

**УДАР ПО ПЛАСТИНКЕ, НАХОДЯЩЕЙСЯ НА ПОВЕРХНОСТИ  
ЖИДКОСТИ**

**В. А. КОТЛЯРЕВСКИЙ**

(Москва)

Вопросы взаимодействия твердых и упругих конструкций с идеальной жидкостью, связанные с начальной стадией удара и проникания тел в жидкость, рассматривались в [1-4].

Ниже приводятся результаты расчета центрального удара по твердой невесомой пластинке, находящейся на поверхности сжимаемой жидкости. Скорость удара намного меньше скорости звука в среде. Расчеты проведены конечно-разностным лагранжеевым методом по программе для плоских движений сплошной среды [5] с использованием объемной искусственной вязкости типа Неймана - Рихтмайера [6].

Решение доведено до момента времени, соответствующего десятикратному пробегу звуковой волны вдоль ширины пластинки, что лимитируется предельно допустимыми искажениями лагранжеевых ячеек сетки. Показано, что наличие искусственной вязкости приводит к нарушению потенциальности течения.

Расчеты по программе для плоских движений [5] проведены для жидкости как линейно-упругой среды с модулем объемной деформации  $K=2.16 \cdot 10^9$  н/м<sup>2</sup> и начальной плотностью  $\rho_0=1.02 \cdot 10^3$  кг/м<sup>3</sup>. Твердая невесомая пластинка шириной  $2b=0.25$  м и удельной массы  $m=100$  кг/м расположена на горизонтальной поверхности жидкости симметрично относительно вертикальных границ прямоугольной области решения для жидкой среды с размерами: по вертикали  $10b$ , по горизонтали  $12.4b$ .

Принято, что жидкость может скользить по боковым и нижней твердым границам области без трения. Проскальзывание среды вдоль пластинки и отрыв запрещены. На свободной поверхности жидкости задано нулевое давление.

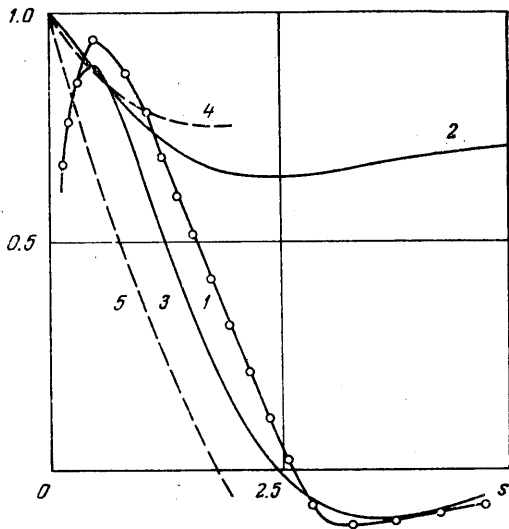
В расчетах на квадратной сетке с шагом  $h=5$  см использована объемная искусственная вязкость  $K_v=2.95 \cdot 10^4$  нсек/м<sup>2</sup>, шаг счета по времени  $\Delta t=0.8 \cdot 10^{-5}$  сек.

Удар приложен к центру пластинки перпендикулярно поверхности жидкости, что исключает вращение. Импульс удара равен  $667$  нсек/м, и начальная скорость пластинки  $v_0=6.67$  м/сек намного меньше скорости звука в среде ( $v_0 \sqrt{\rho_0/K} \ll 1$ ).

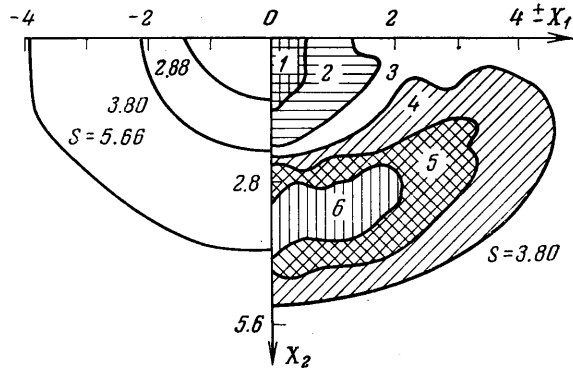
В расчетах были получены поля давлений ( $p$ ), массовых скоростей ( $v$ ) и перемещений ( $u$ ) среды.

На фиг. 1 показаны изменения безразмерных давления  $P_0(s)$  в диаметральной плоскости пластинки (кривая 1), скорости пластинки  $V(s)$  (2) и функции  $-G(s)/\xi$  (3), характеризующей реакцию торможения ( $s$  — безразмерное время), причем

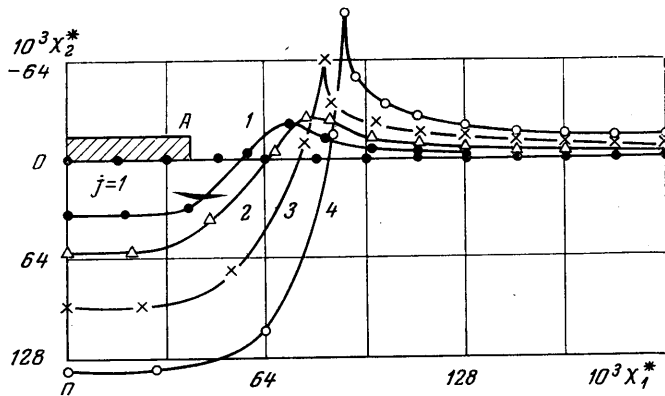
$$P_0 = \frac{p}{\rho_0 v_0} \sqrt{\frac{\rho_0}{K}}, \quad V = \frac{v}{v_0}, \quad G = \frac{dV}{ds}, \quad \xi = \frac{2\rho_0 b^2}{m}, \quad z = \frac{t}{b} \sqrt{\frac{K}{\rho_0}}$$



Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3

Для сравнения кривыми 4 и 5 показаны функции  $V(s)$  и  $-G(s)/\xi$ , полученные из аналитического решения [4] для условий потенциального течения жидкости

$$V = \frac{\xi}{\lambda_2 - \lambda_1} \left[ \left( 1 - \frac{1}{2\lambda_1} \right) \exp \lambda_1 s - \left( 1 - \frac{1}{2\lambda_2} \right) \exp \lambda_2 s \right]$$

$$\lambda_{1,2} = -\frac{1}{2} (\xi \mp \sqrt{\xi^2 + 2\xi}) \quad (0 < s \leq 2)$$

Как видно из фигуры, в связи с влиянием вязкости давление и реакция в численном решении при  $s < 0.45$  нарастают, а затем при  $s > 0.45$  убывают, причем имеет место задержка момента возникновения растягивающей реакции по сравнению с аналитическим решением на величину  $s = 0.65$ . В численном решении максимум давления срезан на 6% (от величины  $P_0 = 1$ ), а максимум реакции — на 12%.

Получено, что растяжение в среде впервые возникает при  $s \sim 2.4$  у поверхности пластинки в точках на расстояниях  $\pm X_1^0/b \sim 0.5$  от диаметральной плоскости. В процессе торможения пластинки зона растяжения расширяется, как это видно из фиг. 2 (слева), где показано положение границы зоны растяжения жидкости в моменты времени  $s = 2.88, 3.80, 5.66$ . Наибольшее растяжение  $P_0 = -0.151$  ( $p = -15 \cdot 10^5$  н/м<sup>2</sup>) достигается при  $s = 2.88$ , т. е. (в реальных условиях) возможен отрыв жидкости от пластинки и образование каверн. На фиг. 2 справа показано поле давлений в жидкости при  $s = 3.80$ , причем цифры в шести зонах означают диапазоны для  $P_0$ : 1 —  $0.1375 < P_0 < -0.1125$ , 2 —  $0.1125 < P_0 < -0.0375$ , 3 —  $0.0375 < P_0 < +0.0375$ , 4 —  $0.0375 < P_0 < 0.0875$ , 5 —  $0.0875 < P_0 < 0.1625$ , 6 —  $0.1625 < P_0 < 0.2625$ . Результаты расчета на фиг. 2 приведены в системе координат  $X_i = X_i^0/b$  ( $i = 1, 2$ ), где  $X_i^0$  — координаты Лагранжа, фиксирующие начальное положение частиц среды.

Положение поверхности жидкости справа от диаметральной плоскости в моменты времени  $s = 5.66, 10.3, 15.9, 21.5$  представлено на фиг. 3 изображением центров

лагранжевых ячеек верхнего слоя среды (точки  $j=0, 1, 2, \dots$ ) соответственно на кривых 1-4 в системе координат  $X_i^*$ , причем

$$X_1^* = 0.04X_1 + u_1/b, \quad X_2^* = u_2/b$$

где  $u_i$  — компоненты вектора смещения центров ячеек, совмещенных с осью  $X_1^*$  при  $s=0$ . Для наглядности изображения горизонтальных смещений начальное положение частиц вдоль  $X_1^*$  введено с масштабным коэффициентом 0.04, т. е. при  $s=0$  для полуширины пластинки (А на фиг. 3)  $j=2.5$ ,  $X_1^*=0.04$ ,  $X_2^*=0$ .

Счет был прекращен при  $s=22$  в связи с выворачиванием лагранжевых ячеек на гребне волны.

Поступила 3 V 1977

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Седов Л. И. Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики. М., «Наука», 1966.
2. Галин Л. А. Удар по твердому телу, находящемуся на поверхности сжимаемой жидкости. ПММ, 1947, т. 11, № 5.
3. Григолюк Э. И., Горшков А. Г. Взаимодействие упругих конструкций с жидкостью. Л., «Судостроение», 1976.
4. Сагомонян А. Я. Проникание. М., Изд-во МГУ, 1974.
5. Котляревский В. А., Чистов А. Г. Численный анализ дифракции волн в упруго-вязких средах при плоской деформации. Изв. АН СССР, МГТ, 1976, № 3.
6. Von Neumann J., Richtmyer R. D. A method for the numerical calculations of hydrodynamical shocks. J. Appl. Phys., 1950, vol. 21, No. 3.

УДК 532.546

### ОБ УРАВНЕНИЯХ ДВУХФАЗНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ

М. И. ШВИДЛЕР

(Москва)

Общепринятые уравнения фильтрации несмешивающихся жидкостей в форме Маскета — Леверетта [1, 2] выписываются как некоторое обобщение закона Дарси для каждой из фаз, причем обобщение достигается за счет введения в уравнение Дарси эмпирических функций, называемых фазовыми проницаемостями. Многочисленные эксперименты показывают, что фазовые проницаемости зависят в основном от насыщенности фазами. В то же время не исключено влияние на фазовые проницаемости и других факторов, например соотношения вязкостей, степени неравновесности процесса фильтрации, характеристик неоднородности пористой среды и т. д.

Помимо непосредственного определения фазовых проницаемостей по результатам физического эксперимента известно много работ по их вычислению с помощью математических моделей капиллярных пучков [3, 4] и капиллярных сетей [5, 6].

Ниже излагается процедура построения системы уравнений двухфазной фильтрации и вычисления фазовых проницаемостей для некоторых моделей течения двух несмешивающихся жидкостей, основанных на представлении о движении взаимопроникающих жидких однородных фаз [7, 8] и ряде гипотез о их структуре.

1. Модель течения. Будем считать жидкие несмешивающиеся фазы распределенными в пространстве таким образом, что фазы в отдельности занимают достаточно большие подобласти, чтобы в них выполнялся закон Дарси для соответствующей однородной фазы. Примем также, что прилагаемые к системе перепады давлений таковы, что какая-то часть каждой из жидких фаз неподвижна. Например, это могут быть достаточно малые «островки» фазы, окруженные со всех сторон чужой фазой. Будем считать гидродинамическое давление в жидкостях непрерывной функцией координат (в п. 2 будет рассмотрен случай, когда давление на границе фаз претерпевает разрыв).

Следует отметить, что анализ физических представлений и экспериментов по вытеснению [7-10] в определенной степени согласуется с приведенными выше гипотезами, положенными в основу принятой модели. Сделанные предположения позволяют записать уравнения движения и, усреднив их, получить уравнения фильтрации двухфазной системы.

Пусть  $M$  — трехмерное пространство, занятое жидкими фазами,  $M_1, M_2$  — соответственно его части, занятые первой и второй фазами. Для описания распределения фаз в пространстве введем функцию фазности  $z(x)$

$$z(x) = \begin{cases} 1, & x \in M_1 \\ 0, & x \in M_2 \end{cases}, \quad M_1 \cup M_2 = M$$