

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ ФОРМЫ ТЕЛА С МИНИМАЛЬНЫМ ЛУЧИСТЫМ
ПРИТОКОМ ТЕПЛА ВДОЛЬ ТРАЕКТОРИИ ПОЛЕТА**

А. А. ДЕЕВ, Н. Н. ПИЛЮГИН

(Москва)

При входе в атмосферы планет космические аппараты подвержены интенсивному аэродинамическому нагреву. Согласно оценкам [1] масса теплозащитного покрытия при входе зонда в атмосферы внешних планет может составить 20—50% всей его массы; при этом радиационная составляющая преобладает в аэродинамическом нагреве. В связи с этим представляет интерес исследовать пути уменьшения тепловых потоков к носовой части аппарата. Анализ работ [2—6] показывает, что для данного состава атмосферы вес теплозащиты определяется траекторией движения, формой тела, способом теплозащиты и ее химическим составом, теплофизическими и оптическими свойствами. В такой общей постановке задача оптимизации веса теплозащиты зависит от многих параметров и до сих пор не решена. В ряде работ рассмотрены более простые задачи, связанные с уменьшением нагрева аппаратов: оптимизация траектории из условия минимума суммарного притока тепла в критическую точку тела при заданных параметрах зонда [2, 3], оптимизация характерного размера зонда при заданной траектории [2—4], оптимизация формы зонда в классе конических тел в данной точке траектории [3, 5, 6]. В [7] поставлена вариационная задача определения формы осесимметричного тела из условия минимума полного по всей боковой поверхности радиационного теплового потока к телу в данной точке траектории и получено ее аналитическое решение в предельных случаях. В данной работе исследуется более общая вариационная задача — определение формы осесимметричного тела из условия наименьшего суммарного лучистого притока тепла к телу вдоль траектории движения в атмосфере. Решение получено для класса тонких тел при разных изопериметрических условиях.

1. Уравнения движения и нагрева тела. Рассмотрим движение космического зонда в атмосфере планеты с гиперзвуковой скоростью. Если составляющей силы тяжести и центробежной силой пренебречь, то уравнения движения для изотермической атмосферы [8] имеют вид

$$(1.1) \quad M \frac{dv}{dt} = -\frac{1}{2} \rho v^2 C_D S, \quad \frac{dz}{dt} = -v \sin \gamma_E, \quad \rho = \rho_0 e^{-\lambda z}$$

где M , v , C_D — масса, скорость и коэффициент сопротивления тела; z — высота; ρ — плотность газа на этой высоте; t — время; γ_E — угол входа; S — площадь мидела тела; λ^{-1} — шкала высот для плотности.

Уравнения (1.1) решаются при начальных условиях

$$(1.2) \quad t=0, z=z_0, v=v_0.$$

Если изменением формы тела за счет разрушения теплозащитного покрытия в первом приближении можно пренебречь, то при выбранной его форме величины M и C_D постоянны вдоль траектории входа. Интегрируя (1.1), получим

$$(1.3) \quad v = v_E \exp(-a_E \exp(-\lambda z))$$

Здесь введены обозначения

$$v_E = v_0 \exp(a_E \exp(-\lambda z_0)), \quad a_E = \frac{\rho_0 g}{2\beta \lambda \sin \gamma_E}, \quad \beta = \frac{Mg}{C_D S}$$

где a_E — траекторный параметр, β — баллистический фактор. Интегрируя (1.3) с учетом (1.2), получим

$$(1.4) \quad t = (\lambda v_E \sin \gamma_E)^{-1} \{E_i(a_E \exp(-\lambda z)) - E_i(a_E \exp(-\lambda z_0))\},$$

$$E_i(x) = \int_{-\infty}^x \frac{e^t}{t} dt$$

Если H — суммарное тепло, поглощаемое поверхностью аппарата при движении вдоль траектории, а C_H — коэффициент теплообмена, то уравнение, описывающее нагрев тела [5], имеет вид

$$(1.5) \quad \frac{dH}{dt} = \frac{1}{2} \rho v^3 C_H S = Q$$

Интегрируя (1.5), найдем полное количество тепла, идущее на нагрев тела вдоль траектории его движения

$$(1.6) \quad H = \int_0^t \frac{\rho v^3 C_H S dt}{2} = \int_0^{v_0} \frac{C_H M v dv}{C_D}$$

Выражение (1.6) при известных зависимостях C_H , C_D , M от геометрии тела позволяет поставить вариационную задачу об определении формы тела из условия наименьшего притока тепла к его поверхности вдоль траектории.

Если использовать распределение давления по формуле Ньютона, то коэффициент волнового сопротивления

$$(1.7) \quad C_D = 4R^{-2} \int_0^l \frac{u \dot{u}^3 dx}{1+y^2}, \quad \dot{y} = \frac{du}{dx}$$

где l , R — длина и радиус миделя тела; x , y — координаты соответственно вдоль набегающего потока газа и по нормали к нему.

Сравнение полных притоков тепла к телу за счет излучения и конвекции показывает, что при входе в атмосферу Земли для некоторого диапазона условий в аэродинамическом нагреве тела преобладает радиационная составляющая. Для острого конуса, например, это имеет место при $v > 16$ км/сек, $\rho > 10^{-5}$ г/см³, $l > 10$ м, $\theta_c > 15^\circ$, где θ_c — угол полураствора конуса. Для внешних планет солнечной системы скорости входа и плотности атмосфер существенно выше и диапазон условий, когда радиационный нагрев больше конвективного, будет здесь существенно шире. При таких режимах входа главной задачей, которая и рассматривается ниже, становится уменьшение лучистого нагрева тела.

Величину коэффициента радиационного нагрева C_H для произвольного тела в принципе можно рассчитать численно на основе решения уравнений газодинамики в ударном слое с учетом переноса излучения и вдува паров с поверхности тела. Однако в настоящее время такие расчеты весьма трудоемки и выполнены только для обтекания невязким газом сферы и затупленного конуса [9, 10].

При решении газодинамических уравнений в сжатом ударном слое можно использовать приближение объемного высвечивания и метод пограничного слоя для решения невязких уравнений. В соответствии с этим решением в [7] получено выражение для коэффициента лучистого теплообмена C_H .

В [7] показано, что распределение лучистого потока по поверхности тела, полученное при этих предположениях, хорошо совпадает с более точными расчетами с учетом реабсорбции излучения. Этот вывод подтверждается также прямыми численными расчетами [11], где рассматривалось решение задачи обтекания сферы невязким потоком селективно излучающего воздуха. В [11] показано, что распределение лучистого теплового потока по поверхности сферы как с учетом самопоглоше-

ния излучения, так и при объемном высвечивании очень близки, слабо зависят от радиуса и высоты полета. В [12] показано, что можно получить удовлетворительное согласие с точными расчетами как величины лучистого потока, так и его распределения по телу, если использовать модифицированный коэффициент поглощения Планка, усредненный по той части спектра, где оптическая толщина мала по сравнению с единицей. Далее используется такой коэффициент Планка. Учет поглощения излучения парами теплозащитного покрытия особенно важен в случае сильного уноса массы на не тонких телах. В данной же работе исследуется решение задачи в классе тонких тел и подразумевается малый унос массы теплозащитного материала. Таким образом, при проведении сравнительного анализа теплового режима аппаратов учет отмеченных факторов не должен качественно изменить полученные результаты.

2. Законы подобия для полного притока тепла к телу вдоль траектории. Введем безразмерные координаты η , ξ и относительную толщину тела τ

$$(2.1) \quad \eta = y/R, \quad \xi = x/l, \quad \tau = 2R/l$$

Если ρ_1 — средняя плотность аппарата, то его масса

$$(2.2) \quad M = \rho_1 \pi R^2 l V, \quad I_V = \int_0^1 \eta^2 d\xi$$

Коэффициент сопротивления (1.7) для тонкого тела

$$(2.3) \quad C_D = \tau^2 I_c, \quad I_c = \int_0^1 \eta \dot{\eta}^3 d\xi$$

Коэффициент лучистого теплообмена [7] имеет вид

$$(2.4) \quad C_H = b(v) R \left(\frac{\tau}{2} \right)^{m-2} I_H, \quad I_H = \int_0^1 (1-\xi) \eta \dot{\eta}^m d\xi, \quad m = 2n+11$$

$$b(v) = 4A\sigma \frac{\gamma-1}{\gamma} (n+4) \left(\frac{\gamma-1}{2\gamma R_A} \right)^{n+4} v^{2n+7}$$

где σ — постоянная Стефана — Больцмана; R_A — газовая постоянная; γ — эффективное отношение теплоемкостей газа в ударном слое; A , n — константы аппроксимации коэффициента Планка [7, 10]. Безразмерные интегралы I_V , I_c , I_H определяют объем тела, его сопротивление, лучистый тепловой поток и зависят от формы тела. Суммарный приток тепла (1.6) с учетом (2.2) — (2.4), если заданы начальная и конечная скорости полета, имеет вид

$$(2.5) \quad H = C(v) R^{m-1} l^{5-m} \frac{I_H I_V}{I_c},$$

$$C(v) = \frac{\pi \rho_1 A \sigma}{(2n+9)} \frac{\gamma-1}{\gamma} \left(\frac{\gamma-1}{2\gamma R_A} \right)^{n+4} (v^{2n+9} - v_0^{2n+9})$$

Если заданы начальная и конечная высоты, то выражение для H с учетом (1.1), (1.6), (2.4) принимает вид

$$(2.6) \quad C_1(z) = \frac{2\pi \rho_0 A \sigma v_0^{2n+9}}{\sin \gamma_E a_E \lambda (2n+9)} \frac{\gamma-1}{\gamma} \left(\frac{\gamma-1}{2\gamma R_A} \right)^{n+4} \times$$

$$\times \{1 - \exp[a_E (2n+9) (\exp(-\lambda z_0) - \exp(-\lambda z))]\}$$

При $a_E \gg 1$ отсюда имеем

$$\dot{H} = \frac{\gamma+1}{\gamma} \frac{2(\gamma-1)}{(\gamma+1)^2} \left[\frac{2(\gamma-1)}{(\gamma+1)^2 R_A} \right]^{n+4} \frac{\pi A \sigma \rho_1 v_0^{2n+9}}{2n+9} R^{m-1} l^{5-m} I_H \frac{I_V}{I_c}$$

Следует отметить, что полный лучистый приток тепла к телу вдоль траектории зависит от геометрической формы тела не только через I_H , но также и через I_V и I_c .

Формулы (2.5), (2.6) позволяют установить закон подобия для полного лучистого притока тепла при изменении геометрических размеров тонкого тела. Для простоты полагаем показатель n постоянным. Далее показано, что изменение n сравнительно мало влияет на результаты. В случае, когда начальная v_0 и конечная v скорости тела заданы, изменим размеры тела следующим образом:

$$R_1 = kR, \quad l_1 = \delta l, \quad \tau_1 = \frac{k}{\delta} \tau$$

Тогда на основе (2.5) для нового тела получим $H_1 = k^{m-1} \delta^{5-m} H$. В другом случае, когда задано конечное значение высоты z , необходимо, чтобы баллистический фактор β был постоянным, поэтому при изменении размеров тела ($R_1 = kR$, $l_1 = k^{1/2} l$, $\tau_1 = k^{1/2} \tau$) баллистический фактор не изменится; для нового тела получим $H_1 = k^{1/2(m+1)} H$.

Полученные соотношения позволяют пересчитывать суммарные притоки тепла к аффинноподобным телам при движении по траектории.

3. Оптимизация формы зонда и его траектории. Вариационная задача формулируется следующим образом: найти функцию $\eta = \eta(\xi)$, для которой полный приток тепла H к телу вдоль траектории движения будет минимальным и которая удовлетворяет заданным граничным или изопериметрическим условиям. Так как баллистический фактор β , определяющий траекторию входа, выражается через M и C_D , которые зависят от формы тела, то нахождение функции $\eta(\xi)$, доставляющей минимум H , определяет как форму тела, так и его траекторию движения в атмосфере планеты по формулам (1.3), (1.4). Далее будут также рассмотрены решения в классе тонких степенных тел $\eta = \xi^\alpha$.

В этом случае из формул (2.2) – (2.4) следует:

$$(3.1) \quad I_V = (2\alpha+1)^{-1}, \quad I_c = \frac{\alpha^3}{2(2\alpha-1)},$$

$$I_H = \frac{\alpha^m}{[\alpha(m+1)+1-m][\alpha(m+1)+2-m]}$$

В общем случае функционал в (2.6) достаточно сложно зависит от I_H , I_V , I_c . В том же случае, когда заданы начальная и конечная скорости полета, функционал в (2.5) зависит только от произведения функционалов I_H , I_V , I_c . Поэтому ниже рассматриваются траектории, для которых заданы начальная и конечная скорости полета. Конечная высота полета может быть определена после решения задачи на основе (1.3).

Если заданы радиус R и длина тела l , то из (2.5) следует, что необходимо найти минимум функционала

$$(3.2) \quad J = I_H I_V I_c^{-1}$$

где I_H , I_V , I_c определены выражениями (2.2) – (2.4). В классе степенных тел из (3.1), (3.2) имеем

$$(3.3) \quad J = \frac{\alpha^{m-3}}{[\alpha(m+1)+1-m][\alpha(m+1)+2-m]} \frac{2(2\alpha-1)}{(2\alpha+1)}$$

n	I					II					III						
	d	I _H	c	I _V	α	d ₁	d	I _H	I _c	I _V	α	d ₁	I _H	I _c	I _V	α	d ₁
0	0.740	0.145	0.534	0.319	1.019	0.994	0.469	0.187	0.594	0.302	1.500	0.570	0.140	0.504	0.332	0.952	0.931
2	0.779	0.137	0.514	0.326	1.000	1.000	0.476	0.183	0.553	0.312	1.308	0.567	0.144	0.495	0.335	0.958	0.896
4	0.795	0.137	0.508	0.329	0.995	0.998	0.477	0.191	0.537	0.316	1.225	0.564	0.142	0.496	0.334	0.965	0.874
6	0.807	0.137	0.503	0.330	0.993	0.995	0.479	0.178	0.527	0.320	1.178	0.561	0.145	0.495	0.335	0.969	0.859
8	0.812	0.137	0.502	0.331	0.993	0.993	0.485	0.171	0.520	0.323	1.147	0.559	0.146	0.495	0.335	0.973	0.848

Приравняв нулю производную по α от выражения (3.3), получим алгебраическое уравнение, определяющее оптимальное значение α

$$b_1\alpha^4 + b_3\alpha^3 + b_2\alpha^2 + b_1\alpha + b_0 = 0$$

$$b_1 = 4(m-5), \quad b_3 = 4 + 4m_1(m-4),$$

$$b_2 = 4m_1 + 4m_2(m-3) + 5 - m$$

$$b_1 = 4m_2 + (4-m)m_1, \quad b_0 = m_2(3-m)$$

$$m_1 = (3-2m)/(m+1),$$

$$m_2 = (m-1)(m-2)/(m+1)^2$$

Если заданы радиус R и объем тела V , то выражая l из соотношения (2.2) и подставляя в (2.5), получим

$$H = CR^4 \left(\frac{V}{\pi R^3} \right)^{5-m} \frac{I_H I_V^{m-4}}{I_c}$$

Из этой формулы следует закон подобия для полного притока тепла к телу при изменении V и R . Действительно, изменяя V и R следующим образом: $V_1 = kV$, $R_1 = \delta R$, получим для притока к новому телу $H_1 = k^{5-m} \delta^{3m-11} H$.

В данной постановке необходимо найти минимум функционала

$$(3.4) \quad J = \frac{I_H I_V^{m-4}}{I_c}$$

В классе степенных тел из (3.1), (3.4) имеем

$$J = \frac{\alpha^{m-3}}{[\alpha(m+1)+1-m][\alpha(m+1)+2-m]} \times \frac{2(2\alpha-1)}{(2\alpha+1)^{m-4}}$$

Оптимальное значение α определяется уравнением

$$b_3\alpha^3 + b_2\alpha^2 + b_1\alpha + b_0 = 0$$

$$b_3 = 4m_1 + 2(m-3),$$

$$b_2 = 8m_2 + 2(m-3)m_1 + 5 - m_1$$

$$b_1 = 2(m-3)m_2 + (4-m)m_1,$$

$$b_0 = m_2(3-m)$$

Если заданы длина l и объем тела V , то, выражая R из соотношения (2.2) и подставляя в (2.5), будем иметь

$$R = Cl^4 \left(\frac{V}{\pi l^3} \right)^{1/2(m-1)} \frac{I_H I_V^{1/2(3-m)}}{I_c}$$

Из этой формулы следует закон подобия для полного притока тепла к телу при изменении l и V

$$V_1 = kV, l_1 = \delta l, H_1 = k^{1/2(m-1)} \delta^{1/2(11-3m)} H$$

В этом случае необходимо найти минимум функционала

$$J = \frac{I_H I_V^{1/2(s-m)}}{I_c}$$

В классе степенных тел отсюда и из (3.1) получим

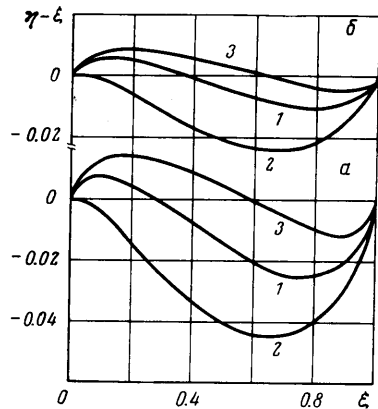
$$J = \frac{\alpha^{m-3}}{[\alpha(m+1)+1-m][\alpha(m+1)+2-m]} \frac{2(2\alpha-1)}{(2\alpha+1)^{1/2(3-m)}}$$

Оптимальное значение α , соответствующее минимуму J , определяется уравнением

$$\begin{aligned} b_4 \alpha^4 + b_3 \alpha^3 + b_2 \alpha^2 + b_1 \alpha + b_0 &= 0 \\ b_4 &= 2(3m-1), b_3 = 5-m+6m_1(m-3) \\ b_2 &= (5-m)(1+m_1) + 2m_2(3m-7) \\ b_1 &= m_1(4-m) + m_2(5-m), b_0 = m_2(3-m) \end{aligned}$$

4. Результаты численного решения. Рассмотренные выше вариационные задачи сводятся к исследованию на безусловный экстремум функционала J , представляющего собой функцию от нескольких функционалов. Аналитические решения по методу [13, 14] для данной задачи получить не удастся. Поэтому в настоящей работе использован численный метод локальных вариаций [15]. В таблице приведено отношение d полного притока тепла к найденному оптимальному телу к аналогичной величине для острого конуса при одинаковых условиях для ряда значений параметра n . (Римские цифры I, II, III соответствуют заданным (R, l) , (R, V) и (l, V) .) В этой же таблице указаны значения интегралов I_H, I_c, I_V для найденных оптимальных тел.

На фигуре приведены отклонения контуров оптимальных тел от конуса $\eta = \xi$ при $n=0$ и 4 (a и b соответственно). На фигуре кривая 1 соответствует заданным R и l , кривая 2 — R и V , кривая 3 — l и V . Из фигуры и расчетов для других n следует, что форма оптимального тела зависит от вида задаваемых изопериметрических условий и в классе тонких тел близка к конической. При заданных R, l и V, l оптимальное тело имеет затупленный носок. Если заданы V и R , то оптимальное тело



является заостренным. Особенность полученных решений состоит в том, что они имеют бесконечный наклон в точке $\eta=1, \xi=1$. Как видно из фигуры, наибольшее отличие от конуса имеет контур тела при заданных V и R . Все отмеченные особенности имеют место и при других значениях n .

Из таблицы следует, что выигрыш оптимальных тел по полному притоку тепла по сравнению с конусом зависит от вида накладываемых ограничений. В частности, при заданных R, V суммарный нагрев тела при использовании оптимальной формы по сравнению с конусом уменьшается более чем в 2 раза. В то же время величина d сравнительно мало меняется с изменением n в диапазоне $0 \leq n \leq 8$ для заданных изопериметриче-

ских условий. Такой выигрыш в тепловом потоке объясняется сильной степенной зависимостью функционала в (3.4) от I_v . Поэтому, несмотря на малое отличие оптимального контура от конуса, имеет место существенное уменьшение в тепловом лучистом потоке. Аналогичные зависимости для заданных (R, l) и (l, V) слабее, чем при заданных R и V , поэтому и выигрыш в тепловом потоке по сравнению с конусом в этих случаях меньше.

В таблице приведено также отношение d_1 полных притоков тепла за счет излучения к оптимальному степенному телу и эквивалентному конусу при различных изопериметрических условиях для ряда значений n . Там же приведены оптимальные значения α , рассчитанные из полученных выше уравнений. Из таблицы видно, что использование оптимальных степенных форм также обеспечивает существенное уменьшение нагрева тела по сравнению с конусом, хотя и в меньшей степени, чем при использовании оптимальных форм, полученных при точном численном решении. Сравнение показывает, что оптимальные степенные тела правильно определяют поведение $\eta = \eta(\xi)$ в носке тела в зависимости от изопериметрических условий. Полученные в работе решения показывают, что использование оптимальных форм аппарата позволяет существенно снизить интегральный приток тепла к его поверхности при движении вдоль траектории.

Поступила 6 IV 1977

ЛИТЕРАТУРА

1. Sutton Kenneth. Radiative heating about outer planet entry probes. AIAA paper, 1975, No. 183.
2. Нейланд В. Я., Снугирев Ю. И. Тепловой режим летательного аппарата при скоростях входа в атмосферу Земли, близких к 15 км/сек. Космические исследования, 1967, т. 5, вып. 2.
3. Скипенко В. В. Траектории минимального нагрева и приближенный расчет теплозащиты аппарата при сверхзвуковых скоростях полета в атмосфере. Тр. ЦАГИ, 1973, вып. 1484.
4. Коняев В. Г. Энергетическая оценка потерь массы теплозащиты летательного аппарата при торможении в атмосфере со сверхзвуковой скоростью. Уч. зап. ЦАГИ, 1973, т. 4, № 6.
5. Seiff A., Tauber M. E. Optimum conical bodies for grazing hyperbolic entry. AIAA Journal, 1966, vol. 4, No. 1.
6. Shapland D. J., Price D. A., Hearne L. F. A configuration for re-entry from Mars missions using aerobraking. Spacecraft and Rockets, 1965, vol. 2, No. 4. (Рус. перев.: Конфигурация космического аппарата, использующего торможение в атмосфере Земли при возвращении с Марса. Ракетная техника и космонавтика, 1965, т. 3, № 8.)
7. Деев А. А., Левин В. А., Пилюгин Н. Н. О форме тела с минимальным полным потоком лучистой энергии к его поверхности. Изв. АН СССР, МЖГ, 1976, № 4.
8. Мартин Дж. Вход в атмосферу. М., «Мир», 1969.
9. Мирский В. Н., Стулов В. П. Лучистый теплообмен головной части тела при интенсивном испарении. Изв. АН СССР, МЖГ, 1975, № 2.
10. Olstad W. B. Nongray radiating flow about smooth symmetric Bodies. AIAA Journal, 1971, vol. 9, No. 1.
11. Barnwell R. W. Inviscid radiating shock layers about spheres traveling at hyperbolic speeds in air. Nat. Advis. Comm. Aeronaut., Tech. Rept, 1969, No. R-311.
12. Пилюгин Н. Н. Гиперзвуковое обтекание осесимметричного затупленного тела с учетом влияния опережающего излучения. Науч. тр. Ин-та механ. МГУ, 1976, № 44.
13. Miele A. On the minimization of the product of the powers of several integrals. J. Optimization Theory and Appl., 1967, vol. 1, No. 1.
14. Бунимович А. И., Дубинский А. В. Вариационный метод для обобщенного класса функционалов и его применение к задачам аэромеханики. Изв. АН СССР, МЖГ, 1973, № 1.
15. Черноусько Ф. Л., Баничук Н. В. Вариационные задачи механики и управления. М., «Наука», 1973.