лагранжевых ячеек верхнего слоя среды (точки $j=0, 1, 2, \ldots$) соответственно на кривых *1–4* в системе координат X_i^*, причем

$$X_1^*=0.04X_1+u_1/b, \quad X_2^*=u_2/b$$

где u_i – компоненты вектора смещения центров ячеек, совмещенных с осью X_1^* при $s=0$. Для наглядности изображения горизонтальных смещений начальное положение частиц вдоль X_1^* введено с масштабным коэффициентом 0.04, т. е. при $s=0$ для полуширины пластинки (*A* на фиг. 3) $j=2.5$, $X_1^*=0.04$, $X_2^*=0$.

Счет был прекращен при $s=22$ в связи с выворачиванием лагранжевых ячеек на гребне волны.

Поступила 3 V 1977

ЛИТЕРАТУРА

1. *Седов Л. И.* Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики. М., «Наука», 1966.
2. *Галин Л. А.* Удар по твердому телу, находящемуся на поверхности сжимаемой жидкости. ПММ, 1947, т. 11, № 5.
3. *Григолюк Э. И., Горшков А. Г.* Взаимодействие упругих конструкций с жидкостью. Л., «Судостроение», 1976.
4. *Сагомонян А. Я.* Проникание. М., Изд-во МГУ, 1974.
5. *Котляревский В. А., Чистов А. Г.* Численный анализ дифракции волн в упруговязких средах при плоской деформации. Изв. АН СССР, МТТ, 1976, № 3.
6. *Von Neumann J., Richtmyer R. D.* A method for the numerical calculations of hydrodynamical shocks. J. Appl. Phys., 1950, vol. 21, No. 3.

УДК 532.546

ОБ УРАВНЕНИЯХ ДВУХФАЗНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ

М. И. ШВИДЛЕР

(*Москва*)

Общепринятые уравнения фильтрации несмешивающихся жидкостей в форме Маскета – Леверетта [1, 2] выписываются как некоторое обобщение закона Дарси для каждой из фаз, причем обобщение достигается за счет введения в уравнение Дарси эмпирических функций, называемых фазовыми проницаемостями. Многочисленные эксперименты показывают, что фазовые проницаемости зависят в основном от насыщенности фазами. В то же время не исключено влияние на фазовые проницаемости и других факторов, например соотношения вязкостей, степени неравновесности процесса фильтрации, характеристик неоднородности пористой среды и т. д.

Помимо непосредственного определения фазовых проницаемостей по результатам физического эксперимента известно много работ по их вычислению с помощью математических моделей капиллярных пучков [3, 4] и капиллярных сетей [5, 6].

Ниже излагается процедура построения системы уравнений двухфазной фильтрации и вычисления фазовых проницаемостей для некоторых моделей течения двух несмешивающихся жидкостей, основанных на представлении о движении взаимопроникающих жидких однородных фаз [7, 8] и ряде гипотез о их структуре.

1. Модель течения. Будем считать жидкие несмешивающиеся фазы распределенными в пространстве таким образом, что фазы в отдельности занимают достаточно большие подобласти, чтобы в них выполнялся закон Дарси для соответствующей однородной фазы. Примем также, что прилагаемые к системе перепады давлений таковы, что какая-то часть каждой из жидких фаз неподвижна. Например, это могут быть достаточно малые «островки» фазы, окруженные со всех сторон чужой фазой. Будем считать гидродинамическое давление в жидкостях непрерывной функцией координат (в п. 2 будет рассмотрен случай, когда давление на границе фаз претерпевает разрыв).

Следует отметить, что анализ физических представлений и экспериментов по вытеснению [7–10] в определенной степени согласуется с приведенными выше гипотезами, положенными в основу принятой модели. Сделанные предположения позволяют записать уравнения движения и, усреднив их, получить уравнения фильтрации двухфазной системы.

Пусть M – трехмерное пространство, занятое жидкими фазами, M_1, M_2 – соответственно его части, занятые первой и второй фазами. Для описания распределения фаз в пространстве введем функцию фазности $z(\mathbf{x})$

$$z(\mathbf{x})=\begin{cases}1, & \mathbf{x}\in M_1\\ 0, & \mathbf{x}\in M_2\end{cases}, \quad M_1\cup M_2=M$$

Считая распределение фаз случайным, найдем моменты z. Очевидно

$$\langle z\rangle=S_1,\quad z'=z-S_1,\quad \langle z'^2\rangle=S_1S_2$$

Здесь S_i – насыщенность среды i-й фазой ($S_1+S_2=1$), $\langle\ \rangle$ – символ усреднения по ансамблю течений, штрихом обозначена флуктуация z.

Введем также в рассмотрение функцию подвижности $u(\mathbf{x})$ и ее моменты, разбив для этого пространство M_i на подпространства M_i^+ и M_i^-, занятые соответственно подвижной и неподвижной фазами

$$u(\mathbf{x})=\begin{cases}1, & \mathbf{x}\in M_1^+\cup M_2^+\\ 0, & \mathbf{x}\in M_1^-\cup M_2^-\end{cases}$$

$$\langle u\rangle=S^+,\quad u'=u-S^+,\quad \langle u'^2\rangle=S^+S^-$$

Здесь S^+, S^- – соответственно насыщенности подвижными и неподвижными фазами ($S^++S^-=1$).

Отметим, что разделение насыщенности на «активную» и «пассивную» компоненты использовано в [11] при исследовании неравновесной фильтрации несмешивающихся жидкостей.

Используя функции z и u, запишем уравнения фильтрации несжимаемой жидкости во всем пространстве M

$$\mathbf{v}=-ku(\mathbf{x})\theta(\mathbf{x})\nabla p,\qquad \operatorname{div}\mathbf{v}=0 \tag{1.1}$$

Здесь $\mathbf{v}$ – скорость фильтрации жидкости, $k=k(\mathbf{x})$ – проницаемость, p – давление, $\theta=\theta_2+(\theta_1-\theta_2)z$, $\theta_i=\mu_i^{-1}$, μ_i – вязкость i-й фазы.

Локальные фазовые скорости $\mathbf{v}_i$ определяются соотношениями $\mathbf{v}_1=\mathbf{v}z$, $\mathbf{v}_2=\mathbf{v}(1-z)$. Используя (1.1), вычислим средние скорости фаз

$$\mathbf{V}_1=\langle\mathbf{v}z\rangle=-\langle zku\theta\nabla p\rangle=-\theta_1\langle kzu\nabla p\rangle,\quad \mathbf{V}_2=\langle\mathbf{v}(1-z)\rangle=-\theta_2\langle k(1-z)u\nabla p\rangle$$

Представим рассматриваемые случайные поля в виде

$$\mathbf{v}=\mathbf{v}_0+\mathbf{v}',\quad p=p_0+p',\quad k=k_0+k',\quad \theta=\theta_0+\theta',\quad u=u_0+u'$$

$$\mathbf{v}_0=\langle\mathbf{v}\rangle,\quad p_0=\langle p\rangle,\quad k_0=\langle k\rangle,\quad \theta_0=\langle\theta\rangle=\theta_2+(\theta_2-\theta_1)S_1,\quad u_0=\langle u\rangle$$

Будем считать флуктуации k', θ', u' достаточно малыми в том смысле, что достаточно малы их коэффициенты вариации (флуктуация z' малой не предполагается). Тогда в разложении, квадратичном по флуктуациям, но линейном по малым параметрам, будем иметь

$$\begin{aligned}\mathbf{V}_1&=-\theta_1[k_0u_0z_0\nabla p_0+k_0u_0\langle z'\nabla p'\rangle+k_0\langle z'u'\rangle\nabla p_0+\langle k'z'\rangle u_0\nabla p_0]\\ \mathbf{V}_2&=-\theta_2[k_0u_0(1-z_0)\nabla p_0-k_0u_0\langle z'\nabla p'\rangle-k_0\langle z'u'\rangle\nabla p_0-\langle k'z'\rangle u_0\nabla p_0]\end{aligned} \tag{1.2}$$

Здесь уместно отметить, что степень влияния отброшенных членов в случае не малых флуктуаций не ясна.

Для вычисления корреляции $\langle z\nabla p'\rangle$ используем в рассматриваемом приближении систему, связывающую флуктуации

$$\mathbf{v}'=-k_0u_0\theta_0\left[\left(\frac{k'}{k_0}+\frac{\theta'}{\theta_0}+\frac{u'}{u_0}\right)\nabla p_0+\nabla p'\right],\qquad \operatorname{div}\mathbf{v}'=0$$

Будем полагать, что $k_0=\mathrm{const}$, $\theta_0=\mathrm{const}$, $u_0=\mathrm{const}$, $\nabla p_0=(\alpha,0,0)$, тогда

$$\nabla^2p'=-\alpha\frac{\partial}{\partial x_1}(k_0^{-1}k'+u_0^{-1}u'+\theta_0^{-1}\theta') \tag{1.3}$$

и для неограниченной области фильтрации имеем

$$p'(\mathbf{x})=\alpha\int G(\mathbf{x},\mathbf{x}')\frac{\partial}{\partial x_1'}(k_0^{-1}k'+\theta_0^{-1}\theta'+u_0^{-1}u')\,dx'^3$$

Здесь $G(\mathbf{x},\mathbf{x}')=[4\pi|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|]^{-1}$ – функция Грина для уравнения (1.3).

Теперь нетрудно получить

$$\langle z'\nabla p'\rangle=\alpha\int\nabla G\frac{\partial}{\partial x_1'}[k_0^{-1}M_{z,k}+u_0^{-1}M_{z,u}+(\theta_1-\theta_2)\theta_0^{-1}M_{z,z}]\,dx'^3 \tag{1.4}$$

где $M_{a,b}=\langle a'(\mathbf{x})b'(\mathbf{x}')\rangle$ – взаимный корреляционный момент полей a и b.

Предположим, что поля z и u однородны и изотропны, а взаимные корреляции их, так же как и с полем k, однородны и изотропны и убывают к нулю на бесконечности. Тогда корреляции (1.4) вычисляются в конечном виде и после преобразований получим из (1.2) уравнение фильтрации и фазовые проницаемости f_i

$$\mathbf{V}_i = -k_0\theta_i f_i \nabla p_0$$

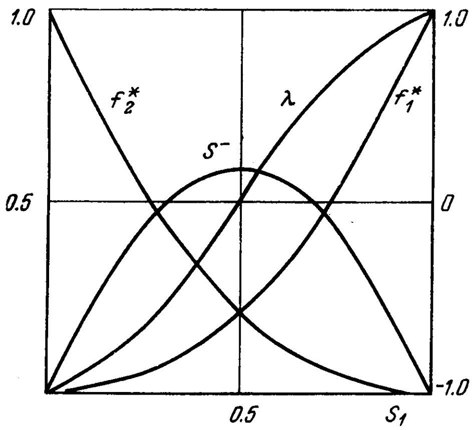
$$(1.5)\qquad f_1 = S_1S^+ - \frac{(\theta_1-\theta_2)S_1S_2S^+}{3\theta_0} + \frac{2}{3}\zeta S^+\sqrt{S_1S_2}\,\lambda_{k,z} + \frac{2}{3}\sqrt{S_1S_2S^+S^-}\,\lambda_{z,u}$$

$$f_2 = S_2S^+ + \frac{(\theta_1-\theta_2)S_1S_2S^+}{3\theta_0} - \frac{2}{3}\zeta S^+\sqrt{S_1S_2}\,\lambda_{k,z} - \frac{2}{3}\sqrt{S_1S_2S^+S^-}\,\lambda_{z,u}$$

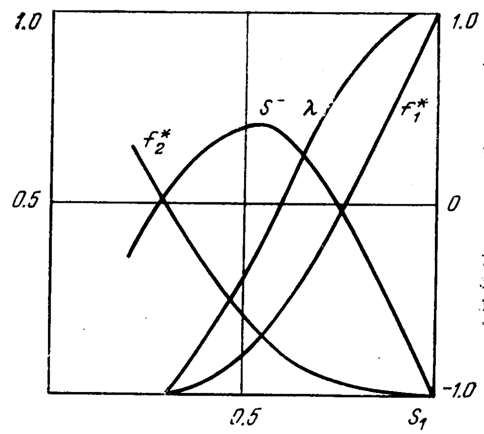
Здесь $\zeta = (\langle k'^2\rangle)^{1/2}/k_0$ – коэффициент вариации поля проницаемости, коэффициенты корреляции соответствующих полей $\lambda_{k,\,z,\,\dots}$ вводятся следующими равенствами:

$$M_{z,\,u} = \sqrt{S_1S_2S^+S^-}\lambda_{z,\,u},\qquad M_{k,\,z} = k_0\zeta\sqrt{S_1S_2}\lambda_{k,\,z}$$

Отметим, что рассмотрение соответствующей плоской задачи приводит к формулам (1.5) с той разницей, что тройки в знаменателях соответствующих членов должны быть заменены двойками, а двойки в числителях – единицами.



Фиг. 1



Фиг. 2

Коэффициенты корреляции λ и параметр S^+, вообще говоря, зависят от насыщенностей, степени неравновесности системы, отношения вязкостей и т. д. Естественно ожидать, что в равновесном состоянии если фаза 1 смачивающая, а фаза 2 несмачивающая, коэффициент $\lambda_{k,z} \leqslant 0$. Если первая фаза смачивающая, можно ожидать, что при достаточно больших значениях S_1 коэффициент $\lambda_{z,\,u} \geqslant 0$. Наоборот, при малых S_1 менее связной будет, по-видимому, первая фаза, т. е. $\lambda_{z,u} \leqslant 0$. Зависимость S^+ от S_1 почти очевидна. Можно полагать, что $S^+(0) = S^+(1) = 0$. В интервале (0,1) параметр S^+ отличен от нуля, достигает в некоторой точке максимального значения.

Пусть из эксперимента найдены функции фазовых проницаемостей f_1^* и f_2^*, тогда $S^+ = f_1^* + f_2^*$ и можно найти S^-

$$S^- = 1 - f_1^* - f_2^*$$

Определение остальных параметров с помощью f_i^* в общем случае невозможно. Однако если $\mu_1 = \mu_2$ и среда однородна ($\zeta = 0$), можно определить $\lambda_{z,u}$

$$\lambda_{z,u} = \frac{3}{2}\,\frac{S_2f_1^* - S_1f_2^*}{\sqrt{S_1S_2(f_1^*+f_2^*)(1-f_1^*-f_2^*)}}$$

Поскольку $\lambda_{z,u}$ – коэффициент корреляции, $|\lambda_{z,u}| \leqslant 1$, что налагает ограничения на функции f_i^*, которые не могут быть заданы произвольно. Например, если функции f_i^* представлены параболами $f_i^* = S_i^{\alpha_i}$, легко получить условие $\alpha_i \geqslant 9/4$. Это обстоятельство определяется зависимостью фазовых проницаемостей от механизма течения, заданного моделью и структурой среды. Любопытно, что для «двумерных» фазовых проницаемостей ограничения на α_i еще жестче. Уменьшение размерности пространства приводит к усилению роли «чужой» фазы и условию $\alpha_i \geqslant 4$.

На фиг. 1 приведены зависимости $S^-(S_1)$ и $\lambda_{z,u}(S_1)$ при $\alpha_i={}^9/_4$. На фиг. 2 аналогичные зависимости построены по кривым фазовых проницаемостей Леверетта [1], полученным из эксперимента по фильтрации водонефтяных систем с различным отношением вязкостей.

2. Модель двухфазного течения, рассмотренная в п. 1, предполагает непрерывность поля давления при переходе через границы глобул. Капиллярные эффекты при этом частично учтены посредством введения в рассмотрение несвязной части каждой из фаз, неподвижность которой постулируется. Далее предлагается модель течения, в которой учет капиллярности является, по-видимому, более полным.

Пусть, как и ранее, жидкие фазы сосуществуют в среде в виде глобул. Будем считать, что давления в областях M_1^+ и M_2^+ являются непрерывными функциями соответственно $p_1(\mathrm{x})$ и $p_2(\mathrm{x})$. Тогда, рассматривая движение первой фазы в пространстве M, будем считать, что оно происходит в пространстве M_1^+, а остальная часть пространства $(M\diagdown M_1^+)$ непроницаема для первой фазы. Вводя в рассмотрение функцию $w_1=uz$

$$w_1=\begin{cases}1, & \mathrm{x}\in M_1^+\\ 0, & \mathrm{x}\in M\backslash M_1^+\end{cases}$$

$$w_1^\circ=\langle W_1\rangle=S_1^+,\qquad \langle w_1'^2\rangle=S_1^+(1-S_1^+)$$

для любой точки пространства M запишем

$$\mathrm{v}_1=-k\theta_1 w_1\nabla p,\qquad \operatorname{div}\mathrm{v}_1=0$$

Обозначив $\sigma_1=kw_1$, $\mathrm{V}_1=\langle\mathrm{v}_1\rangle$, $P_1=\langle p_1\rangle$, будем искать σ_1^* – эффективную фазовую проницаемость, определяемую соотношениями

$$\mathrm{V}_1=-\sigma_1^*\theta_1\nabla P_1,\qquad \operatorname{div}\mathrm{V}_1=0$$

Таким образом, задача определения фазовой проницаемости сводится к определению эффективной проводимости среды со случайными неоднородностями, задаче, как известно, чрезвычайно сложной. Трудность рассматриваемого варианта усугубляется разрывностью случайного поля σ_1, его сильными, вообще говоря, флуктуациями, а также необходимостью получения и использования информации о поле σ_1. Приближенное решение, полученное методом возмущений [12], имеет вид

$$\sigma_1^*=\langle\sigma_1\rangle\left(1+\frac{1}{3}\frac{D\sigma_1}{\langle\sigma_1\rangle^2}\right)^{-1}$$

и в приближении, линейном по флуктуациям k' и w_1', записывается для σ_1^* и σ_2^*

$$\sigma_1^*=\frac{3k_0w_1^\circ}{1+2w_1^\circ}\left[w_1^\circ+(1-w_1^\circ)\zeta_k\lambda_{k,w_1}\right]$$

$$\sigma_2^*=\frac{3k_0w_2^\circ}{1+2w_2^\circ}\left[w_2^\circ+(1-w_2^\circ)\zeta_k\lambda_{k,w_2}\right]$$

$$w_2=u-w_1,\qquad w_2^\circ=S_2^+,\qquad \langle w_2'^2\rangle=S_2^+(1-S_2^+)$$

Таким образом, в рассматриваемом приближении

$$f_i=\frac{3S_i^+}{1+2S_i^+}\left[S_i^++(1-S_i^+)\zeta_k\lambda_{k,w_i}\right]\tag{2.1}$$

Пусть для простоты $\zeta_k=0$. Тогда

$$f_i=\frac{3S_i^{+2}}{1+2S_i^+}\tag{2.2}$$

Из (2.2) следует, что при изотропном распределении фаз, а именно при таких предположениях получено соотношение (2.1), фазовые проницаемости ограничены сверху

$$f_i\leqslant\frac{3S_i^2}{1+2S_i}\tag{2.3}$$

Вообще же говоря, предположение об изотропии в распределениях фаз представляется в достаточной мере спорным. Можно ожидать, что в процессе вытеснения, тем более если состояние существенно неравновесно, распределение фаз, а следовательно, и фазовые проницаемости неизотропны.

Возвращаясь к (2.2), можно отметить, что, например, модельные фазовые проницаемости $f_i^*=S_i^2$ удовлетворяют условию (2.3).

Поэтому для таких f_i^* имеем

$$S_i^-=S_i+[\sqrt{3}(1+2S_i^+)^{-1}-1]$$

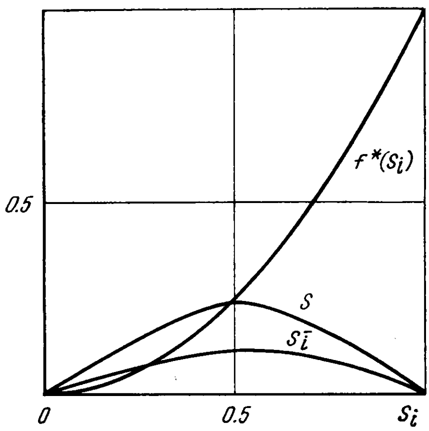
График зависимостей f_i^*, S_i^- и S^- от S_i приведен на фиг. 3.

На фиг. 4 приведены зависимости S_1^- и S^- от S_1 для f_i^* – экспериментальных кривых Леверетта [1], изображенных на фиг. 2.

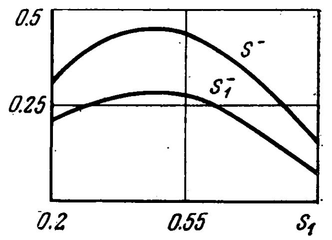
3. Капиллярное квазиравновесие. Пусть две несмешивающиеся жидкости некоторым образом заполняют пространство M. Наличие капиллярных сил обусловливает разрывность поля давления на границах раздела жидких фаз. Если считать взаимодействие жидкостей квазиравновесным, на границе реализуется скачок давления

(3.1) $$\Delta p=p_+-p_-=\sigma/\rho$$

Здесь p_+, p_- – давления в окрестности границы соответственно несмачивающей и смачивающей фаз, σ – межфазное натяжение, ρ – радиус кривизны границы раздела – мениска. Параметр ρ – локальная случайная характеристика, зависящая от структуры порового пространства. В дальнейшем будем считать ρ некоторым масштабом внутренней структуры, по порядку близким к размеру пор и определенному в любой его точке.



Фиг. 3



Фиг. 4

Учитывая (3.1), для давления $p(\mathrm{x})$ запишем

(3.2) $$p(\mathrm{x})=P(\mathrm{x})-\frac{\sigma}{\rho}z$$

Здесь $P(\mathrm{x})$ – некоторая непрерывная функция, а функция $z(\mathrm{x})$ определена в п. 1. Очевидно, при $\mathrm{x}\in M_2$ $\mathrm{P}(x)=p(\mathrm{x})$, т. е. имеет вполне ясный физический смысл.

Введем в рассмотрение средние фазовые давления

$p_1(\mathrm{x})=\langle p(\mathrm{x})\rangle_1$, $p_2(\mathrm{x})=\langle p(\mathrm{x})\rangle_2$. Индекс i при угловых скобках означает, что усреднение проводится по тем членам ансамбля, у которых в данной точке имеется фаза i. Заменяя усреднение по ансамблю усреднением по объему, запишем

(3.3) $$p_1(\mathrm{x})=\frac{1}{\Omega_1}\int p(\mathrm{y})\,d\Omega_1,\qquad p_2(\mathrm{x})=\frac{1}{\Omega_2}\int p(\mathrm{y})\,d\Omega_2$$

где интегрирование проводится по достаточно большому объему, содержащему точку x.

Если предположить, что множества M_1 и M_2 достаточно хорошо «перемешаны», из (3.3) следует, что функции $p_i(\mathrm{x})$ определены в любой точке множества $M=M_1\cup M_2$.

Подставив (3.2) в (3.3), получим

$$p_1(\mathrm{x})=P_1(\mathrm{x})-\frac{\sigma}{\Omega_1}\int\frac{z}{\rho}\,d\Omega_1=P_1(\mathrm{x})-\frac{\sigma}{S_1}\langle z/\rho\rangle,\qquad p_2(\mathrm{x})=P_2(\mathrm{x})$$

Для среднего капиллярного давления $p_k = p_1 - p_2$ найдем

$$p_k = P_1 - P_2 + \frac{\sigma}{S_1}\left\langle \frac{z}{\rho} \right\rangle$$

Полагая $z = z_0 + z'$, $\rho = \rho_0 + \rho'$, $\rho_0 = \langle\rho\rangle$, $\Delta^2 = \langle\rho'^2\rangle$, получим с точностью до малых первого порядка

$$p_k = P_1 - P_2 + \frac{\sigma}{\rho_0}\left(1 - \frac{\Delta\lambda_{z,\rho}}{\rho_0}\sqrt{\frac{S_2}{S_1}}\right)$$

В статике или в случае достаточно медленного течения $P(x) = \mathrm{const}$ и

$$p_k = \frac{\sigma}{\rho_0}\left(1 - \frac{\Delta\lambda_{z,\rho}}{\rho_0}\sqrt{\frac{S_2}{S_1}}\right) \tag{3.4}$$

Если среда микрооднородна ($\Delta = 0$), то $p_k = \sigma/\rho_0$ и не зависит от насыщенности. Как известно, при малых S_1 смачивающая фаза распределена преимущественно в мелких порах. Поэтому $\lambda_{z,\rho} \to -1$ и из (3.4) имеем для малых S_1

$$p_k = \frac{\sigma}{\rho_0}\left(1 + \frac{\Delta}{\rho_0}\sqrt{\frac{1-S_1}{S_1}}\right) \tag{3.5}$$

Соотношение (3.5) дает возможность определить степенной порядок роста капиллярного давления при малых насыщенностях смачивающей фазой.

При $S_1 \to 1$ имеем асимптотическую формулу $p_k = \sigma/\rho_0$, не зависящую от поведения коэффициента корреляции $\lambda_{z,\rho}$ при $S_1 \to 1$. В то же время из физических соображений следует, что при $S_1 \to 1$ коэффициент корреляции $\lambda_{z,\rho}$ должен быть малым по модулю, что также дает некоторую дополнительную информацию о поведении p_k при $S_1 \to 1$.

Приведенные выше соображения и формулы можно распространить и на двухфазные течения глобульной структуры, описание которых дано в п. 2. В этом случае под ρ следует понимать некоторый макромасштаб, имеющий в то же время локальный характер, например $\sqrt{k/m}$.

Автор признателен Р. М. Кацу за полезные обсуждения.

Поступила 4 II 1977

ЛИТЕРАТУРА

1. *Leverett M. C.* Flow of oil-water mixtures through unconsolidated sands. Trans. AIME, 1939, vol. 132.
2. *Muskat M.* Physical principles of oil production. New York, McGraw – Hill, 1949. (Рус. перев.: Физические основы технологии добычи нефти. М., Гостоптехиздат, 1953.)
3. Развитие исследований по теории фильтрации в СССР (1917–1967). М., «Наука», 1969.
4. *Scheidegger A. E.* The physics of flow through porous media. Toronto, Univ. press, 1957. (Рус. перев.: Физика течения жидкостей через пористые среды. М., Гостоптехиздат, 1960.)
5. *Fatt J.* The network model of porous media, pt 1–3. Trans. AIME, 1956, vol. 207.
6. *Ентов В. М., Фельдман А. Я., Чен Син Э.* Программное моделирование процесса капиллярного вытеснения в пористой среде. Программирование, 1975, № 3.
7. *Швидлер М. И.* Взаимопроникающее движение несмешивающихся жидкостей в пористой среде. Изв. АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение, 1961, № 1.
8. *Курбанов А. К.* Об уравнениях движения двухфазных жидкостей в пористой среде. В сб. «Теория и практика добычи нефти». М., «Недра», 1968.
9. *Бабалян Г. А.* Вопросы механизма нефтеотдачи. Баку, Азнефтеиздат, 1956.
10. *Баренблатт Г. И., Ентов В. М., Рыжик В. М.* Теория нестационарной фильтрации жидкости и газа. М., «Недра», 1972.
11. *Баренблатт Г. И., Ентов В. М.* Неравновесные эффекты при фильтрации несмешивающихся жидкостей. В сб. «Численные методы решения задач фильтрации несжимаемой жидкости». Новосибирск, 1972.
12. *Швидлер М. И., Мендельсон М. М.* Исследование эффективной проницаемости неоднородной пористой среды. В сб. «Теория и практика добычи нефти». М., «Недра», 1971.