

ТРЕХПАРАМЕТРИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ СДВИГОВОЙ ТУРБУЛЕНТНОСТИ

В. Г. ЛУЩИК, А. А. ПАВЕЛЬЕВ, А. Е. ЯКУБЕНКО

(Москва)

Предложена модель сдвиговой турбулентности, в которой используются уравнения переноса для трех характеристик турбулентности: энергии E , напряжения трения $-(u'v')$ и функции F , размерность которой совпадает с размерностью величины $E^m L^n$. Для первых двух величин использованы известные уравнения, построение третьего уравнения потребовало специального рассмотрения. Константы в уравнениях определены из анализа течения за решеткой с постоянным сдвигом и поведения решения в различных областях течения в канале. Приведены результаты численного решения для течения в канале и проведено сравнение результатов с известными экспериментальными данными.

1. При расчете течений, в которых характеристики турбулентности в данной точке зависят от их значений в других точках потока, появляется необходимость использовать уравнения переноса для тех или иных характеристик турбулентности. При выводе этих уравнений обычно используются уравнения для различных моментов пульсационного движения. Способ получения таких уравнений описан, например, в [1]. Все члены в уравнениях для напряжений Рейнольдса $\tau_{ij} = -\langle u_i' u_j' \rangle$ выражаются через напряжения Рейнольдса и масштаб турбулентности (см. [1-6]).

Уравнение для масштаба L или его некоторой комбинации с $E = 0.5 \langle u_\alpha' u_\alpha' \rangle$ получалось различными способами. Полученные разными авторами [7-12] уравнения для масштаба без учета диффузионных членов, однако, близки друг другу. Существенное различие появляется при рассмотрении диффузионных членов, так как использование комбинаций $E^m L^n$ и градиентной формы диффузионного члена делает уравнения неэквивалентными.

Появляющиеся в последнее время работы по расчету турбулентных течений различаются по числу уравнений переноса для характеристик турбулентности и виду комбинаций $E^m L^n$. Во многих работах рассматриваются течения только при больших числах Рейнольдса, что позволяет не учитывать влияние вязкости. Обзор этих работ выполнен в [1-6].

В данной работе используются уравнения переноса для трех характеристик турбулентности, причем в уравнениях сохраняются члены с вязкостью, что позволяет рассчитывать течение в канале от самой стенки. Анализ течения в канале позволил выделить такие комбинации $E^m L^n$ и уравнения для них, для которых поведение рассматриваемых величин на различных расстояниях от стенки удовлетворительно совпадает с экспериментальными данными.

Выбор числа и вида определяющих параметров, характеризующих турбулентность, для которых следует писать уравнения переноса, очевидно, определяется рассматриваемой задачей.

Для задач, в которых существенно влияние начальных и граничных условий, следуя работам А. Н. Колмогорова [8] и Прандтля [9], можно говорить о двух параметрах — энергии E и масштабе L турбулентности.

Это обусловлено тем, что в начальном сечении величины E и L могут быть независимы и заданы произвольно. Так, например, при установке на входе решетки, энергия турбулентности за ней определяется пористостью, а масштаб — размером ячейки решетки.

Из оставшихся касательных составляющих тензора напряжений Рейнольдса $\tau_{ij} = -\langle u_i' u_j' \rangle$ (нормальные составляющие были объединены введением энергии турбулентности E) в задачах пограничного слоя существенной является одна $-\langle u'v' \rangle$, называемая напряжением трения τ .

Можно предположить, что для ряда задач имеет место локальная зависимость τ от E и L , а также от профиля средней скорости ($\partial u/\partial y$ для пограничного слоя) и вязкости ν . Из анализа размерностей следует, что $\tau/E = \Psi(z, R_\tau)$. Здесь $z = L|\partial u/\partial y|/\sqrt{E}$ — безразмерный градиент средней скорости, а $R_\tau = \sqrt{EL}/\nu$ — число Рейнольдса турбулентности. Разложение в ряд по степеням z функции Ψ дает [7] известное выражение для τ

$$(1.1) \quad \tau = \beta(z, R_\tau) \sqrt{EL} \frac{\partial u}{\partial y}$$

Функция β в работах [8, 9] полагалась константой, а в дальнейшем — функцией только R_τ [10], и, наконец, в [11] — как представлено выше. В любом случае для определения τ величина β должна быть задана.

Однако в ряде задач, где профиль скорости несимметричен или имеет максимумы и нулевые значения $\partial u/\partial y$ и τ не совпадают, а также в задачах, в которых большую роль играет предыстория потока, использование выражения (1.1) для τ может привести к неудовлетворительным результатам. В таких случаях для напряжения трения целесообразно использовать уравнение переноса.

Следует отметить, что, характеризуя структуру турбулентности только двумя параметрами (E и L), предполагаем, что другие характеристики турбулентности, как правило, заранее не известны в начальном сечении. Кроме того, объем располагаемой экспериментальной информации является также недостаточным, чтобы использовать эти величины для аппроксимации процессов порождения, диссипации, обмена и диффузии в соответствующих уравнениях переноса.

Для замыкания уравнений для тензора напряжений Рейнольдса (1.1) используем гипотезы, предложенные в [12, 13], несколько их модифицировав.

При построении уравнения для масштаба турбулентности L используем конструктивный подход, развитый в [7]. Так, если предположить, что изменение масштаба в данной точке плоскопараллельного потока с постоянным градиентом скорости определяется величинами E , L , $\partial u/\partial y$ и ν (считая, что τ также зависит от этих величин), то можно записать

$$(1.2) \quad u \frac{\partial L}{\partial x} = f\left(E, L, \frac{\partial u}{\partial y}, \nu\right) = f_1(E, L) + f_2(\nu, L) + f_3\left(\frac{\partial u}{\partial y}, L\right)$$

Это представление означает, что изменения масштаба из-за воздействия энергии турбулентности, вязкости и градиента средней скорости независимы. Далее из соображений размерности следует

$$(1.3) \quad f_1 \sim \sqrt{E}, \quad f_2 \sim \nu/L, \quad f_3 \sim L|\partial u/\partial y|$$

Отметим, что члены такого вида имеются в уравнении для масштаба Ротта [12], полученном путем интегрирования уравнений для вторых двухточечных моментов скорости. Отличие состоит лишь в выражении для f_3 , которое у Ротта имеет вид $(\tau/E)L\partial u/\partial y$.

Таким образом, для сформулированной задачи в настоящее время представляется обоснованным использование как минимум двухпараметрической (E, L) -модели турбулентности с выражением (1.1) для τ либо трехпараметрической (E, L, τ) -модели турбулентности с соответствующими уравнениями переноса.

2. Рассмотрим стационарное плоскопараллельное в среднем турбулентное течение со средней скоростью $u=u(y)$ (направленной всюду вдоль оси x), причем $\partial u/\partial y$ вдоль оси x постоянен. Турбулентность полагается однородной, диффузия турбулентности отсутствует. При этих предположениях из уравнений для $\langle u_i' u_j' \rangle$ с учетом замыкающих соотношений и соображений размерности для масштаба турбулентности (см. п. 1) получим следующие уравнения для E, L, τ [7]:

$$(2.1) \quad u \frac{\partial E}{\partial x} = -(c \sqrt{E} L + c_1 \nu) \frac{E}{L^2} + \tau \frac{\partial u}{\partial y}$$

$$(2.2) \quad u \frac{\partial L}{\partial x} = (c_2 \sqrt{E} L + c_3 \nu) \frac{1}{L} - c_4 L \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right|$$

$$(2.3) \quad u \frac{\partial \tau}{\partial x} = -(c_5 \sqrt{E} L + c_6 \nu) \frac{\tau}{L^2} + c_7 E \frac{\partial u}{\partial y}$$

Для оценки констант c, c_1, c_2, c_3 в уравнениях для E и L рассмотрим вырожденные турбулентности при течении за решетками с $\partial u/\partial y=0$ [14, 15]. На начальном этапе вырождения при больших числах R_T , когда вязкими членами можно пренебречь, $\sqrt{E}L \approx \text{const}$, что определяет связь между c и c_2 вида $c_2=0.5 c$. При этом из анализа опытных данных следует, что $c=0.3-0.4$. На конечном этапе вырождения решеточной турбулентности при малых числах R_T , где $E \sim x^{-3/2}$, а $L \sim x^{1/2}$, получается, что $c_3=0.2 c_1$, а $c_1=5\pi/4$.

Константу c_5 в уравнении для τ можно оценить из анализа экспериментов по исследованию однородной анизотропной турбулентности [16], откуда получаем $c_5=(2.5-3)c$.

Константу c_6 в вязком члене уравнения для τ из экспериментов для однородной решеточной турбулентности определить невозможно.

Оценки для констант c_4 и c_7 в уравнениях для L и τ можно получить из анализа развития решеточной турбулентности с градиентом средней скорости. В [7] сделано предположение, что при развитии решеточной турбулентности при больших числах R_T в потоке с постоянным градиентом скорости вдали от решетки устанавливается такая структура турбулентности, при которой величины $\tau^\circ = \tau/E$ и $z = L |\partial u/\partial y| / \sqrt{E}$ постоянны и не зависят от расстояния. Так как система уравнений (2.1)–(2.3) должна описывать это состояние турбулентности, то, преобразуя уравнения для E, L, τ в уравнения для z и τ° , получим

$$(2.4) \quad u \frac{\partial z}{\partial x} = \left[c + 0.7 \frac{c_1}{R_T} - \left(c_4 + \frac{\tau^\circ}{2} \right) z \right] \frac{\partial u}{\partial y}$$

$$(2.5) \quad u \frac{\partial \tau^\circ}{\partial x} = \left[c_7 z - \left(c_5 - c + \frac{c_6 - c_1}{R_T} \right) \tau^\circ - z \tau^{\circ 2} \right] \frac{\sqrt{E}}{L}$$

Далее, полагая $R_T \gg 1$ и приравняв нулю производные по x в (2.4), (2.5), получим следующие соотношения для констант c_4 и c_7 :

$$(2.6) \quad c_4 = \frac{c}{z_*} - \frac{\tau_*^\circ}{2}, \quad c_7 = \tau_*^{\circ 2} + \frac{c \tau_*^\circ}{z_*} \left(\frac{c_5}{c} - 1 \right)$$

Здесь z_* и τ_*° — предельные значения величин z и τ° , которые устанавливаются вдали от решетки.

Из анализа экспериментальных данных [17] по развитию решеточной турбулентности, близкой к однородной, с постоянным по длине градиентом скорости можно установить значения величин z_* и τ_*° , которые для двух решеток, использованных в эксперименте, составят 1.37–1.47 и 0.29–0.27 соответственно. Следует отметить, что величина $z_* \tau_*^\circ$, полученная в эксперименте [17] для двух решеток, составляет 0.4. Это накладывает ограничение на величину c , которое следует из решения уравнения (2.1) для энергии турбулентности E в предельном состоянии ($z=z_*=\text{const}$, $\tau^\circ=\tau_*^\circ=$

$=\text{const}, R_T \gg 1)$

$$\frac{E}{E_0} = \exp \left[\frac{x-x_0}{uz_*} \frac{\partial u}{\partial y} (z_* \tau_*^\circ - c) \right]$$

Из полученного решения видно, что при $c = z_* \tau_*^\circ \approx 0.4$ энергия турбулентности не будет возрастать с ростом x , что противоречит результатам измерений [17]. Необходимый темп роста обеспечивает значение $c = 0.3$, которое и было выбрано для последующих оценок и расчетов.

Подставляя значения $c = 0.3$ и $c_5/c = 2.5 \div 3$ в выражения (2.6) при $z_* = 1.37 \div 1.47$ и $\tau_*^\circ = 0.27 \div 0.29$, можно получить следующий диапазон изменения констант $c_4 = 0.05 \div 0.07$, $c_7 = 0.16 \div 0.21$.

Таким образом, из анализа экспериментальных данных по развитию решеточной турбулентности в потоке с постоянным градиентом скорости получены следующие оценки для констант в уравнениях (2.1)–(2.3):

$$(2.7) \quad c = 0.3, \quad c_1 = 5\pi/4, \quad c_2 = 0.5c, \quad c_3 = 0.2c_1, \quad c_4 = 0.05 - 0.07, \quad c_5 = (2.5 - 3)c, \quad c_7 = 0.16 - 0.21$$

При этом для c_6 , как указывалось выше, оценки дать нельзя, поэтому она будет оценена ниже при анализе течения в канале.

С точки зрения замены уравнения для τ соотношением (4.1) представляет интерес зависимость для $\beta(z, R_T)$, которая может быть приближенно получена из уравнения (2.3) для τ , в котором член $c R_T$ не опускается, как ранее. Приравнявая нулю производную от τ по x , получим

$$(2.8) \quad \beta = \frac{2c_7}{\Pi + (\Pi^2 + 4c_7 z^2)^{1/2}}, \quad \Pi = c_5 - c + \frac{c_6 - c_1}{R_T}$$

Анализ зависимости $\beta(z, R_T)$ (2.8) показывает, что при $R_T \ll 1$, $\beta \approx (c_7/c_6)R_T$, а при $R_T \gg 1$ и $z \ll 1$ $\beta \approx c_7/(c_5 - c)$.

Для последующего анализа уравнений в случае неоднородной турбулентности (например, при течении в канале), когда диффузионными членами пренебречь нельзя, вместо масштаба турбулентности L , как будет показано ниже, целесообразно использовать комбинацию $F = E^m L^n$. В рамках бездиффузионного приближения, используя уравнения (2.1), (2.2) для E и L , нетрудно получить уравнение для F

$$(2.9) \quad U \frac{\partial F}{\partial x} = - \left[\left(m - \frac{n}{2} \right) c \sqrt{E} L + \left(m - \frac{n}{5} \right) c_1 v \right] \frac{F}{L^2} + \left(m \frac{\tau}{E} \frac{\partial u}{\partial y} - n c_4 \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right| \right) F$$

Совершенно очевидно, что в случае однородной турбулентности системы уравнений (2.1)–(2.3) и (2.1), (2.3), (2.9) эквивалентны и функция F не имеет никаких преимуществ по сравнению с масштабом турбулентности L . Когда же уравнения будут дополнены диффузионными членами, аппроксимация которых весьма приближена, различие будет существенным.

3. Для учета диффузии характеристик турбулентности в уравнениях (2.1), (2.3) должны быть добавлены новые члены. В настоящей работе используется ставшее уже общепринятым градиентное представление диффузионных членов, согласно которому диффузия какой-либо характеристики турбулентности (обозначим ее Φ) записывается в виде

$$(3.1) \quad \frac{\partial}{\partial y} \left[(\alpha_\Phi \sqrt{E} L + \alpha_\Phi v) \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right]; \quad \Phi = E, \tau, F; \quad \alpha_\Phi, \alpha_\Phi = \text{const}$$

Рассмотрим установившееся течение в канале, когда конвективными членами можно пренебречь. При этом уравнения для E и τ (в плоской геометрии) будут иметь соответственно следующий вид:

$$(3.2) \quad \frac{\partial}{\partial y} \left[(\alpha_E \sqrt{E} L + \alpha_E v) \frac{\partial E}{\partial y} \right] - c \frac{E^{3/2}}{L} - c_1 v \frac{E}{L^2} + \tau \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

$$(3.3) \quad \frac{\partial}{\partial y} \left[(\alpha_\tau \sqrt{E} L + \alpha_\tau v) \frac{\partial \tau}{\partial y} \right] - c_5 \frac{\sqrt{E}}{L} \tau - c_6 v \frac{\tau}{L^2} + c_7 E \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

Для оценки констант в диффузионных членах и константы в вязком члене уравнения для τ рассмотрим три различные области течения в канале: вязкий подслой, логарифмический слой и ядро потока.

В первой области, характеризующейся непосредственной близостью стенки, скорость течения линейно зависит от расстояния до стенки, и главными членами в уравнениях (3.3), (3.4) будут вязкие. Опираясь на известный опытный факт [18, 19], что $E \sim y^2$, из (3.2) следует:

$$(3.4) \quad L = (c_1/2\alpha_E)^{1/2} y = ky$$

Из уравнения для τ (3.3), полагая $\tau \sim y^p$, можно получить связь между константами c_6 и α_τ вида

$$(3.5) \quad c_6 = 0.5p(p-1)c_1\alpha_\tau/\alpha_E$$

Относительно степени p известно, что $p=3 \div 4$. Для $p=3$ согласно (3.5) получается $c_6=3c_1\alpha_\tau/\alpha_E$. Что касается значения $p=4$, то использование оценки (3.5) для c_6 будет неверным, так как в уравнении (3.3) для τ при этом необходимо учитывать член $c_7 E du/\partial y$, имеющий тот же порядок (y^2), что и вязкие члены. В этом случае для c_6 получится следующая оценка:

$$(3.6) \quad c_6 = 6\alpha_\tau/\alpha_E + 0.5c_7\alpha_E E_0/\tau_0$$

Здесь E_0 и τ_0 — коэффициенты в степенных законах изменения E и τ в вязком подслое у стенки, записанных в универсальных координатах.

Если принять константы $\alpha_E = \alpha_\tau = 1$, то для закона изменения $\tau \sim y^3$ получается $c_6 = 3c_1$. Для $\tau \sim y^4$, используя экспериментальные данные [18, 19] для оценки E_0 , эмпирические зависимости Дайслера и Ван-Дриста для τ , согласно которым $\tau_0 \approx 2.4 \cdot 10^{-4}$, а также оценки констант c_1 и c_7 (2.7), получим $c_6 \approx 7c_1$. Масштаб турбулентности в вязком подслое у стенки будет изменяться как $L \approx 1.4y$.

Заметим, что в различных вариантах записи диссипативных членов в уравнениях для тензора напряжений Рейнольдса константы α_E и α_τ могут иметь другие значения.

Область логарифмического слоя характеризуется тем, что скорость течения изменяется в ней по логарифмическому закону

$$(3.7) \quad u_+ = \frac{1}{\kappa} \ln y_+ + C, \quad u_+ = \frac{u}{u_*}, \quad y_+ = \frac{yu_*}{\nu}$$

Здесь $u_* = \sqrt{\tau_w/\rho}$ — динамическая скорость, $\kappa = 0.4$ — постоянная Кармана, $C = 5.2 - 5.5$, а энергия турбулентности E и напряжение трения τ практически постоянны [18, 20]. Последнее означает, что диффузионными членами в уравнениях для E и τ можно пренебречь, и это подтверждается измерениями составляющих баланса энергии турбулентности в этой области [18].

Из уравнения для E (3.2), в котором оставлены только члены с порождением и диссипацией (при $R_\tau \gg 1$) энергии турбулентности, следует, что

$$(3.8) \quad L = \frac{cE^{1/2}}{\tau \partial u/\partial y} = c\kappa \frac{(\sqrt{E}/u_*)_l}{(\tau/E)_l} = k_l y$$

Здесь индекс l соответствует значению величины в логарифмическом слое.

В уравнении для τ (3.3) следует удержать члены с порождением и полной диссипацией, поскольку, как показано выше, $c_6 > c_1$ и член $c_6 \nu \tau/L^2$ при числах R_τ , характерных для логарифмического слоя, будет одного порядка с членами $c_1 \tau \sqrt{E}/L$ и $c_7 E du/\partial y$. Из уравнения (3.3) в логарифмиче-

ском слое с использованием выражения для L , полученного выше, можно оценить константу c_6

$$(3.9) \quad c_6 = c^2 \kappa \frac{(E/u_*^2)_i}{(\tau/E)_i} \left[\frac{c_7}{(\tau/E)_i^2} - \frac{c_5}{c} \right] y_+$$

Подставляя в выражения для c_6 и L значения констант, а также величины τ и E в логарифмическом слое из экспериментов [18, 20], получим $L \approx 1.1y$, $c_6 \approx 0.55y_+$. Для $y_+ = 50-100$, соответствующего области логарифмического слоя, получаем при этом $c_6 \approx (7-14)c_1$.

Таким образом, значение константы c_6 по оценкам в логарифмическом слое оказалось больше величины $3c_1$, соответствующей закону изменения τ в вязком подслое у стенки y^3 . Это означает, что уравнение для τ (3.3) при данном наборе констант отвечает закону изменения τ со степенью, близкой к 4.

В области развитого течения в канале вязкими членами в обоих уравнениях (3.2) и (3.3) можно пренебречь. Что же касается диффузионных членов, то они хоть и малы, но все же играют заметную роль в общем балансе [18], особенно вблизи оси симметрии. Результаты измерений распределения E и τ в каналах [18] свидетельствуют о том, что в средней части канала ($0.3 \leq y/h \leq 0.6$, где h — радиус или полуширина канала) с достаточной точностью выполняется соотношение $\tau/E = \text{const}$. Используя эту закономерность, можно установить связь между константами a_E и a_τ в уравнениях (2.2), (2.3), а именно: $a_\tau = (c_5/c)a_E$. При этом можно также получить выражение для отношения τ к E в ядре потока через входящие в уравнения константы c , c_5 , c_7 : $\tau/E = (cc_7/c_5)^{1/2}$. При подстановке значений указанных констант (см. п. 2) в это выражение получим $\tau/E \approx 0.26$, что соответствует экспериментальным данным. Это свидетельствует о правильном выборе констант c , c_5 , c_7 , полученных из анализа развития решеточной турбулентности в потоке с постоянным градиентом скорости.

Таким образом, из анализа экспериментальных данных по развитому течению в канале получены следующие оценки для констант в диффузионных членах уравнений для E и τ (3.2), (3.3) и константы c_6 :

$$(3.10) \quad \alpha_E = \alpha_\tau = 1, \quad a_\tau = (c_5/c)a_E = (2.5-3)a_E, \quad c_6 = (7-14)c_1$$

Константа a_E должна быть определена путем подбора из условий совпадения результатов расчета с экспериментальными данными по течению в канале.

4. Использование представления (3.1) для диффузионных членов в уравнениях для E и τ , вообще говоря, известно, и имеющиеся к настоящему времени расчеты, а также проведенный выше анализ уравнений для E и τ в различных частях канала свидетельствуют о правильном описании основных особенностей потоков с переменным градиентом скорости при наличии стенок.

Что же касается функции $F = E^m L^n$, то при различных m и n уравнения для F в неоднородных потоках становятся неэквивалентными. В связи с этим возникает вопрос: какая комбинация для F с точки зрения записи диффузионного члена в виде (3.1) является более предпочтительной?

Чтобы ответить на этот вопрос, проанализируем уравнение для F , которое в случае развитого течения в канале будет иметь следующий вид:

$$(4.1) \quad \frac{\partial}{\partial y} \left[(a_F \sqrt{EL} + \alpha_F \nu) \frac{\partial F}{\partial y} \right] - \left(m - \frac{n}{2} \right) c \frac{\sqrt{E}}{L} F - \\ - \left(m - \frac{n}{5} \right) c_1 \nu \frac{F}{L^2} + \left(m \frac{\tau}{E} - nc_4 \right) F \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

При этом рассмотрим комбинации для $F=E^m L^n$, которые использовались ранее (см., например, обзор в [3]): L , L^2 , $E^{1/2}L$, EL , $E^{1/2}L^{-1}$, EL^2 , $E^{1/2}L^{-1}$, E^2L^{-1} , а также величину диссипации энергии турбулентности ε , которая в уравнении для E (2.1) представлена в виде $\varepsilon=cE^{3/2}L^{-1}+c_1\sqrt{EL}^{-2}$, т. е. по существу представляет собой комбинацию из перечисленных выше выражений для F .

Анализ будем проводить для тех же областей течения в канале, что и в п. 3 при рассмотрении уравнений для E и τ . При этом основным требованием будет положительное значение констант a_F и α_F , а также отсутствие особенностей в вязких членах при рассмотрении течения в вязком подслое у стенки.

В ядре потока, как отмечалось выше, существует приблизительное равновесие между процессами турбулентной диффузии и диссипации (турбулентной ее части). Удерживая в уравнениях для E и F (3.2), (4.1) соответствующие члены и полагая, что в приосевой области коэффициент турбулентной диффузии $D\sim\sqrt{EL}$ (который пропорционален коэффициенту турбулентной вязкости $\nu_T=\beta\sqrt{EL}$, где $\beta=\text{const}$ в этой области) согласно [21] постоянен, можно установить связь между константами a_F и a_E

$$(4.2) \quad a_F = a_E(2m+1)/(2m-n)$$

Из (4.2) видно, что из условия $a_F > 0$ при $m \geq 0$ следует неравенство $n < 2m$. Этому неравенству из перечисленных выше комбинаций F удовлетворяют только EL , а также комбинации с $n < 0$, т. е. с L в знаменателе. Остальные комбинации (любые с $m=0$, $n > 0$) и $E^{1/2}L$, которой соответствует нулевая диффузия в приосевой области, при $a_F > 0$ будут давать неверное описание диффузионных процессов вблизи оси, а следовательно, и поведения характеристик турбулентности. Изменить эту ситуацию можно путем введения в диффузионный член соответствующих эмпирических функций или записи дополнительных членов, что неоправданно усложняет уравнение для F .

В логарифмическом слое, как отмечалось выше, в уравнении энергии турбулентности диффузионным членом можно пренебречь.

В уравнении для F этого сделать нельзя, поскольку масштаб турбулентности в логарифмическом слое согласно (3.8) не постоянен. Из уравнения (4.1) с использованием выражения (3.8) для L , а также закона (3.7) для профиля скорости в логарифмическом слое можно получить выражение для коэффициента a_F

$$(4.3) \quad a_F = -\frac{1}{n} \frac{1}{c\kappa^2} \frac{(\tau/E)_i}{(E/u_*^2)_i} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\tau}{E} \right)_i - c_i \right]$$

Интересной особенностью полученного выражения для a_F является то, что оно не зависит от степени m в комбинации $F=E^m L^n$, т. е. определяющим в этой области течения является знак показателя n . Действительно, поскольку согласно опытным данным [18, 20] в логарифмическом слое $(\tau/E)_i \approx 0.23$, а по оценкам для однородной турбулентности (п. 2) $c_i \approx 0.06$, т. е. $0.5(\tau/E)_i - c_i > 0$, то знак a_F зависит от знака показателя n . Из (4.3) видно, что при $n > 0$, константа $a_F < 0$. Чтобы $a_F > 0$, необходимо либо изменить константу c_i в уравнении для F ($c_i > 0.5(\tau/E)_i \approx 0.12$), либо ввести в диффузионный член эмпирическую функцию, либо дополнить уравнение для F новыми членами.

Таким образом, комбинации для F , в которых L стоит в числителе, т. е. $n > 0$, с этой точки зрения неприемлемы. Поскольку для комбинаций с $n < 0$ эта трудность не возникает и они удовлетворяют также соотношению для

a_F (4.2), полученному в приосевой области, то ниже будут рассматриваться только комбинации для F , в которых L стоит в знаменателе.

Удерживая в уравнении для F (4.1) только вязкие члены и используя полученную из анализа уравнения для E в вязком подслое (при условии $E \sim y^2$) зависимость для L (3.4), можно оценить порядок члена, описывающего вязкую диссипацию F

$$(4.4) \quad \left(m - \frac{n}{5}\right) c_1 \nu \frac{F}{L^2} \sim y^{2m+n-2}$$

Из (4.4) видно, что из условия убывания или конечности диссипативного члена при приближении к стенке ($y \rightarrow 0$) следует неравенство $m \geq 1 - 0.5n$. При $n < 0$ это означает, что такие комбинации, как, например, $E^{1/2}L^{-1}$ и EL^{-2} , без введения поправок у стенок будут иметь особенность. Для комбинаций, удовлетворяющих неравенству $m \geq 1 - 0.5n$, например E^2L^{-1} и E^2L^{-1} , диссипативный член не имеет особенности на стенке.

Для дальнейшего рассмотрения из двух групп комбинаций, удовлетворяющих и не удовлетворяющих неравенству $m \geq 1 - 0.5n$, выберем следующие: $f = E^{3/2}L^{-1}$ и $\omega = EL^{-2}$. Первая представляет собой величину, пропорциональную диссипации энергии турбулентности ϵ при $R_T \gg 1$ ($\epsilon = cf$), а вторая является характерной величиной квадрата частоты турбулентности, введенной А. Н. Колмогоровым [8].

Уравнения для E и f в вязком подслое при использовании подстановки $L = E^{3/2}/f$ будут иметь вид (штрих — производная по координате y)

$$(4.5) \quad \alpha_E \nu E'' = c_1 \nu \frac{f^2}{E^2}, \quad \alpha_f \nu f'' = 1.7 c_1 \nu \frac{f^3}{E^3}$$

Из уравнений (4.5) при условии, что $E \sim y^2$, следует $\alpha_f = 1.7 \alpha_E$. Используя связь между константами α_f и α_E , можно получить решение уравнений (4.5) для E и f в вязком подслое (все величины безразмерные)

$$(4.6) \quad E = \frac{c_1}{\alpha_E} \frac{p^2}{2} (y^2 + qy), \quad f = \frac{c_1}{\alpha_E} \frac{p^3}{2} (y^2 + qy)$$

Здесь p и q — константы, две другие константы определены из граничных условий: $E = f = 0$ при $y = 0$.

Из (4.6) видно, что решение для E в вязком подслое содержит не только квадратичный член, который отвечает экспериментальным данным, но и линейный. В общем случае константа q , которая должна определяться заданием граничного условия на другой границе (в канале — это ось симметрии), не обязательно будет равна нулю. Поэтому чтобы гарантированно выделить решение с $E \sim y^2$, наряду с соотношением для α_f необходимо в уравнении для E (3.2) в пределах вязкого подслоя (т. е. в члене $c_1 \nu E/L^2$, который там является главным) использовать соотношение (3.4) для L .

Следует отметить, что соотношение (3.4), вообще говоря, может не потребоваться в случае другой комбинации для F , например E^2L^{-1} или E^3L^{-2} , поскольку при этом $F/E \neq \text{const}$, как в решении (4.6).

Уравнения для E и ω вблизи стенки имеют вид

$$(4.7) \quad \alpha_E \nu E'' = c_1 \nu E/L^2, \quad \alpha_\omega \nu \omega'' - c \omega^2 = 1.4 c_1 \nu \omega/L^2 + c_4 \omega u'$$

При $L \sim y$ и $E \sim y^2$ величина ω/L^2 в члене с вязкой диссипацией имеет особенность при $y = 0$. Этой особенности можно избежать, если в уравнении для ω диссипативный член представить в виде $1.4 c_1 \nu (\omega - \omega_0)/L^2$. Здесь ω_0 — значение ω на стенке, которое определяется из уравнения для E

$$(4.8) \quad \omega_0 = \frac{1}{2} \frac{\alpha_E}{c_1} \frac{E'^2}{E}$$

Отметим, что при $E' = 0$ $\omega_0 = 0$ и оба представления для диссипативного члена тождественно совпадают. Константа α_ω в диффузионном члене уравнения для ω

может быть оценена следующим образом. Приравнивая члены с вязкостью в уравнении для ω у стенки (4.7) и представляя ω в виде $\omega = \omega_0 + \omega_1 y^p$, получим, что минимальное целое значение $p=2$, а $\alpha_\omega = 1.4\alpha_E$.

Таким образом, из анализа течения в канале для комбинаций $f = E^{3/2}/L$ и $\omega = E/L^2$ получим следующие оценки констант в диффузионном члене уравнения для F (4.1):

$$a_F = a_E = 0.05 \div 0.1 \quad (F = f, \omega); \quad \alpha_f = 1.7\alpha_E; \quad \alpha_\omega = 1.4\alpha_E$$

Если рассматривать течения только при больших числах Рейнольдса турбулентности R_r , когда вязкими членами в уравнениях можно пренебречь, то, по-видимому, нельзя отдать предпочтение какой-либо комбинации для F с $n < 0$. Применительно к течению в канале это означает, что граничные условия должны задаваться вне вязкого подслоя (например, в логарифмическом слое). Возможности такого подхода реализованы в [22], где для комбинации $E^{3/2}/L$ проведены расчеты широкого класса течений и получены вполне удовлетворительные результаты.

5. Система уравнений движения и величин E , τ , f или ω для развитого течения в канале имеет следующий вид:

$$(5.1) \quad \frac{1}{R} \frac{du}{dy} = r - \tau, \quad y = 1 - r$$

$$(5.2) \quad \frac{1}{r^i} \frac{d}{dy} \left(r^i D_E \frac{dE}{dy} \right) - \left(\frac{c_1}{R.L^2} + c \frac{\sqrt{E}}{L} \right) E = -\tau \frac{du}{dy}$$

$$(5.3) \quad \frac{1}{r^i} \frac{d}{dy} \left(r^i D_\tau \frac{d\tau}{dy} \right) - i \frac{D_\tau}{r^2} \tau - \left(\frac{c_6}{R.L^2} + c_5 \frac{\sqrt{E}}{L} \right) \tau = -c_7 E \frac{du}{dy}$$

$$(5.4) \quad \frac{1}{r^i} \frac{d}{dy} \left(r^i D_f \frac{df}{dy} \right) - \left(\frac{1.7c_1}{R.L^2} + 2c \frac{\sqrt{E}}{L} \right) f = - \left(\frac{3}{2} \frac{\tau}{E} + c_4 \right) f \frac{du}{dy}$$

$$(5.5) \quad \frac{1}{r^i} \frac{d}{dy} \left(r^i D_\omega \frac{d\omega}{dy} \right) - \left\{ \frac{1.4c_1}{R.L^2} \left[\omega - \frac{1}{2} \frac{\alpha_E}{c_1 E} \left(\frac{dE}{dy} \right)^2 \right] + 2c \frac{\sqrt{E}}{L} \right\} \omega = - \left(\frac{\tau}{E} + 2c_4 \right) \omega \frac{du}{dy}$$

Здесь $L = E^{3/2}/f$ или $L = (E/\omega)^{1/2}$; $D_\Phi = a_\Phi \sqrt{EL} + \alpha_\Phi/R$, $\Phi = E, \tau, f, \omega$; $i=0$ соответствует плоскому каналу, $i=1$ — осесимметричному.

Система (5.1) — (5.5) записана в безразмерном виде. В качестве характерной длины выбрана полуширина h или радиус r_0 канала, а в качестве характерной скорости — динамическая скорость $u_*^2 = |dP/dx| h/2^i$, $R_* = h u_* / \nu$ — число Рейнольдса, определенное по u_* .

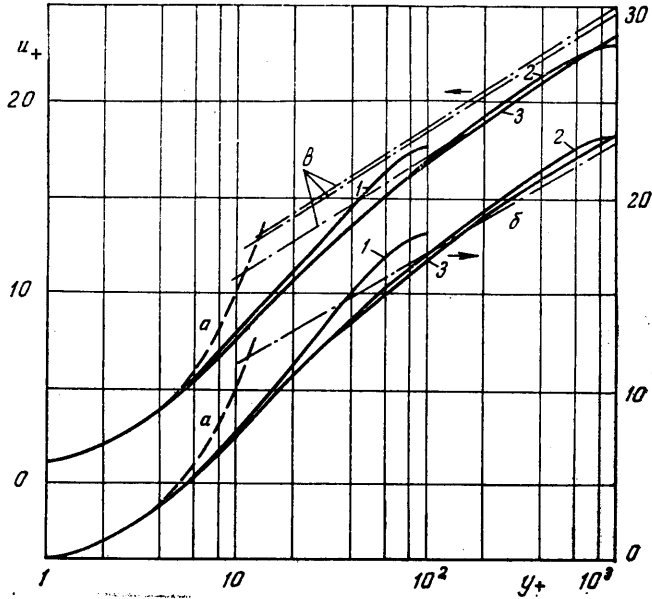
Граничные условия в рассматриваемом случае будут иметь следующий вид.

На оси канала ($y=1$) из условия симметрии

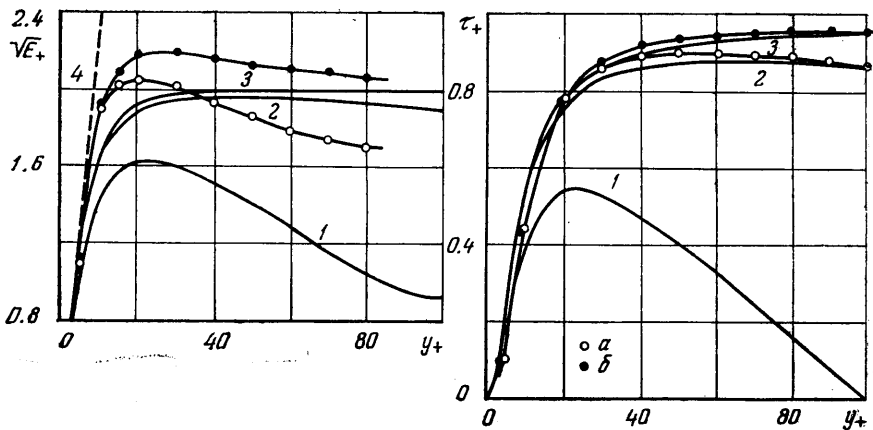
$$(5.6) \quad E'(1) = f'(1) = \omega'(1) = 0, \quad \tau(1) = 0$$

На стенке канала ($y=0$) в зависимости от того, какая функция (f или ω) используется в расчете, граничные условия задаются по-разному. В случае системы (E, τ, f)

$$(5.7) \quad E(0) = \tau(0) = f(0) = 0$$



Фиг. 1



Фиг. 2

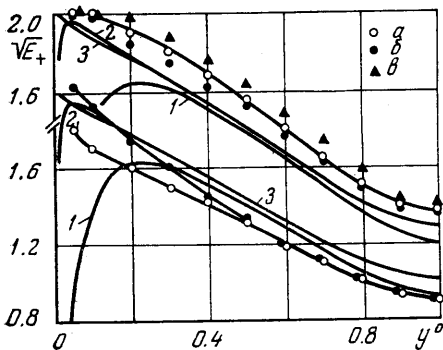
При этом константы в уравнениях для E и f (5.2), (5.4) подобраны таким образом, чтобы при приближении к стенке ($y \rightarrow 0$) $E \sim y^2$ и $f \sim y^2$. В случае системы (E, τ, ω) , чтобы обеспечить требуемый порядок стремления к нулю энергии турбулентности E , необходимо выставить следующее граничное условие:

$$(5.8) \quad E(0) = E'(0) = \tau(0) = 0$$

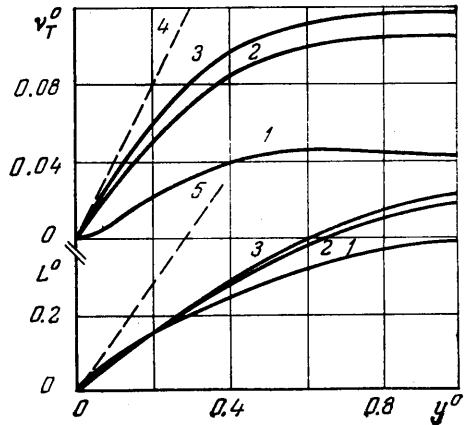
При этом величина $\omega(0) = \omega_0$ находится только после решения задачи. Согласно проведенным в п. 2—4 оценкам были взяты следующие константы, входящие в уравнения (5.2) — (5.5):

$$(5.9) \quad c = 0.3, \quad c_1 = 5\pi/4, \quad c_4 = 0.04, \quad c_5 = 3c, \quad c_6 = 9c_1, \quad c_7 = 0.2$$

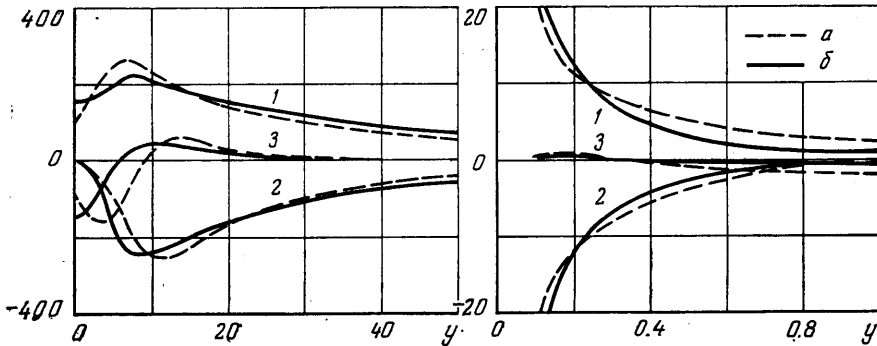
$$\alpha_E = \alpha_\tau = 1, \quad \alpha_f = 1.7\alpha_E, \quad \alpha_\omega = 1.4\alpha_E, \quad a_\tau = (c_5/c)a_E, \quad a_E = a_f = a_\omega = 0.06$$



Фиг. 3



Фиг. 5



Фиг. 4

Константы c_4 , c_6 и a_E , для которых оценки получены весьма приближенно, подбирались из условия наилучшего совпадения результатов расчета с экспериментальными данными [18, 20] в пределах полученного по оценкам диапазона изменения.

Система уравнений (5.2)–(5.4) или (5.5) с граничными условиями (5.6), (5.7) или (5.8) соответственно при значениях констант (5.9) решалась численно. Для системы (E, τ, f) применялся метод прогонки с итерациями, в случае системы (E, τ, ω) — метод матричной прогонки с итерациями. Уравнения для E и ω в последнем случае решались совместно, так как граничные условия (5.8) на стенке канала выставлены только для энергии турбулентности E , а ω_0 определяется из решения задачи. После каждой итерации путем интегрирования уравнения движения (5.1) с граничным условием $u(0)=0$ находилось распределение средней скорости. Наличие малого параметра R_*^{-1} при старшей производной в уравнениях потребовало неравномерной сетки. Шаг по координате y был достаточно малым у стенки ($\Delta y = 0.976 \cdot 10^{-5}$) и увеличивался по мере приближения к оси симметрии ($\Delta y = 0.04$). Число итераций колебалось от 40 до 90. В качестве параметра в расчетах использовалась величина R_* . Затем по найденному решению определялась среднерасходная скорость U , по которой вычислялось число Рейнольдса $\bar{R} = 2hU/\nu$ (или $R = 2r_0U/\nu$).

Расчеты были проведены как для круглой трубы, так и для плоского канала. Результаты расчета и сравнение с экспериментальными данными [18, 20] представлены на фиг. 1–5. Расчеты проводились по двум системам уравнений $((E, \tau, f)$ и $(E, \tau, \omega))$, и результаты оказались близкими. Поэтому на графиках приведены результаты расчета по одной из систем уравнений — (E, τ, ω) . Поскольку для круглой трубы экспериментальные данные [18] в пристеночной области оказались более обширными, то сравнение расчетов с экспериментом сделано более детальное, чем для плоского канала.

На фиг. 1 представлены профили скорости при течении в круглой трубе (нижние кривые) и в плоском канале (верхние кривые): $a - u_+ = y_+$; $b - u_+ = 5.75 \lg y_+ + 5.5$; $c - u_+ = K \lg y_+ + C$ для $R_* = 2300, 4800, 8200$ по экспериментальным данным [20]. Расчетные кривые 1, 2, 3 на фиг. 1-3, 5 соответствуют $R_* = 10^2, 10^3, 10^4$. На фиг. 2 приведено изменение энергии турбулентности $\sqrt{E_+} = \sqrt{E}/u_*$ и турбулентного трения $\tau_+ = \tau/u_*^2$ в пристенной области круглой трубы: $a, b - R_* = 1150, 8750$ (экспериментальные данные [18]), $4 - E_+ = 0.05 y_+^2$. На фиг. 3 (нижние кривые) показано изменение энергии турбулентности в ядре потока круглой трубы (обозначения те же, что и на фиг. 2). На фиг. 4 приведен баланс энергии турбулентности в круглой трубе: 1 — диссипация, 2 — порождение, 3 — диффузия; a — эксперимент [18] при $R_* = 1150$; b — расчет при $R_* = 10^3$. На фиг. 5 в качестве иллюстрации представлены результаты расчета для круглой трубы коэффициента турбулентной вязкости $\nu_T^\circ = \nu_T/u_* r_0$ ($\nu_T = \tau/(\partial u/\partial y)$) и масштаба турбулентности $L^\circ = L/r_0$, широко используемых в различных полуэмпирических теориях ($4 - \nu_T^\circ = 0.4y^\circ$, $5 - L^\circ = 1.4y^\circ$). Как видно, характер изменения их вполне соответствует общепринятым представлениям. На фиг. 3 (верхние кривые) приведено изменение энергии турбулентности в ядре потока плоского канала: $a, b, c - R_* = 2300, 4800, 8200$ (эксперимент [20]).

Проведенное сравнение результатов расчета с экспериментальными данными по течению как в круглом, так и в плоском канале вполне удовлетворительное.

Подводя итоги проверки предложенной модели турбулентности, можно отметить следующее. Модель турбулентности для трех величин (E, L, τ) позволяет описать развитие решеточной турбулентности в потоке с постоянным (в том числе и с нулевым) градиентом средней скорости [7]. При этом удается объяснить и описать такой нетривиальный результат [17], как рост энергии турбулентности на больших расстояниях от решетки в потоке с постоянным градиентом скорости. В части расчета характеристик турбулентности при течении в каналах, где при помощи известных моделей (например, [23]) не удастся без изменения констант в уравнениях описать плоские и осесимметричные течения, также получены удовлетворительные результаты. Расчеты течения в плоском канале, выполненные в [24] с использованием предложенной модели турбулентности, в настоящей работе обобщены на случай течения в круглой трубе.

Таким образом, есть основания надеяться, что течения, представляющие собой комбинации из перечисленных выше классов течений, для которых проверена предложенная модель, также будут описываться в рамках этой модели.

Авторы благодарят В. М. Иевлева и участников семинаров Г. Н. Абрамовича и Г. А. Любимова за обсуждение работы.

Поступила 27 IX 1977

ЛИТЕРАТУРА

1. Монин А. С., Яглом А. М. Статистическая гидромеханика, ч. 1, М., «Наука», 1965.
2. Bradshaw P. The understanding and prediction of turbulent flow. Aeron. Journal, 1972, vol. 76, No. 739.
3. Launder B. E., Spalding D. B. Lectures in mathematical models of turbulence. London — New York, Acad. Press., 1972.
4. Mellor G. L., Herring H. J. A survey of the mean turbulent field closure models. AIAA Journal, 1973, vol. 11, No. 5.
5. Иевлев В. М. Турбулентное движение высокотемпературных сплошных сред. М., «Наука», 1975.
6. Абрамович Г. Н., Крашенинников С. Ю., Секундов А. Н. Турбулентные течения при воздействии объемных сил и неавтомоделности. М., «Машиностроение», 1975.
7. Павельев А. А. Развитие решеточной турбулентности в потоке с постоянным градиентом скорости. Изв. АН СССР, МЖГ, 1974, № 1.
8. Колмогоров А. Н. Уравнения турбулентного движения несжимаемой жидкости. Изв. АН СССР, Сер. физ., 1942, т. 6, № 1-2.
9. Prandtl L. Über ein penes Formelsystem für die ausgebildete Turbulenz. Nachr. Ges. Göttingen, Math. Phys., 1945, H. 6.

10. Глушко Г. С. Турбулентный пограничный слой на плоской пластине в несжимаемой жидкости. Изв. АН СССР, Механика, 1965, № 4.
11. Глушко Г. С. Некоторые особенности турбулентных течений несжимаемой жидкости с поперечным сдвигом. Изв. АН СССР, МЖГ, 1974, № 4.
12. Rotta J. Statistische Theorie nichthomogener Turbulenz. Z. Physik, 1951, Bd 129, Nr 5, Bd 131, Nr 1.
13. Давыдов Б. И. К статистической динамике несжимаемой турбулентной жидкости. Докл. АН СССР, 1959, т. 127, № 4.
14. Batchelor G. K., Townsend A. A. Decay of turbulence in the final period. Proc. Roy. Soc. London, Ser. A, 1948, vol. 194, No. 1039.
15. Batchelor G. K., Townsend A. A. Decay of isotropic turbulence in the initial period. Proc. Roy. Soc. London, Ser. A, 1948, vol. 193, No. 1035.
16. Uberoi M. S. Equipartition of energy and local isotropy in turbulent flows. J. Appl. Phys., 1957, vol. 28, No. 10.
17. Richards H. K., Morton J. B. Experimental investigation of turbulent shear flow with quadratic mean-velocity profiles. J. Fluid Mech., 1976, vol. 73, pt 1.
18. Laufer J. The structure of turbulence in fully developed pipe flow. NASA Rept, 1954, No. 1174.
19. Хабахнашева Е. М., Михайлова Е. С., Перепемиза Б. В., Ефименко Г. И. Экспериментальное исследование структуры пристенной турбулентности. В сб. «Пристенное турбулентное течение», ч. 2. Новосибирск, Ин-т теплофизики СО АН СССР, 1975.
20. Конт-Белло Ж. Турбулентное течение в канале с параллельными стенками. М., «Мир», 1968.
21. Хинце И. О. Турбулентность. М., Физматгиз, 1963.
22. Hanjalic K., Launder B. E. A Reynolds stress model of turbulence and its application to thin shear flows. J. Fluid Mech., 1972, vol. 52, pt 4.
23. Секундов А. Н. Применение дифференциального уравнения для турбулентной вязкости к анализу плоских неавтономных течений. Изв. АН СССР, МЖГ, 1971, № 5.
24. Луцник В. Г., Павельев А. А., Якубенко А. Е. Модель сдвиговой турбулентности. 4-й Всесоюз. съезд по теорет. и прикл. механ. (Аннот. докл.). Киев, «Наукова думка», 1976.