

О РАЗВИТИИ ПЕРВОНАЧАЛЬНО ЛОКАЛИЗОВАННОГО
ВОЗМУЩЕНИЯ ПРИ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ ХОЛОДНОГО ПУЧКА
С ДИЭЛЕКТРИКОМ

В. А. КОНДРАШЕВ

(Москва)

Рассматривается однородный диэлектрик с проходящим через него холодным пучком заряженных частиц, имеющих скорость, большую скорости электромагнитных волн в диэлектрике. Установлена неустойчивость малых возмущений в виде плоской волны. Исследуется структура возмущенного состояния, развившегося из малой области пространства.

1. Невозмущенное состояние пучка характеризуется плотностью заряда ρ_0 и скоростью v_0 , не зависящими от координат и времени. Наряду с электронным предполагается существование ионного пучка равной скорости и плотности заряда $\rho_i = -\rho_0$. В дальнейшем считается, что ионный пучок в силу большой массы его частиц не участвует в процессе колебаний.

Запишем линеаризованные уравнения для скалярного Φ и векторного A потенциалов в виде [1]

$$(1.1) \quad \begin{aligned} \Delta A - \frac{1}{s^2} \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} &= -\frac{4\pi}{c} (\rho_0 v + V_0 \rho) \\ \Delta \Phi - \frac{1}{s^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} &= -\frac{4\pi}{\epsilon} \rho, \quad s = \frac{c}{\sqrt{\epsilon}} \end{aligned}$$

Здесь ρ и v — отклонения плотности и скорости электронного пучка от невозмущенных значений, ϵ — диэлектрическая проницаемость.

Векторы E и B электрического поля и магнитной индукции связаны с A и Φ соотношениями [1]

$$(1.2) \quad E = -\text{grad } \Phi - \frac{1}{c} \frac{\partial A}{\partial t}, \quad B = \text{rot } A$$

Выберем декартову систему координат, в которой вектор V_0 не имеет проекции на ось z . Обозначая через α угол между осью x и V_0 , для проекций на оси x и y имеем $V_x = V_0 \cos \alpha$, $V_y = V_0 \sin \alpha$.

Рассмотрим возмущения скорости, плотности и электромагнитного поля, не зависящие от y и z . Уравнения неразрывности и движения для электронов можно записать в виде

$$(1.3) \quad \begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} + V_0 \cos \alpha \frac{\partial v}{\partial x} &= -\frac{e}{m} \left(\frac{1}{c} \frac{\partial A}{\partial t} + \text{grad } \Phi \right) + \frac{e V_0 \times \text{rot } A}{mc} \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + V_0 \cos \alpha \frac{\partial \rho}{\partial x} &= -\rho_0 \frac{\partial v_x}{\partial x} \end{aligned}$$

Уравнения (1.1) и (1.3) образуют замкнутую систему относительно A , Φ , v , ρ . Будем искать решение этой системы в виде плоских волн, за-

висящих только от x и t , как

$$u = u'(\omega, k) \exp(ikx - i\omega t).$$

Здесь ω и k — некоторые комплексные числа, которые будут определены в дальнейшем. После сокращения на экспоненциальный множитель система (1.1), (1.3) сводится к линейной алгебраической относительно величин, помеченных штрихом

$$(1.4) \quad \begin{aligned} \left(\frac{\omega^2}{s^2} - k^2\right) A_x' &= -\frac{4\pi}{c} (\rho_0 v_x' + V_0 \rho' \cos \alpha), \\ \left(\frac{\omega^2}{s^2} - k^2\right) A_y' &= -\frac{4\pi}{c} (\rho_0 v_y' + V_0 \rho' \sin \alpha) \\ \left(\frac{\omega^2}{s^2} - k^2\right) \Phi' &= -\frac{4\pi \rho'}{\varepsilon}, \quad \left(\frac{\omega^2}{s^2} - k^2\right) A_z' = -\frac{4\pi}{c} \rho_0 v_z' \\ (\omega - kV_0 \cos \alpha) v_x' &= -\frac{e}{mc} (\omega A_x' - kc\Phi' + kV_0 A_y' \sin \alpha) \\ (\omega - kV_0 \cos \alpha) v_y' &= -\frac{e}{mc} (\omega A_y' - kV_0 A_x' \cos \alpha) \\ (\omega - kV_0 \cos \alpha) v_z' &= -\frac{e}{mc} (\omega A_z' - kV_0 A_z' \cos \alpha), \\ (\omega - kV_0 \cos \alpha) \rho' &= k\rho_0 v_x' \end{aligned}$$

Решение в виде плоских волн отлично от нуля, только если определитель (1.4) равен нулю. Для этого достаточно выполнения одного из равенств $\omega^2/s^2 - k^2 = 0$, $\omega - kV_0 \cos \alpha = 0$, первое из которых соответствует световой волне, а второе — волне, распространяющейся вместе с пучком.

Тогда действительным k отвечают действительные ω и плоские волны не нарастают по времени. В дальнейшем предполагается, что $\omega^2/s^2 - k^2 \neq 0$, $\omega - kV_0 \cos \alpha \neq 0$.

Рассмотрим также ненулевое решение (1.4) с $\rho' = 0$.

Из (1.4) следует при этом система

$$\begin{aligned} (\omega^2 - k^2 s^2 - \omega_b^2) A_y' &= 0, \quad \omega_b^2 = \frac{4\pi \rho_0 e}{m\varepsilon} \\ A_y' \frac{e}{mc} + v_y' &= 0, \quad (\omega^2 - k^2 s^2 - \omega_b^2) A_z' = 0 \\ A_z' \frac{e}{mc} + v_z' &= 0, \quad \Phi' = A_x' = v_x' = 0 \end{aligned}$$

которая определяет при $\text{Im } k = 0$ колебания с $\text{Im } \omega = 0$, причем выполнено $\omega^2 - k^2 s^2 - \omega_b^2 = 0$.

Этот случай для исследования неустойчивости несуществен, поэтому далее $\rho' \neq 0$, $\omega^2 - k^2 s^2 - \omega_b^2 \neq 0$. Для нахождения дисперсионного соотношения все неизвестные с помощью уравнений (1.4) были выражены через величину ρ' с коэффициентами, зависящими от ω и k , например для A_x' и A_y' получено

$$(\omega^2 - k^2 s^2) A_x' = -\frac{4\pi s^2 \omega}{ck} \rho', \quad (\omega^2 - k^2 s^2 - \omega_b^2) A_y' = -\frac{4\pi V_0 s^2}{c} \sin \alpha \rho'$$

Все найденные формулы были подставлены в уравнение движения для v_x' , и проведено сокращение на $\rho' \neq 0$. В результате получили дисперсионное соотношение

$$(1.5) \quad \omega^2 - k^2 s^2 - \omega_b^2 + \frac{V_0^2 k^2 \omega_b^2 \sin^2 \alpha}{\omega_b^2 - (\omega - kV_0 \cos \alpha)^2} = 0$$

Соотношение (1.5) определяет комплексную четырехзначную функцию $\omega = \omega(k)$. Используя график зависимости $\omega = \omega(k)$, можно показать, что при $V_0 > s$ на действительной прямой k найдется отрезок $[k_1, k_2]$, внутри которого имеются два вещественных и два комплексно-сопряженных корня $\omega = \omega(k)$, что обуславливает неустойчивость системы. Если $\alpha = 0$ или $V_0 \leq s$, можно убедиться в том, что вещественным k всегда соответствуют вещественные ω и колебания устойчивы.

2. Наряду с обыкновенными плоскими волнами представляет интерес рассмотреть развитие возмущения, первоначально отличного от нуля внутри малой окрестности фиксированной точки. Как известно, первоначально локализованное возмущение, представленное интегралом Фурье [2]

$$u(x, y, z, t) = \int \exp[i(\mathbf{k}\mathbf{r}) - i\omega(\mathbf{k})t] d\mathbf{k}, \quad (\mathbf{k}\mathbf{r}) = k_1 x + k_2 y + k_3 z$$

и рассматриваемое вдоль лучей $x = Ut$, $y = Vt$, $z = Wt$, при $t \rightarrow \infty$ можно оценить, воспользовавшись методом перевала [2]. Для этого необходимо найти точки перевала функции

$$(2.1) \quad \omega' = \omega(k_1, k_2, k_3) - k_1 U - k_2 V - k_3 W$$

Здесь $\omega = \omega(k)$ — дисперсионное уравнение возмущений. При этом главный член асимптотики рассматриваемого возмущения дается формулами [2]

$$(2.2) \quad u \sim \exp [t \operatorname{Im} \omega'(U, V, W) - 3/2 \ln t]$$

$$(2.3) \quad \frac{\partial \omega(k_1, k_2, k_3)}{\partial k_1} = U, \quad \frac{\partial \omega(k_1, k_2, k_3)}{\partial k_2} = V, \quad \frac{\partial \omega(k_1, k_2, k_3)}{\partial k_3} = W$$

Для получения функции $\omega'(U, V, W)$ значения $k_{1,2,3}$ должны быть найдены из уравнений (2.3), задающих точки перевала функции $\omega'(k, U, V, W)$ на комплексных плоскостях k_1, k_2, k_3 , и затем подставлены в выражение (2.1). В пространстве скоростей можно указать области роста возмущения, для которых существует хотя бы одна точка перевала с $\operatorname{Im} \omega' > 0$, а также области затухания, в которых для всех точек перевала $\operatorname{Im} \omega' \leq 0$.

Практическое применение указанной методики для выяснения асимптотического поведения возмущений при $t \rightarrow \infty$ связано с трудностями, так как нахождение точки перевала функции (2.1) представляет собой сложную задачу, решаемую в общем случае численно. Цель этого пункта — развитие аналитического метода, пригодного для решения поставленной выше задачи.

Обозначая $k_1 = k \cos \alpha$ — продольную, $k_2 = k \sin \alpha$ — поперечную составляющие вектора \mathbf{k} по отношению к V_0 , перепишем (1.5) в виде

$$(2.4) \quad \omega^2 - k^2 s^2 - \omega_b^2 + \frac{V_0^2 k^2 \omega_b^2}{\omega_b^2 - (\omega - kV_0)^2} = 0, \quad k^2 = k_1^2 + k_2^2$$

С учетом осевой симметрии функцию ω' преобразуем к виду

$$(2.5) \quad \omega' = \omega_b [K(t-u) - v] \gamma^{-1/2}$$

$$(2.6) \quad \gamma = \frac{\omega_0^2}{k_2^2 s^2}, \quad K = \frac{k_1 V_0}{k_2 s}, \quad t = \frac{\omega}{k_1 V_0}, \quad u = \frac{U}{V_0}, \quad v = \frac{\sqrt{V^2 + W^2}}{s}$$

Для нахождения области роста возмущения укажем на плоскости uv те точки, в которых ω' имеет положительную мнимую часть, а также ограничивающую их кривую, и дадим параметрические формулы для определения $\text{Im } \omega'(u, v)$, характеризующей различные скорости роста возмущения.

Система для определения точки перевала имеет вид

$$(2.7) \quad \begin{aligned} K^2(t^2 - \beta^2) - 1 - \gamma + \frac{\gamma}{\beta^2[\gamma - K^2(t-1)^2]} &= 0, \quad \beta = \frac{s}{V_0} \\ Ktu - \beta^2 K + \frac{K(t-1)(u-1)\gamma}{\beta^2[\gamma - K^2(t-1)^2]} &= 0 \\ Ktv - 1 + \frac{\gamma}{\beta^2[\gamma - K^2(t-1)^2]} + \frac{K\gamma v(t-1)}{\beta^2[\gamma - K^2(t-1)^2]} &= 0 \end{aligned}$$

Введем функцию w , с помощью которой третье уравнение (2.7) заменится на более простое

$$(2.8) \quad Ktw - 1 + \frac{\gamma}{\beta^2[\gamma - K^2(t-1)^2]} = 0, \quad w = v \left\{ 1 + \frac{(t-1)\gamma}{\beta^2 t [\gamma - K^2(t-1)^2]} \right\}$$

С учетом (2.8) решения (2.7) представляются в параметрическом виде

$$(2.9) \quad \begin{aligned} \gamma &= \frac{q(q-1)}{t^2 - \beta^2} w^2 t^2, \quad K = \frac{qwt}{t^2 - \beta^2} \\ w^2 &= \frac{t^2 - \beta^2}{t^2 q} \left(1 - \frac{(t^2 - \beta^2)(q-1)}{[(t^2 - \beta^2)(q-1) - q(t-1)^2] \beta^2} \right) \end{aligned}$$

Полагая в (2.9) $q = \text{const}$, можно исследовать поведение ω' , u , v в зависимости от t . Образующееся на плоскости uv семейство кривых при изменении q заполняет некоторую область, в каждой точке которой значения $\omega'(u, v)$ известны из формул (2.5) и (2.9). При $w^2 = 0$ кривые семейства пересекают ось u . Это происходит при $t = t_0$, β , где $t_0, t_0 \leq 1$, удовлетворяют уравнению

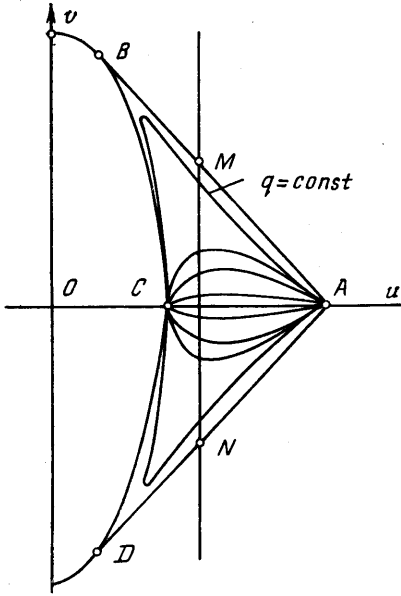
$$\frac{(t_0 - 1)^2 q}{(t_0^2 - \beta^2)(q - 1)} = 1 - \frac{1}{\beta^2}$$

При $t = t_0$, $u = 1$, при $t = \beta$, $u = \beta$ согласно (2.7). Пусть $-\infty < q < 1$. Изменяя t от $t = \beta$ до $t = t_0$, получаем действительные значения w , v , u . При этом $\gamma < 0$ и, следовательно, $\text{Im } \omega' \neq 0$. На фиг. 1 изображено указанное множество кривых. Значениям q , близким к $-\infty$, соответствуют внутренние кривые, вырождающиеся при $q \rightarrow -\infty$ в отрезок AC , где $A(1, 0)$, $C(\beta, 0)$. Соответствие между t и u при $q = -\infty$ дается формулой $u = \beta^2 t^{-1}$, $\beta^2 \leq t \leq \beta$.

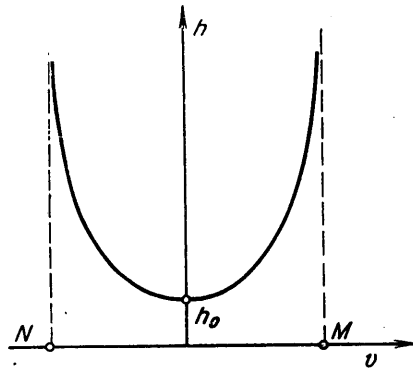
Значениям q , близким к единице, отвечают внешние кривые семейства, плотно облегающие изнутри контур $ABCD$. При $q \rightarrow 1$ согласно (2.9) $\gamma \rightarrow 0$ и происходит изменение знака в $\text{Im } \omega'(u, v)$. Найдем предельную дугу BCD , для этого устремим в (2.8), (2.9) $q \rightarrow 1$ при постоянном $t \neq 1$. Исходя из (2.9), вычислим $w^* = \pm \sqrt{1 - \beta^2 t^{-2}}$, $v^* = w^*$, $u^* = \beta^2 t^{-1}$. При $t = 1$ кривая BCD сопрягается с AB и AD , где $B(\beta^2, \sqrt{1 - \beta^2})$, $D(\beta^2, -\sqrt{1 - \beta^2})$. Поскольку при $q \rightarrow 1$, $t_0 \rightarrow 1$, легко заметить, что эти отрезки будут предельными для семейства кривых.

Можно показать, что при изменении t и q вне указанных пределов имеется две возможности; либо соответствующие точки на плоскости uv уходят на бесконечность, либо $\gamma > 0$ и $\text{Im } \omega' = 0$. Из физических соображений ясно, что рост возмущений не может иметь места при скоростях, больших скорости света в пустоте, что означает отсутствие точек перевала с $\text{Im } \omega' > 0$ вне сферы со световым радиусом в пространстве UVW . В силу этого те решения системы (2.3), которым соответствует $\text{Im } \omega' > 0$ при $u, v \rightarrow \infty$, также не являются точками перевала, поскольку связанный с ними предполагаемый рост возмущения не может быть продолжен в

$\text{Im } \omega' > 0$ вне сферы со световым радиусом в пространстве UVW . В силу этого те решения системы (2.3), которым соответствует $\text{Im } \omega' > 0$ при $u, v \rightarrow \infty$, также не являются точками перевала, поскольку связанный с ними предполагаемый рост возмущения не может быть продолжен в



Фиг. 1



Фиг. 2

область больших u и v . Таким образом, точка перевала с $\text{Im } \omega' > 0$ на самом деле существует лишь внутри $ABCD$, являющейся искомой областью роста возмущения. Исследуем зависимость скорости роста от величин u и v .

При стремлении u и v к AB и AD (фиг. 1) $\text{Im } \omega' \rightarrow \infty$ и наблюдается усиление роста по мере приближения к переднему фронту возмущения. При этом $k_{1,2} \rightarrow i\infty$, $K = k_1 V_0 / k_2 s \rightarrow v / (1 - \beta^2)$ и значения параметров возмущения монотонно нарастают.

График $h = \text{Im } \omega'(v)$ в сечении MN , $u = u_0$ изображен на фиг. 2. При $v = 0$ достигается наименьшее значение h , равное h_0

$$h_0 = \omega_b \sqrt{\frac{u^2}{\beta^2} - 1}$$

На задней границе BCD $\text{Im } \omega' \rightarrow 0$ и рост возмущения при пересечении BCD сменяется колебаниями с $\text{Im } \omega' = 0$. То же можно сказать о внешности конуса, образованного отрезками AB и AD при переходе к U, V, W по формулам (2.6). В пространстве UVW области роста соответствует часть конуса с вершиной в точке $(V_0, 0, 0)$, заключенная между его поверхностью и вписанной в конус сферой радиуса s с центром в начале координат.

По аналогии с одномерным случаем [3] можно сказать, что неограниченная система является «конвективно» неустойчивой, поскольку возму-

щение в конце концов выносится за пределы любого неподвижного объема.

Автор благодарит А. Г. Куликовского и А. А. Бармина за ценные советы и замечания по данной работе.

Поступила 15 VII 1977

ЛИТЕРАТУРА

1. *Тамм И. Е.* Основы теории электричества. М., «Наука», 1966.
2. *Gaster M.* The development of three — dimensional wave packets in a boundary layer, J. Fluid Mech. 1968, vol. 32, № 1.
3. *Ахиезер А. И., Половин Р. В.* Критерии нарастания волн. Усп. физ. н., 1971, т. 104, вып. 2.