УДК 532.546

НЕЛИНЕЙНАЯ ФИЛЬТРАЦИЯ ОТ ИСТОЧНИКА В ПОРИСТОМ КЛИНЕ

В. В. ФАЛЕЕВ

(*Воронеж*)

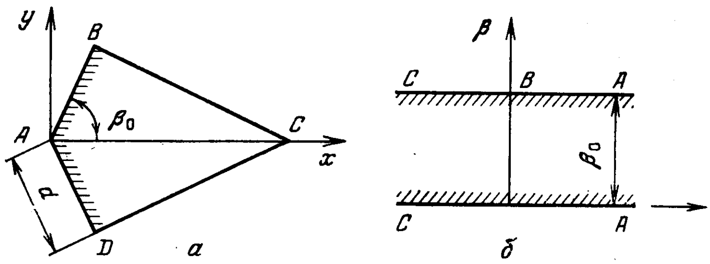
Линеаризующее преобразование годографа применялось при решении плоских задач нелинейной фильтрации с предельным градиентом в [1, 2]. Возможность использования этого метода была впервые отмечена в [3]. В данной работе переход на плоскости годографа скорости фильтрации позволяет свести задачу о течении несжимаемой жидкости в равномерно-пористой среде при степенном законе сопротивления к решению функционального уравнения методом Винера – Хопфа [4].

Степенная фильтрация несжимаемой жидкости в пористой среде при наличии источника описывается системой уравнений [5]

$$\frac{\partial\psi^*}{\partial\beta}=\frac{\sqrt{n+1}}{\chi}\exp(-2\varepsilon\tau)\frac{\partial p^*}{\partial\tau},\qquad \frac{\partial\psi^*}{\partial\tau}=-\frac{\sqrt{n+1}}{\chi}\exp(-2\varepsilon\tau)\frac{\partial p^*}{\partial\beta} \tag{1}$$

$$\left(\chi=\frac{v_0{}^nM}{p_0\alpha},\quad \tau=\sqrt{n+1}\ln\frac{v}{v_0},\quad \varepsilon=\frac{n}{2\sqrt{n+1}}\right)$$

Здесь χ – параметр фильтрации, v_0 – характерная скорость фильтрации, p_0 – характерное давление, α – константа, характеризующая пористую среду и жидкость,



Фиг. 1

$p^*=p/p_0$ – безразмерное давление, $\psi^*=\psi/M$ – безразмерная функция тока, $n+1$ – степень фильтрации (при $n=0$ фильтрация линейная), v – скорость фильтрации, β – угол, составляемый вектором скорости фильтрации с осью x.

Рассмотрим внутреннее течение в клиновидной области, создаваемое источником, который расположен в точке A, интенсивности $2M$ (фиг. 1, *а*). Предположим, что несжимаемая жидкость просачивается в пористой среде в направлении от точечного источника к линиям постоянного давления BC и DC, двигаясь вдоль непроницаемости границ AB и AD.

Область $ABCDA$ разбивается осью симметрии на две симметричные части. Рассмотрим отображение полуклина ABC с углом при вершине B, равным 90°, на плоскость годографа. В переменных τ, β (переменные Чаплыгина) эта область представится в виде бесконечной полосы шириной β_0 (фиг. 1, *б*). На границах полосы величина $Q(\tau,\beta)=\psi^*(\tau,\beta)\exp(\varepsilon\tau)$ принимает следующие значения: на AC $Q=0$, на AB $Q=\exp(\varepsilon\tau)$, на BC $\partial Q/\partial\beta=0$.

В области ABC функция $Q(\tau,\beta)$, удовлетворяющая уравнению Гельмгольца, абсолютно интегрируема по τ от $-\infty$ до ∞. Оценим поведение $Q(\tau,\beta)$ при приближении к точкам $C(\tau=-\infty)$, $A(\tau=\infty)$.

Ввиду конечности $\psi^*(\tau,\beta)$ во всей полосе следует, что $Q(\tau,\beta)$ стремится к нулю по крайней мере как $\exp(\varepsilon\tau)\to0$ при $\tau\to-\infty$, а при $\tau\to\infty$ произведение $Q(\tau,\beta)\cdot\exp(-b\tau)\to0$, где $b>\varepsilon$.

Таким образом, по отношению к функции $Q(\tau,\beta)$ возможно применение преобразования Фурье. Представим $Q(\tau,\beta)$ в виде обобщенных интегралов Фурье

$$Q(\tau,\beta)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\exp(i\lambda\tau)F_-(\lambda,\beta)\,d\lambda+\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty-ib}^{\infty-ib}\exp(i\lambda\tau)F_+(\lambda,\beta)\,d\lambda \tag{2}$$

$$F_-(\lambda,\beta)=\int_{-\infty}^{0}\exp(-i\lambda\xi)Q(\xi,\beta)d\xi,\qquad F_+(\lambda,\beta)=\int_{0}^{\infty}\exp(-i\lambda\xi)Q(\xi,\beta)d\xi$$

где λ – параметр Фурье. При этом в области изображений получим уравнение со следующими граничными условиями:

$$\frac{d^2F}{d\beta^2}-q^2F=0\qquad (q^2=\lambda^2+\varepsilon^2,\ F=F_++F_-)\tag{3}$$

$$F=0\quad(\beta=0),\qquad F=F_-(\lambda,\beta_0)-i/(\lambda+i\varepsilon)\quad(\beta=\beta_0)$$

Решение уравнения (3) примет вид

$$F(\lambda,\beta)=\left[F_-(\lambda,\beta_0)-\frac{i}{\lambda+i\varepsilon}\right]\frac{\operatorname{sh} q\beta}{\operatorname{sh} q\beta_0}\tag{4}$$

Здесь $F_-(\lambda,\beta_0)$ – пока неизвестная функция.

Для отыскания $F_-(\lambda,\beta_0)$ используем условие $\partial Q/\partial\beta=0$, при $\beta=\beta_0$, из которого следует, что

$$\frac{\partial F}{\partial\beta}=\Psi_+(\lambda)\tag{5}$$

где $\Psi_+(\lambda)$ – регулярная функция в нижней полуплоскости комплексной переменной λ. Из соотношений (4) и (5) имеем

$$[F_-(\lambda,\beta_0)-i/(\lambda+i\varepsilon)]q\operatorname{cth} q\beta_0=\Psi_+(\lambda)\tag{6}$$

Для решения функционального уравнения используется метод Винера – Хопфа. Алгебраическая факторизация выражения $K(\lambda)=q\operatorname{cth} q\beta_0=\varphi_+(\lambda)\varphi_-(\lambda)$ определяется функциями

$$\varphi_+(\lambda)=\prod_{k=1}^{\infty}\frac{2k}{2k-1}\frac{\lambda-is_k}{\lambda-ir_k},\qquad \varphi_-(\lambda)=\frac{1}{\beta_0}\prod_{k=1}^{\infty}\frac{2k}{2k-1}\frac{\lambda+is_k}{\lambda+ir_k}\tag{7}$$

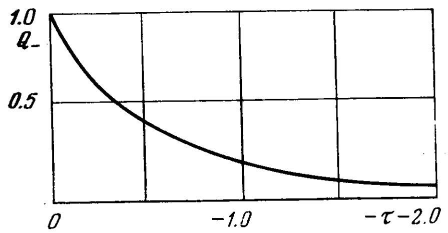
$$s_k=\sqrt{\frac{(2k-1)^2\pi^2}{4\beta_0^2}+\varepsilon^2},\qquad r_k=\sqrt{\frac{k^2\pi^2}{\beta_0^2}+\varepsilon^2}$$

Уравнение (6) с учетом (7) приводится к виду

$$\left[F_-(\lambda,\beta_0)-\frac{i}{\lambda+i\varepsilon}\right]\varphi_-(\lambda)=\frac{\Psi_+(\lambda)}{\varphi_+(\lambda)}\tag{8}$$

Левая и правая части уравнения (8) имеют особенность в точке $\lambda=-i\varepsilon$ в виде полюса первого порядка. Разложение Лорана в этой точке справедливо во всей плоскости λ. Правая часть разложения выражается полиномом, который тождественно равен нулю, поскольку правая часть (8) в нижней полуплоскости при $\lambda\to\infty$ стремится к нулю. В результате находим

$$F_-(\lambda,\beta_0)=\frac{i}{\lambda+i\varepsilon}+\frac{ia}{(\lambda+i\varepsilon)\varphi_-(\lambda)}\tag{9}$$



Фиг. 2

где a – вещественная постоянная – находится из физически очевидного требования конечности $\psi^*(\tau,\beta)$ при $\tau\to-\infty$. Поэтому из (9) можно установить

$$a=-[\varphi_-(-i\varepsilon)]=-\Phi(\varepsilon)\quad\left(\Phi(\varepsilon)=\frac{1}{\beta_0}\prod_{m=1}^{\infty}\frac{2m}{2m-1}\frac{\varepsilon-s_m}{\varepsilon-r_m}\right)\tag{10}$$

С учетом (10) находим оригинал функции (9), используя теорему о вычетах

$$Q_-(\tau,\beta_0)=\frac{\Phi(\varepsilon)}{\beta_0}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\exp(s_k\tau)}{s_k(s_k-\varepsilon)\,\Phi(s_k)}\qquad\left(\Phi(z_k)=\prod_{m=1}^{\infty}\frac{2m-1}{2m}\,\frac{z_k+r_m}{z_k+s_m}\right)$$

Далее для (4) получим

$$F(\lambda,\beta)=-\frac{i\Phi(\varepsilon)\operatorname{sh}q\beta}{(\lambda+i\varepsilon)\varphi_-(\lambda)\operatorname{sh}q\beta_0}\tag{11}$$

Из (11) решение задачи (2) записывается в форме

$$Q(\tau,\beta)=\tag{12}$$

$$=\frac{1}{\beta_0}\left[\beta\exp(\varepsilon\tau)+\frac{\pi\Phi(\varepsilon)}{\beta_0}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{k\Phi(r_k)\exp(-r_k\tau)}{r_k(r_k+\varepsilon)}\sin\frac{k\pi\beta}{\beta_0}\right]\qquad(\tau>0)$$

$$Q(\tau,\beta)=\frac{\Phi(\varepsilon)}{\beta_0}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{\exp(s_k\tau)}{s_k(s_k-\varepsilon)\,\Phi(s_k)}\sin\frac{(2k-1)\pi\beta}{2\beta_0}\qquad(\tau<0)\tag{13}$$

Скорость v_0, определяющая поле размерных скоростей в области фильтрации, находится интегрированием соотношения [5]

$$dx^*=-\frac{M}{v_0d}\left[\frac{1}{\chi}\exp(-\sqrt{n+1}\,\tau)\cos\beta\,dp^*+\exp\left(-\frac{\tau}{\sqrt{n+1}}\right)\sin\beta\,d\psi^*\right]$$

по τ от ∞ до 0 с использованием (1), представления $Q(\tau,\beta)$, (12). Привлекая теорему о вычетах, находим

$$v_0=\frac{M}{v_0d}\left[1+\frac{\pi^2\Phi(\varepsilon)}{\beta_0^2\sqrt{n+1}}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k^2\Phi(r_k)}{r_k(r_k+\varepsilon)\,(r_k+\eta)}\right]\tag{14}$$

где $x^*=x/d$, $\eta=(n+2)/2\sqrt{n+1}$.

Зависимости (12) – (14) позволяют получить в клиновидной области распределение давления от источника к поверхности высачивания, построить изобарические поверхности, семейство линий тока и линий равного потенциала.

График зависимости $Q_-(\tau,\beta_0)$ от $-\tau$ для квадратичной фильтрации при $\beta_0=\pi/3$ приведен на фиг. 2.

Поступила 31 III 1977

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бернадинер М. Г., Ентов В. М.* Некоторые точные решения плоских задач фильтрации с предельным градиентом. Изв. АН СССР, МЖГ, 1970, № 2.
2. *Ентов В. М.* Решение задачи фильтрации с предельным градиентом в случае неоднолистности отображения. Изв. АН СССР, МЖГ, 1972, № 1.
3. *Христианович С. А.* Движение грунтовых вод, не следующее закону Дарси. ПММ, 1940, т. 4, вып. 1.
4. *Воронин В. И., Фалеев В. В.* О степенной фильтрации жидкости при наличии источника. Изв. АН СССР, МЖГ, 1973, № 5.
5. *Нобл Б.* Применение метода Винера – Хопфа для решения дифференциальных уравнений в частных производных. М., Изд-во иностр. лит., 1962.

УДК 532.546.532.72

МИГРАЦИЯ СОЛЕЙ В ПОРИСТОЙ СРЕДЕ С УЧЕТОМ ИХ КРИСТАЛЛИЗАЦИИ

Н. П. КУРАНОВ

(*Астрахань*)

Рассмотрена задача засоления образца пористой среды при восходящем фильтрационном потоке с учетом кристаллизации солей на стенках пор [1, 2]. Решения найдены методами составных разложений и сращивания асимптотических разложений [3–5].