С учетом (10) находим оригинал функции (9), используя теорему о вычетах

$$Q_-(\tau,\beta_0)=\frac{\Phi(\varepsilon)}{\beta_0}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\exp(s_k\tau)}{s_k(s_k-\varepsilon)\,\Phi(s_k)}\qquad\left(\Phi(z_k)=\prod_{m=1}^{\infty}\frac{2m-1}{2m}\,\frac{z_k+r_m}{z_k+s_m}\right)$$

Далее для (4) получим

$$F(\lambda,\beta)=-\frac{i\Phi(\varepsilon)\operatorname{sh} q\beta}{(\lambda+i\varepsilon)\varphi_-(\lambda)\operatorname{sh} q\beta_0}\tag{11}$$

Из (11) решение задачи (2) записывается в форме

$$Q(\tau,\beta)=\frac{1}{\beta_0}\left[\beta\exp(\varepsilon\tau)+\frac{\pi\Phi(\varepsilon)}{\beta_0}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{k\Phi(r_k)\exp(-r_k\tau)}{r_k(r_k+\varepsilon)}\sin\frac{k\pi\beta}{\beta_0}\right]\quad(\tau>0)\tag{12}$$

$$Q(\tau,\beta)=\frac{\Phi(\varepsilon)}{\beta_0}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{\exp(s_k\tau)}{s_k(s_k-\varepsilon)\,\Phi(s_k)}\sin\frac{(2k-1)\pi\beta}{2\beta_0}\quad(\tau<0)\tag{13}$$

Скорость v_0, определяющая поле размерных скоростей в области фильтрации, находится интегрированием соотношения [5]

$$dx^*=-\frac{M}{v_0d}\left[\frac{1}{\chi}\exp(-\sqrt{n+1}\,\tau)\cos\beta\,dp^*+\exp\left(-\frac{\tau}{\sqrt{n+1}}\right)\sin\beta\,d\psi^*\right]$$

по τ от ∞ до 0 с использованием (1), представления $Q(\tau,\beta)$, (12). Привлекая теорему о вычетах, находим

$$v_0=\frac{M}{v_0d}\left[1+\frac{\pi^2\Phi(\varepsilon)}{\beta_0^2\sqrt{n+1}}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k^2\Phi(r_k)}{r_k(r_k+\varepsilon)(r_k+\eta)}\right]\tag{14}$$

где $x^*=x/d$, $\eta=(n+2)/2\sqrt{n+1}$.

Зависимости (12) – (14) позволяют получить в клиновидной области распределение давления от источника к поверхности высачивания, построить изобарические поверхности, семейство линий тока и линий равного потенциала.

График зависимости $Q_-(\tau,\beta_0)$ от $-\tau$ для квадратичной фильтрации при $\beta_0=\pi/3$ приведен на фиг. 2.

Поступила 31 III 1977

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бернадинер М. Г., Ентов В. М.* Некоторые точные решения плоских задач фильтрации с предельным градиентом. Изв. АН СССР, МЖГ, 1970, № 2.
2. *Ентов В. М.* Решение задачи фильтрации с предельным градиентом в случае неоднолистности отображения. Изв. АН СССР, МЖГ, 1972, № 1.
3. *Христианович С. А.* Движение грунтовых вод, не следующее закону Дарси. ПММ, 1940, т. 4, вып. 1.
4. *Воронин В. И., Фалеев В. В.* О степенной фильтрации жидкости при наличии источника. Изв. АН СССР, МЖГ, 1973, № 5.
5. *Нобл Б.* Применение метода Винера – Хопфа для решения дифференциальных уравнений в частных производных. М., Изд-во иностр. лит., 1962.

УДК 532.546.532.72

МИГРАЦИЯ СОЛЕЙ В ПОРИСТОЙ СРЕДЕ С УЧЕТОМ ИХ КРИСТАЛЛИЗАЦИИ

Н. П. КУРАНОВ

(*Астрахань*)

Рассмотрена задача засоления образца пористой среды при восходящем фильтрационном потоке с учетом кристаллизации солей на стенках пор [1, 2]. Решения найдены методами составных разложений и сращивания асимптотических разложений [3–5].

Пусть в момент $t=0$ образец пористой среды с областью фильтрации $0\leqslant z\leqslant l(t)$ содержит раствор концентрацией $c_0(z)\leqslant c_*$, где c_* – концентрация предельного насыщения. Тогда при восходящем фильтрационном потоке со скоростью $u(t)$ (*м/сутки*) происходит засоление образца до c_* на его входе (первая стадия засоления) с последующим выпадением солей в виде кристаллов на стенки пор в некоторой зоне $0\leqslant z\leqslant z_*(t)$; $z_*(t)$ – граница кристаллизации. В этой зоне кристаллизации $c(z, t)\geqslant c_*$ (вторая стадия засоления).

В одномерном случае процесс засоления образца описывается следующей краевой задачей:

$$t<t_*,\quad D\frac{\partial^2 c}{\partial z^2}+u\frac{\partial c}{\partial z}=m\frac{\partial c}{\partial t},\quad D\frac{\partial c(0,t)}{\partial z}+uc(0,t)=0,\quad c(l,t)=c_1 \tag{0.1}$$

$$t\geqslant t_*,\quad z\leqslant z_*(t),\quad D\frac{\partial^2 c_+}{\partial z^2}+u\frac{\partial c_+}{\partial z}-\frac{\partial b}{\partial t}=m\frac{\partial c_+}{\partial t},\quad \frac{\partial b}{\partial t}=-\gamma(c_*-c_+) \tag{0.2}$$

$$z_*\leqslant z\leqslant l(t),\quad D\frac{\partial^2 c_-}{\partial z^2}+u\frac{\partial c_-}{\partial z}=m\frac{\partial c_-}{\partial t},\quad z_*(t_*)=0$$

$$D\frac{\partial c_+(0,t)}{\partial z}+uc_+(0,t)=0,\quad c_\pm(z_*,t)=c_*,\quad \frac{\partial c_+(z_*,t)}{\partial z}=\frac{\partial c_-(z_*,t)}{\partial z}$$

$$b(z_*,t)=0,\quad c_-(z,t_*)=c(z,t_*),\quad c(z,0)=c_0(z)$$

Здесь $c_\pm(z, t)$ – концентрация раствора соответственно в зонах кристаллизации и засоления, $D=\lambda u$ – коэффициент конвективной диффузии, *м²/сутки*; λ – параметр дисперсии, *м*; $\gamma=\eta u$ – коэффициент растворения (кристаллизация), *сутки*$^{-1}$; η – константа скорости кристаллизации, *м*$^{-1}$; t_* – время окончания первой стадии, *сутки*.

Рассмотрим отдельно задачи (0.1), (0.2) в безразмерных переменных

$$\theta=\frac{c}{c_*},\quad n=\frac{b}{mc_*},\quad \xi=\eta z,\quad \tau=\frac{\eta}{m}\int\limits_0^t u(x)\,dx,\quad h=\eta l,\quad \varepsilon=\lambda\eta \tag{0.3}$$

1. Первая стадия засоления образца ($t<t_*$). Задача (0.1) в обозначениях (0.3) принимает вид

$$\varepsilon\frac{\partial^2\theta}{\partial\xi^2}+\frac{\partial\theta}{\partial\xi}=\frac{\partial\theta}{\partial\tau},\quad \varepsilon\frac{\partial\theta(0,\tau)}{\partial\xi}+\theta(0,\tau)=\theta_1,\quad \theta(\xi,0)=\theta_0(\xi) \tag{1.1}$$

В силу малости коэффициента дисперсии λ параметр $\varepsilon\ll 1$. Однако пренебрежение им в задаче (1.1) приводит к выражению как уравнения, так и граничного условия на входе, поэтому задача (1.1) является задачей особых возмущений [3].

Будем искать ее решение в виде составного разложения по степеням ε

$$\theta(\xi,\tau)=\sum_{i=0}^{\infty}\varepsilon^i a_i(\xi,\tau)+\frac{1}{\varepsilon}\exp\left(-\frac{\xi}{\varepsilon}\right)\sum_{i=0}^{\infty}\varepsilon^i k_i(\xi,\tau) \tag{1.2}$$

Подставляя (1.2) в (1.1) и приравнивая члены при одинаковых степенях ε, получим

$$\frac{\partial a_0}{\partial\tau}-\frac{\partial a_0}{\partial\xi}=0,\quad \frac{\partial a_i}{\partial\tau}-\frac{\partial a_i}{\partial\xi}=\frac{\partial^2 a_{i-1}}{\partial\xi^2} \tag{1.3}$$

$$\frac{\partial k_0}{\partial\tau}+\frac{\partial k_0}{\partial\xi}=0,\quad \frac{\partial k_i}{\partial\tau}+\frac{\partial k_i}{\partial\xi}=\frac{\partial^2 k_{i-1}}{\partial\xi^2} \tag{1.4}$$

$$\frac{\partial k_0(0,\tau)}{\partial\xi}+a_0(0,\tau)=0,\quad \frac{\partial k_i(0,\tau)}{\partial\xi}+a_i(0,\tau)= \tag{1.5}$$

$$=-\frac{\partial a_{i-1}(0,\tau)}{\partial\xi},\quad k_{i-1}(\xi,0)=0,\quad k_{i-1}(h,\tau)=0$$

$$a_0(\xi,0)=\theta_0(\xi),\quad a_i(\xi,0)=0,\quad a_0(h,\tau)=\theta_1,\quad a_i(h,\tau)=0\quad (i=1,2,3,\ldots) \tag{1.6}$$

Решая (1.3) – (1.6) методом характеристик, найдем

$$(1.7)\qquad a_0=\begin{cases}\theta_1 & (h-\tau\leqslant\xi\leqslant h)\\ \theta_0(\xi+\tau) & (0\leqslant\xi<h-\tau)\end{cases},\quad a_i=0\quad (i=1,2,3,\ldots);$$

$$k_0=\begin{cases}\displaystyle\int\limits_0^{\tau-\xi}\theta_0(\xi)\,d\xi & (\xi\leqslant\tau)\\ 0 & (\xi>\tau)\end{cases}$$

Если $\theta_0(\xi)=\theta_0=\mathrm{const}$, то $k_i=0$. При $\theta_0(\xi)\neq\mathrm{const}$ функция $k_i(\xi,\tau)$ определяется из (1.4), (1.5) при конкретном задании функции начального засоления $\theta_0(\xi)$.

Так как $\theta_1>\theta_0(h)$, то на характеристике $\xi=h-\tau$ функция $a_0(\xi;\zeta)$ терпит разрыв, т. е. разложение решения задачи (1.1) в виде (1.2) справедливо всюду, за исключением окрестности характеристики $\xi=h-\tau$. Найдем решение в этой окрестности методом сращивания асимптотических разложений [3–5], вводя внутреннюю переменную $\mu_0=(\xi+\tau-h)/\sqrt{\varepsilon}$. Тогда уравнение (1.1) можно записать в форме

$$(1.8)\qquad \frac{\partial^2\theta}{\partial\mu_0^2}=\frac{\partial\theta}{\partial\tau}$$

Его решение с условиями сращивания $\theta=\theta_1$ при $\mu_0\to\infty$ и $\theta_0=\theta_0(h)$ при $\mu_0\to-\infty$ имеет вид

$$(1.9)\qquad \theta(\mu;\tau)=\theta_1-{}^1/_2(\theta_1-\theta_0(h))\,\mathrm{erfc}\,\varphi_0,\qquad \varphi_0=(\xi+\tau-h)/2\sqrt{\tau\varepsilon}$$

Решение (1.9) справедливо в окрестности $\xi=h-\tau$. Строя из (1.7) и (1.9) методом аддитивного составления [3, 4] одно решение, справедливое во всей области фильтрации и подставляя его в (1.2), получим решение задачи (1.1)

$$(1.10)\qquad \theta(\xi;\tau)=\begin{cases}\theta_0(\xi+\tau)+\dfrac{1}{\varepsilon}\exp\left(-\dfrac{\xi}{\varepsilon}\right)\displaystyle\int\limits_0^{\tau-\xi}\theta_0(\xi)\,d\xi & (\xi\leqslant\tau)\\ \theta_0(\xi+\tau)+0.5[\theta_1-\theta_0(h)]\,\mathrm{erfc}(-\varphi_0) & (\tau<\xi\leqslant h-\tau)\\ \theta_1-0.5[\theta_1-\theta_0(h)]\,\mathrm{erfc}\,\varphi_0 & (h-\tau<\xi\leqslant h)\end{cases}$$

Формула (1.10) справедлива при $dh/d\tau<1$.

При $\theta_0(\xi)=\theta_0=\mathrm{const}$ и $h\to\infty$ из (1.10) имеем

$$(1.11)\qquad \theta=\theta_0[1+(\tau-\xi)/\varepsilon\exp(-\xi/\varepsilon)]\quad(\xi\leqslant\tau),\quad \theta=\theta_0\quad(\xi>\tau)$$

При этих условиях точное решение задачи (1.1) получено в виде

$$(1.12)\qquad \theta/\theta_0=1+0.5\exp(-\xi/\varepsilon)\,[4i^2\,\mathrm{erfc}\,\varphi_2+2\varphi_1 i\,\mathrm{erfc}\,\varphi_2-\exp(\xi/\varepsilon)\,\mathrm{erfc}\,\varphi_1]$$
$$\varphi_{1,2}=(\xi\pm\tau)/2\sqrt{\tau\varepsilon}$$

Различие точного (1.12) и приближенного (1.11) решений не превышает 6% для $\varepsilon<1$ и $\tau>\varepsilon$.

Полагая в (1.10) $\xi=0$ и $\theta(0;\tau)=1$, получим уравнение для определения времени окончания первой стадии τ_*

$$(1.13)\qquad \int\limits_0^{\tau_*}\theta_0(\xi)\,d\xi=\varepsilon[1-\theta_0(\tau_*)],\qquad \theta_0(\xi)=\theta_0=\mathrm{const},\qquad \tau_*=\frac{\varepsilon(1-\theta_0)}{\theta_0}$$

2. Вторая стадия засоления образца $(\tau\geqslant\tau_*)$. Система (0.2) в обозначениях (0.3) принимает вид

$$(2.1)\qquad \varepsilon\frac{\partial^2\theta_+}{\partial\xi^2}+\frac{\partial\theta_+}{\partial\xi}-\theta_+-\frac{\partial\theta_+}{\partial\tau}=-1,\qquad \frac{\partial n}{\partial\tau}=\theta_+-1\qquad (0\leqslant\xi\leqslant\xi_*(\tau))$$

$$\varepsilon\frac{\partial^2\theta_-}{\partial\xi^2}+\frac{\partial\theta_-}{\partial\xi}-\frac{\partial\theta_-}{\partial\tau}=0\qquad (\xi_*(\tau)\leqslant\xi\leqslant h),\qquad \xi_*(\tau_*)=0$$

$$\varepsilon\frac{\partial\theta_+(0,\tau)}{\partial\xi}+\theta_+(0,\tau)=0,\qquad \theta_\pm(\xi_*,\tau)=1$$

$$\frac{\partial\theta_+(\xi_*,\tau)}{\partial\xi}=\frac{\partial\theta_-(\xi_*,\tau)}{\partial\xi},\qquad n(\xi_*,\tau)=0,\qquad \theta_-(\xi,\tau_*)=\theta(\xi,\tau_*)$$

Будем искать решение задачи (2.1) в виде

$$\theta_\pm(\xi,\tau)=\sum_{i=0}^{\infty}\varepsilon^2 a_i^\pm(\xi,\tau)+\frac{1}{\varepsilon}\exp\left(-\frac{\xi}{\varepsilon}\right)\sum_{i=0}^{\infty}\varepsilon^i k_i^\pm(\xi,\tau)\tag{2.2}$$

Тогда для a_i^- и k_i^- получим системы вида (1.3), (1.4), а для a_i^+ и k_i^+ имеем

$$\frac{\partial a_0^+}{\partial\tau}-\frac{\partial a_0^+}{\partial\xi}+a_0^+=1,\qquad \frac{\partial k_0^+}{\partial\tau}+\frac{\partial k_0^+}{\partial\xi}+k_0^+=0\tag{2.3}$$

$$\frac{\partial a_i^+}{\partial\tau}-\frac{\partial a_i^+}{\partial\xi}+a_i^+=\frac{\partial^2 a_{i-1}}{\partial\xi^2},\qquad \frac{\partial k_i^+}{\partial\tau}+\frac{\partial k_i^+}{\partial\xi}+k_i^+=\frac{\partial^2 k_{i-1}^+}{\partial\xi^2}$$

Решение (1.3), (1.4) с условием $\theta_-(\xi,\tau_*)=\theta(\xi,\tau_*)$ и условием (1.6) сохраняет вид (1.7) в области $\xi>\tau-\tau_*$, т. е. если $\xi>\tau-\tau_*$, то форула (1.10) остается справедливой и при $\tau\geqslant\tau_*$.

Решая (2.3) с условиями (1.5) и подставляя в (2.2), получим

$$\theta_+=1+(1/\varepsilon)\exp(-\xi/\varepsilon-\xi)\,[1+\varepsilon(1+\xi)+\ldots]\tag{2.4}$$

Формула (2.4) определяет стационарное решение. Оно может быть получено также, если в уравнении (2.1) положить $\partial\theta_+/\partial\tau=0$ и решить его с условием ограниченности функции $\theta_+(\xi,\tau)$ при $\xi\to\infty$

$$\theta_+=1+(1/\varepsilon\delta)\exp(-\xi/\delta\varepsilon),\qquad \delta=(\sqrt{1+4\varepsilon}-1)/2\varepsilon\tag{2.5}$$

Таким образом ряд в формуле (2.4) сходится к функции $(1/\delta)\exp(-\delta\varepsilon)$. Зависимость (2.5) справедлива в окрестности $\xi=0$. Найденные решения в зонах $0\leqslant\xi\leqslant\leqslant\xi_*(\tau)$ и $\xi_*\leqslant\tau-\tau_*<\xi\leqslant h$, т. е. решения (1.10) и (2.5), терпят разрыв в окрестности $\xi=\xi_*(\tau)$.

Чтобы найти решение в окрестности $\xi=\xi_*(\tau)$, введем внутреннюю переменную $\mu=(\xi-\xi_*)/\varepsilon$. Тогда уравнения для θ_+ и θ_- из (2.1) примут вид

$$\frac{\partial^2\theta_\pm}{\partial\mu^2}+\left(1+\frac{\partial\xi_*}{\partial\tau}\right)\frac{\partial\theta_\pm}{\partial\mu}=\varepsilon\left[\frac{\partial\theta_\pm}{\partial\xi}+p(\theta_+-1)\right]\tag{2.6}$$

Здесь $p=0$ для θ_-, $p=1$ для θ_+.

Решение уравнения (2.6) следует искать с условием $\theta_\pm(0,\tau)=1$ и условиями сращивания с внешними решениями (2.6) и (1.10), т. е.

$$\begin{aligned}&\theta_+(\mu,\tau)=1+(1/\varepsilon\delta)\exp(-\xi_*/\varepsilon-\mu-\delta\xi_*)\,[1-\varepsilon\delta\mu+{}^1/_2\varepsilon^2\delta^2\mu^2+\ldots],\quad \mu\to-\infty\\&\theta_-(\mu,\tau)=\theta_0(\xi_*+\tau)+\varepsilon\mu\theta_0'(\xi_*+\tau)+\ldots+\\&+\frac{1}{\varepsilon}\exp\left(-\frac{\xi_*}{\varepsilon}-\mu\right)\int_0^{\tau-\xi}\theta_0(\xi)\,d\xi+\ldots,\qquad \mu\to\infty\end{aligned}\tag{2.7}$$

Найдем решение задачи (2.6), (2.7) в виде (2.8)

$$\begin{aligned}&\theta_\pm(\mu,\tau)=a_0^\pm(\mu,\tau)+\varepsilon a_1^\pm(\mu,\tau)+\ldots+(1/\varepsilon)\exp(-\xi_*/\varepsilon)\times\\&\times[k_0^\pm(\mu,\tau)+\varepsilon k_1^\pm(\mu,\tau)]\end{aligned}\tag{2.8}$$

Подставляя (2.8) в (2.6) и (2.7) и приравнивая члены при одинаковых степенях ε, получим для первого приближения

$$\begin{aligned}&\frac{\partial^2 a_0^\pm}{\partial\mu^2}+\left(1+\frac{d\xi_*}{d\tau}\right)\frac{\partial a_0^\pm}{\partial\mu}=0\\&\frac{\partial^2 k_0^\pm}{\partial\mu^2}+\left(1+\frac{d\xi_*}{d\tau}\right)\frac{\partial k_0^\pm}{\partial\mu}+\frac{d\xi_*}{d\tau}k_0^\pm=0\\&a_0^\pm(0,\tau)=1,\quad k_0^\pm(0,\tau)=0,\quad a_0^+|_{\mu\to-\infty}=1,\quad a_0^-|_{\mu\to\infty}=\theta_0(\xi_*+\tau)\\&k_0^+|_{\mu\to-\infty}=\frac{1}{\delta}\exp(-\delta\xi_*-\mu),\qquad k_0^-|_{\mu\to\infty}=\int_0^{\tau-\xi_*}\theta_0(\xi)\,d\xi\end{aligned}\tag{2.9}$$

Решая (2.9) и подставляя результат в (2.8), получим

$$\theta_+ = 1 + \frac{1}{\varepsilon\delta}\exp\left(-\frac{\xi}{\varepsilon\delta} - \mu\right)\left[1 - \exp\left(1 - \frac{d\xi_*}{d\tau}\right)\mu\right]$$

$$(2.10)\qquad \theta_- = \theta_0(\xi_*+\tau) + [1-\theta_0(\xi_*+\tau)]\exp - \left(1 + \frac{d\xi_*}{d\tau}\right)\mu +$$

$$+\frac{1}{\varepsilon}\exp\left(-\frac{\xi_*}{\varepsilon} - \mu\right)\int\limits_0^{\tau-\xi_*}\theta(\xi)d\xi\left[1-\exp\left(1-\frac{d\xi_*}{d\tau}\right)\mu\right]$$

Строя из (2.5), (1.10) методом аддитивного составления общее решение, получим

$$(2.11)\qquad \theta = \begin{cases} 1 + \dfrac{1}{\delta\varepsilon}\left[\exp\left(-\dfrac{\xi}{\delta\varepsilon}\right) - \exp\left(-\dfrac{\xi_*}{\delta\varepsilon} - \dfrac{d\xi_*}{d\tau}\dfrac{\xi-\xi_*}{\varepsilon}\right)\right] & (0\leqslant\xi\leqslant\xi_*(\tau)) \\ \theta_0(\xi+\tau) + \dfrac{1}{\varepsilon}\exp\left(-\dfrac{\xi}{\varepsilon}\right)\displaystyle\int\limits_0^{\tau-\xi}\theta_0(\xi)d\xi + & \\ +[1-\theta_0(\xi_*+\tau)]\exp\left(1+\dfrac{d\xi_*}{d\tau}\right)\dfrac{\xi_*-\xi}{\varepsilon} - & \\ -\dfrac{1}{\varepsilon}\exp\left(-\dfrac{\xi_*}{\varepsilon} - \dfrac{d\xi_*}{d\tau}\dfrac{\xi-\xi_*}{\varepsilon}\right)\displaystyle\int\limits_0^{\tau-\xi_*}\theta_0(\xi)d\xi & (\xi_*<\xi<\tau) \\ (1.10) \qquad (\xi\geqslant\tau) & \end{cases}$$

Здесь функция $\xi_*(\tau)$ находится из (2.10) при условии $\partial\theta_+/\partial\mu = \partial\theta_-/\partial\mu$ при $\mu=0$, т. е. из уравнения

$$(2.12)\qquad \frac{d\xi_*}{d\tau} = \varphi(\xi_*,\tau) = \left\{\int\limits_0^{\tau-\xi_*}\theta_0(\xi)d\xi\exp\left(-\frac{\xi_*}{\delta}\right) - \frac{1}{\delta}\exp\left(-\frac{\xi_*}{\delta\varepsilon}\right) + \right.$$

$$\left. + \varepsilon[1-\theta_0(\xi_*+\tau)]\right\}\left\{\int\limits_0^{\tau-\xi_*}\theta_0(\xi)d\xi\exp\left(-\frac{\xi_*}{\varepsilon}\right) - \right.$$

$$\left. -\frac{1}{\delta}\exp\left(-\frac{\xi_*}{\delta\varepsilon}\right) - \varepsilon[1-\theta_0(\xi_*+\tau)]\right\}^{-1}$$

Интегрируя уравнение кристаллизации $\partial n/\partial\tau = \theta_+ - 1$, получим

$$(2.13)\qquad n = \frac{1}{\delta\varepsilon}\int\limits_{\xi_*^{-1}}^{\tau}\left[\exp\left(-\frac{\xi}{\delta\varepsilon}\right) - \exp\left(-\frac{\xi_*}{\delta\varepsilon}\right) - \frac{d\xi_*}{d\tau}\frac{\xi-\xi_*}{\varepsilon}\right]d\tau$$

Формула (2.13) определяет концентрацию солей в твердой фазе в любой точке зоны кристаллизации в каждый момент времени.

Из (2.12) следует, что $d\xi_*/d\tau<1$ для всех $0<\theta_0(\xi)<1$.

Если $\theta_0(\xi)=\text{const}=1$, то $d\xi_*/d\tau=1$, т. е. $\xi=\tau-\tau_*$ – граница кристаллизации – движется по линейному закону.

В этом случае решение уравнений (2.3) с условиями $a_0^+(\tau-\tau_*;\ \tau)=1$, $a_i^+(\tau-\tau_*;\ \tau)=0$, $k_{i-1}^+(\tau-\tau_*;\ \tau)=0$ и условиями (1.5) на входе приводит к формуле

$$(2.14)\qquad \theta = 1 + \frac{1}{\delta\varepsilon}\left[\exp\left(-\frac{\xi}{\delta\varepsilon}\right) - \exp\left(-\frac{\tau-\tau_*}{\delta\varepsilon}\right)\right] \qquad (0\leqslant\xi\leqslant\tau-\tau_*)$$

Интегрируя уравнение $\partial n/\partial\tau = \theta_+ - 1$, найдем

$$(2.15)\qquad n = \frac{1}{\delta\varepsilon}\exp\left(-\frac{\xi}{\delta\varepsilon}\right)(\tau-\tau_*-\xi) - \delta\varepsilon\left[\exp\left(-\frac{\xi}{\delta\varepsilon}\right) - \exp\left(-\frac{\tau-\tau_*}{\tau\varepsilon}\right)\right]$$

Если при начальном профиле засоления $\theta_0=1$ считать, что зоной кристаллизации является вся область фильтрации, т. е. искать решение уравнения (2.1) для θ_+ во всей области $\xi<\infty$, то точное решение данной задачи в такой постановке может быть найдено в виде

$$\theta=1+\frac{\varepsilon\delta}{2}\exp\left(-\frac{\xi}{\delta\varepsilon}\right)\operatorname{erfc}\frac{\xi-d\tau}{2\sqrt{\varepsilon\tau}}-\frac{\delta}{2}\exp(\delta\xi)\operatorname{erfc}\frac{\xi+d\tau}{2\sqrt{\tau\varepsilon}}-\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)\exp\left(-\frac{\xi}{\varepsilon}-\tau\right)\operatorname{erfc}\frac{\xi-\tau}{2\sqrt{\tau\varepsilon}},\qquad d=\sqrt{1+4\varepsilon}\tag{2.16}$$

При $\xi=0$ и $\tau\to\infty$ точное решение (2.16) и приближенное (2.14) дают $\theta_+(0,\infty)=1+1/\varepsilon\delta=1/\varepsilon\delta^2$, что указывает на эффективность используемых приближенных методов для решения задач рассмотренного типа.

Поступила 22 VI 1977

ЛИТЕРАТУРА

1. *Веригин Н. Н.* Некоторые вопросы химической гидродинамики, представляющие интерес для мелиорации и гидротехники. Изв. АН СССР, ОТН, 1953, № 10.
2. *Веригин Н. Н., Шержуков Б. С.* Диффузия и массообмен при фильтрации жидкостей в пористых средах. В сб. «Развитие исследований по теории фильтрации в СССР (1917–1967)». М., «Наука», 1969.
3. *Ван-Дайк М.* Методы возмущений в механике жидкости. М., «Мир», 1967.
4. *Куранов Н. П., Муфтахов А. Ж., Щербаков А. З.* Растворение и вымыв солей при фильтрации с малыми значениями параметра промывки. Изв. АН СССР, МЖГ, 1975, № 1.
5. *Wooding R. A.* Perturbation analysis of the conation for the transport of dissdved solids through porous media. Journal Hydrology, 16 (1972) (1–15) North-Holland Publ. Company.

УДК 533.6.011

СВЕРХЗВУКОВОЕ ОБТЕКАНИЕ БОЛЬШОГО ТЕЛА В ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОЙ АТМОСФЕРЕ

А. С. КУЦАЕВ

(*Москва*)

Решается задача об осесимметричном сверхзвуковом обтекании большого тела при его движении с постоянной скоростью в экспоненциальной атмосфере. Степень нестационарности набегающего потока характеризуется числом Струхаля. По численному решению для различных чисел Струхаля исследуется отличие обтекания от квазистационарного.

1. Постановка задачи. Задача о нестационарном движении в атмосфере большого тела возникла в связи с известной гипотезой Г. И. Петрова о природе Тунгусского явления 1908 г. Согласно этой гипотезе разрушения в районе катастрофы вызваны головной ударной волной от большого тела малой плотности при его существенно нестационарном торможении в атмосфере.

Как показано в [1], для полета в атмосфере число Струхаля, определенное как отношение характерного времени обтекания $t=R/V_0$ (R – размер тела, V_0 – скорость) к времени изменения скорости тела, имеет порядок отношения плотностей тела и набегающего потока. Поэтому на большой высоте скорость тела будет меняться мало и можно принять ее постоянной.

При движении в атмосфере большого тела можно также говорить о характерном времени изменения параметров в набегающем на тело потоке $T=H/V_0\sin\alpha$, где H – высота однородной атмосферы, α – угол траектории с горизонтом. Если определить число Струхаля как отношение t к T, то получим

$$S=R\sin\alpha/H\tag{1.1}$$

Выражение (1.1) не содержит скорости тела и также определяет условия, при которых обтекание можно считать квазистационарным. Если размер тела сравним с высотой однородной атмосферы и угол входа достаточно велик, будет наблюдаться отличие от квазистационарного режима. Количественную оценку этого отличия можно получить лишь из решения задачи обтекания в нестационарной постановке, что и составляет цель настоящей работы. Задача решается численно с помощью метода Годунова для расчета двумерных нестационарных задач газовой динамики [2].

2. Уравнения и метод решения. Рассмотрим сверхзвуковое осесимметричное обтекание сферы потоком идеального совершенного газа с постоянной скоростью и