущения в намагничивающихся или поляризующихся средах. Изв. АН СССР, МЖГ, 1974, № 6.

7. Горский В. Б. Одномерные течения поляризующегося или намагничивающегося идеального газа. Магнитная гидродинамика, 1977, № 1.
8. Тарапов И. Е. Некоторые вопросы гидростатики намагничивающихся и поляризующихся сред. Изв. АН СССР, МЖГ, 1974, № 5.
9. Розенцвайг Р. Е. Феррогидродинамика. Усп. физ. н., 1967, т. 92, вып. 2.
10. Neuringer I. L., Rosensweig R. E. Ferrohydrodynamics. Phys. Fluids, 1964, vol. 7, No. 12.

УДК 533.6.011.72+538.4

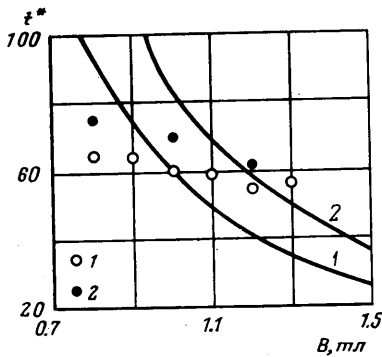
ОБРАЗОВАНИЕ ВТОРИЧНОЙ УДАРНОЙ ВОЛНЫ ПРИ ТОРМОЖЕНИИ СВЕРХЗВУКОВОГО ПОТОКА В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

О. С. ПОПЕЛЬ, О. А. СИНКЕВИЧ, А. Л. ШЕВЧЕНКО

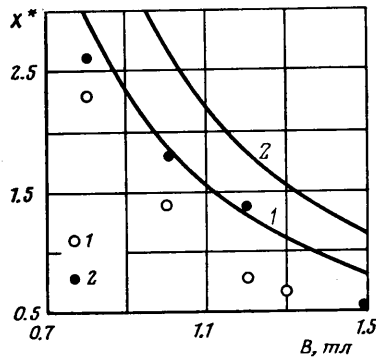
(Москва)

Одним из способов получения высокоэнтальпийных потоков плазмы являются ударные волны. МГД взаимодействие сильных ударных волн с магнитным полем возникает во многих задачах, связанных с преобразованием энергии [1]. В таких задачах необходимо иметь оценки времени и расстояния, на которых первичный поток можно считать однородным.

В [2] одним из авторов были получены расчетные формулы для оценки времени и места образования вторичной ударной волны при входе ударной волны в область



Фиг. 1



Фиг. 2

магнитного поля. Эти оценки найдены из решения задачи о возмущении первоначально однородного течения за счет МГД взаимодействия при достаточно малых величинах параметра взаимодействия, магнитного числа Рейнольдса и параметра Холла.

Полученные в [2] оценки времени и места образования вторичной ударной волны определяются формулами (с учетом исправленных опечаток [2])

$$(1) \quad t^* = \frac{M_1 - 1}{M_1(k-1) [0.5\gamma(\gamma-1)M_1(k-1) - 1]} \tau_\sigma$$

$$(2) \quad X^* = \frac{(M_1 - 1)^2}{2M_1^2(k-1) [0.5\gamma(\gamma-1)M_1(k-1) - 1]} \frac{L}{N}$$

Здесь t^* и X^* — соответственно время и место образования вторичной ударной волны, $\tau_\sigma = \rho_1/\sigma_1 B^2$ — характерное время МГД взаимодействия, $N = \sigma_1 B^2 L / \rho_1 u_1$ — параметр взаимодействия, γ — эффективный показатель адиабаты исследуемого газа, L — характерный размер МГД канала, B — индукция магнитного поля.

Индексом 1 ($M_1, T_1, \rho_1, u_1, \sigma_1$) отмечены параметры однородного ударно-нагретого потока плазмы (число Маха, температура, плотность, скорость, электропроводность), которые определяются из соотношений Ренкина — Гюгонно на фронте