

УСТОЙЧИВОСТЬ СФЕРИЧЕСКОГО ТЕЧЕНИЯ КУЭТТА В ТОЛСТЫХ СЛОЯХ ПРИ ВРАЩЕНИИ ВНУТРЕННЕЙ СФЕРЫ

Ю. Н. БЕЛЯЕВ, А. А. МОНАХОВ, И. М. ЯВОРСКАЯ

(Москва)

Естественным обобщением цилиндрического течения Куэтта является течение вязкой несжимаемой жидкости между двумя концентрическими сферами, вращающимися вокруг одной и той же оси с постоянными, но разными угловыми скоростями. Несмотря на внешнее сходство, сферическое течение Куэтта, как неоднократно отмечалось, значительно сложнее цилиндрического. Оно состоит из дифференциального вращения вокруг оси и одно- или двухвихревой циркуляции (в зависимости от отношения угловых скоростей вращения сфер $\omega = \Omega_2/\Omega_1$) в меридиональной плоскости и существенно зависит от числа Рейнольдса $Re = \Omega_1 r_1^2/\nu$ и относительной толщины слоя $\delta = (r_2 - r_1)/r_1$ (Ω_1 и Ω_2 , r_1 и r_2 — угловые скорости и радиусы внутренней и внешней сфер соответственно).

Исследование сферического течения Куэтта и его устойчивости началось сравнительно недавно (последние десять лет) и стимулировалось, по-видимому, прикладными задачами, связанными с астро- и геофизикой. Из-за больших вычислительных трудностей, возникающих при теоретическом исследовании устойчивости этого течения, экспериментальное исследование привело к получению более значительных и интересных результатов [1-8]. Правда, все опубликованные результаты относятся к случаю вращения одной внутренней сферы $\omega = 0$.

Была обнаружена потеря устойчивости основного течения в тонких слоях и возникновение вторичного течения в форме стационарных кольцевых вихрей в экваториальной плоскости [1, 2, 5, 7, 8], подобных вихрям Тейлора в цилиндрическом течении Куэтта. В толстых слоях сначала потеря устойчивости не была обнаружена.

Впервые неустойчивость в толстых слоях была зарегистрирована в [3-5], но результаты работы оказались противоречивыми.

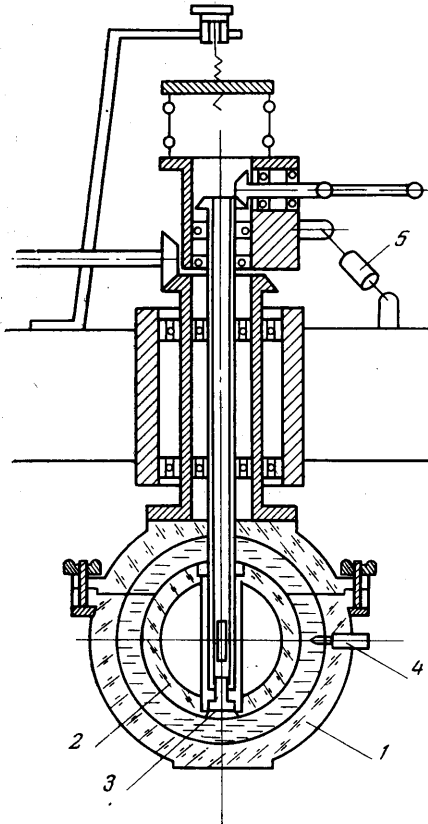
Так, в [3] было установлено, что толстый слой $\delta = 0.54$ при критическом числе Рейнольдса оказывается неустойчивым относительно трехмерных периодических по φ возмущений, распространяющихся волновым образом в азимутальном направлении с угловой скоростью $\Omega = \Omega_1 f(Re)$, слабо зависящей от числа Рейнольдса. Азимутальное волновое число m , определявшее число вихрей в каждой полусфере, уменьшалось при медленном росте угловой скорости вращения; однако было отмечено, что в зависимости от предыстории процесса при одном и том же числе Рейнольдса возможно существование нескольких режимов течения с различным числом вихрей m , распространяющихся в φ -направлении с одной и той же скоростью Ω .

В появившейся почти одновременно работе [4] исследовалась устойчивость сферического течения Куэтта в слое $\delta = 1.27$ визуально и путем измерения момента вращения M , передаваемого на внешнюю сферу. На кривой моментов в плоскости (M, Re) при значениях чисел $Re_1 = 56$, $Re_2 = 105$, $Re_3 = 174$, $Re_4 = 406$ было отмечено существование четырех изломов, которые обычно соответствуют наступлению неустойчивости и смене режимов течения. Однако визуально на первых трех изломах перестройки течения

обнаружено не было, четвертый, по мнению авторов, соответствовал наступлению турбулентности.

Чтобы разобраться в возникших трудностях, были предприняты дальнейшие экспериментальные исследования по изучению устойчивости течения в толстых слоях различной толщины $0.24 \leq \delta \leq 1.33$. Характер и форма течения и различные перестройки изучались визуально, измерением момента вращения M и с помощью пленочного термоанемометра «DISA».

1. Схема установки, на которой проводились эксперименты, дана на фиг. 1 и подробно описана в [5]. Изучаемый слой жидкости находился между сферической оболочкой 1 радиуса 150.08 ± 0.03 мм и сменными внутренними сферами 2, вращавшимися вокруг вертикальной оси с различными скоростями. Сменные внутренние сферы, изготовленные из оргстекла с той же точностью, что и оболочка 1, позволяли варьировать толщину слоя от 0.11 до 1.33. Угловые скорости вращения могли меняться в пределах $0.03 \leq \Omega_1 \leq 10$ об/сек и $0.03 \leq \Omega_2 \leq 13$ об/сек. С помощью дополнительной стабилизации угловая скорость вращения сфер поддерживалась с точностью $\pm 0.03\%$.



Фиг. 1

В качестве рабочих жидкостей использовались масла ВМ-1 и их растворы в бензине, что позволяло менять вязкость жидкости от 0.7 до 400 *cSt*. Для уточнения значений вязкости в процессе эксперимента с помощью термистора 3 измерялась температура жидкости с точностью $\pm 0.05^\circ \text{C}$. Для визуализации течения в жидкость в небольших количествах добавлялась алюминиевая пудра ($< 0.001\%$), так что вязкость жидкости оставалась неизменной. При подсвечивании такой суспензии интенсивность рассеянного света очень чувствительна к ориентации чешуек пудры, что позволяет регистрировать даже небольшие градиенты скорости. Возникающие картины течения фотографировались и снимались на киноплёнку.

Для регистрации пульсаций скорости пленочный датчик термоанемометра был установлен в экваториальной плоскости слоя вблизи внешней границы и ориентирован так, что максимум диаграммы чувствительности совпадал с направлением радиальной скорости. Сигнал датчика подавался на осциллограф и аналого-цифровой преобразователь, после чего на БЭСМ-6. С помощью быстрого

преобразования Фурье находились спектральная плотность и автокорреляция пульсаций скорости.

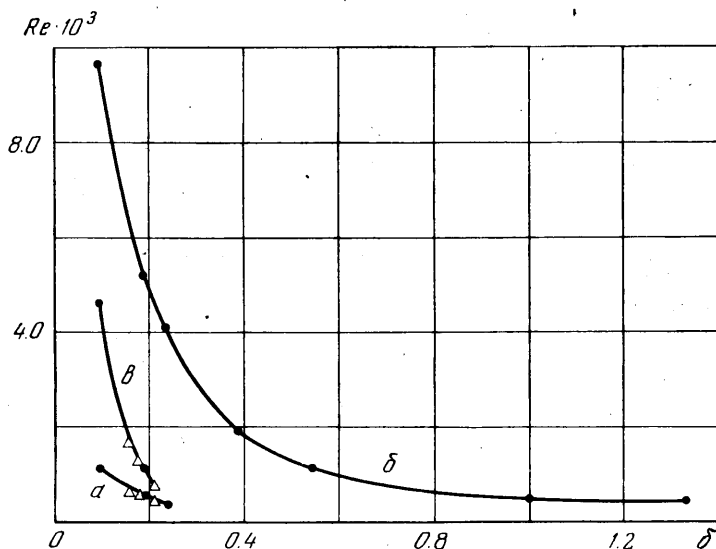
Момент вращения M , передаваемый на внешнюю сферу, измерялся балансирующим методом динамометром 5 с точностью $\pm 0.3\%$.

2. Прежде всего было установлено, что сферические слои, в которых возникает исследуемое течение, можно разделить на толстые $\delta > \delta^*$ и тон-

кие $\delta < \delta^*$ в зависимости от характера вторичных течений, возникающих при потере устойчивости основного течения. При вращении одной внутренней сферы ($\omega=0$) это критическое число $\delta^* \approx 0.23$.

Далее будут описаны результаты экспериментов по устойчивости сферического течения Куэтта в толстых слоях ($\delta \geq 0.24$) при $\omega=0$ и $0 \leq \text{Re} \leq 10\,000$.

В подтверждение результатов [3] было установлено, что это течение в толстых слоях неустойчиво относительно трехмерных периодических возмущений. Кривая устойчивости в плоскости (Re, δ) для толстых слоев приведена на фиг. 2 (кривая б). Как видно из сравнения кривых устойчивости в толстых (б) и тонких (а) слоях, сферическое течение Куэтта в толстых слоях оказывается неустойчивым при гораздо больших числах Re , чем это можно было ожидать, экстраполируя кривую а на большие значения δ . По-видимому, это оказалось одной из причин того, что потеря устойчивости в толстых слоях какое-то время оставалась незамеченной. Другой причиной была сложность возникающего на пределе устойчивости вторичного течения, принятого в [4] за наступление турбулентности.



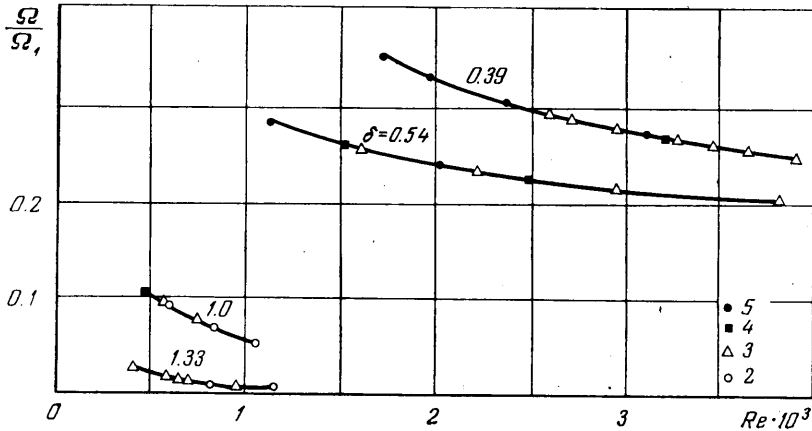
Фиг. 2

Действительно, вторичное течение при $\text{Re} > \text{Re}_c$ нестационарно, несимметрично и несимметрично относительно экватора. Оно представляет собой периодическое по долготе волновое течение, состоящее из равного числа вихрей m в каждой полусфере и синусообразного возмущения экватора. На фиг. 3 даны фотографии течений в слоях толщины $\delta=1$ при $\text{Re}=600$ (а), $\delta=0.54$ при $\text{Re}=1390$ (б). Вся картина течения распространяется в азимутальном направлении со скоростью Ω , зависящей от толщины слоя δ и слабо от числа Re (фиг. 4). Азимутальное волновое число m на пределе устойчивости тем меньше, чем больше толщина слоя δ .

Так же как и в [3], при всех указанных значениях δ с ростом числа Re отмечался переход к аналогичным волновым режимам, но с меньшими азимутальными волновыми числами m , причем этим последующим волновым режимам было свойственно явление гистерезиса (см. фиг. 4). При достаточно больших $\text{Re} > \text{Re}_c(\delta)$ в толстых слоях при фиксированных значениях чисел Re наблюдается несколько волновых режимов с различными

m в зависимости от предыстории процесса, что указывает на неединственность периодических решений уравнений Навье — Стокса в указанных областях пространства параметров подобия ($Re, \delta, \omega=0$).

Неустойчивость сферического течения Куэтта в толстых слоях не была фактически обнаружена и теоретически. Одна из причин та же, что и для эксперимента: критическое число Re_c много больше ожидавшегося; вторая — в том, что исследовалась неустойчивость относительно осесиммет-



Фиг. 4

ричных [°] или неосесимметричных, но стационарных [4] возмущений. Эксперимент же показывает, что сферическое течение Куэтта неустойчиво относительно неосесимметричных периодических возмущений, тороидальный w и полоидальный s потенциалы скорости которых на пределе устойчивости представимы в виде

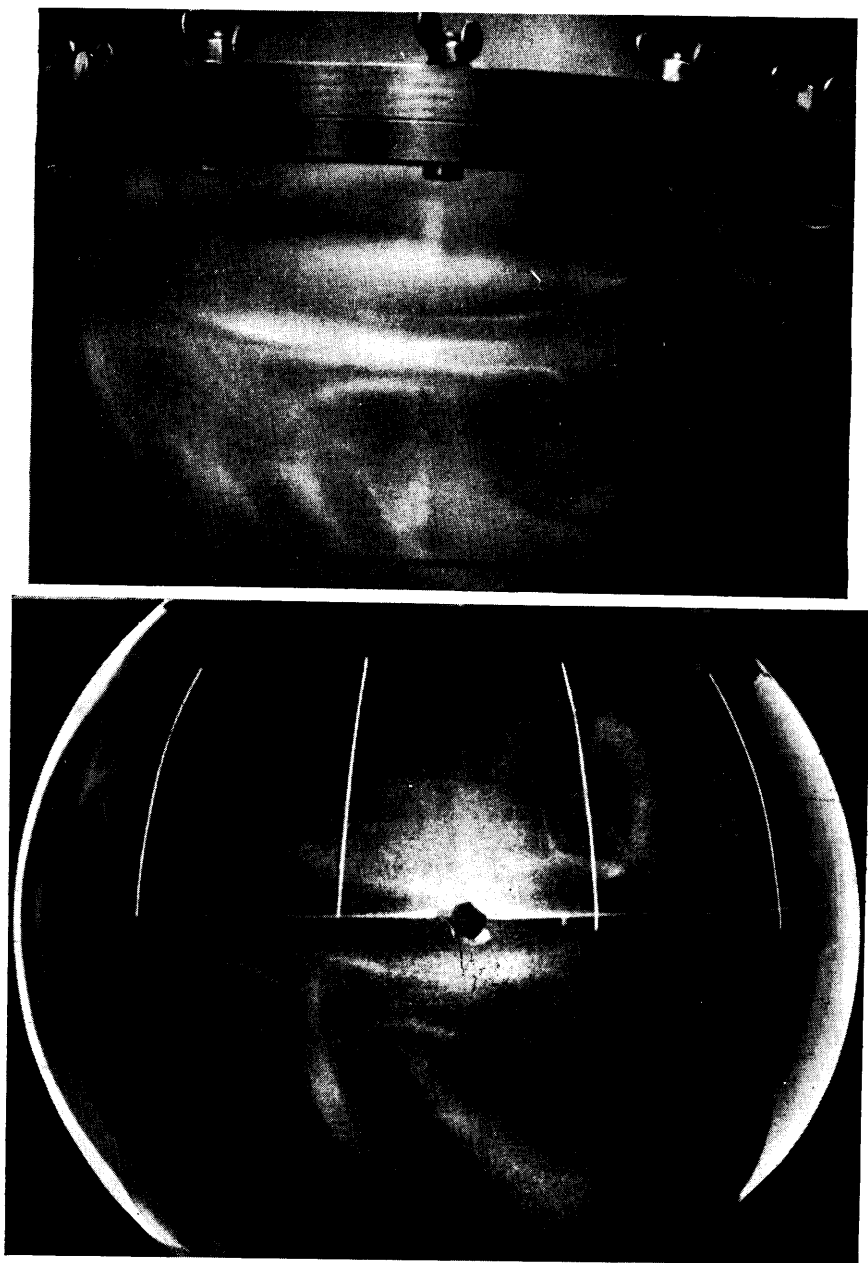
$$\mathbf{u} = \text{rot}^2 \mathbf{r} s + \text{rot} \mathbf{r} w$$

$$s = \sum_{n=m}^{\infty} S_{2n-m+1}(r) P_{2n-m+1}^m(\theta) e^{i(m\varphi+ct)},$$

$$w = \sum_{n=m}^{\infty} T_{2n-m}(r) P_{2n-m}^m(\theta) e^{i(m\varphi+ct)}$$

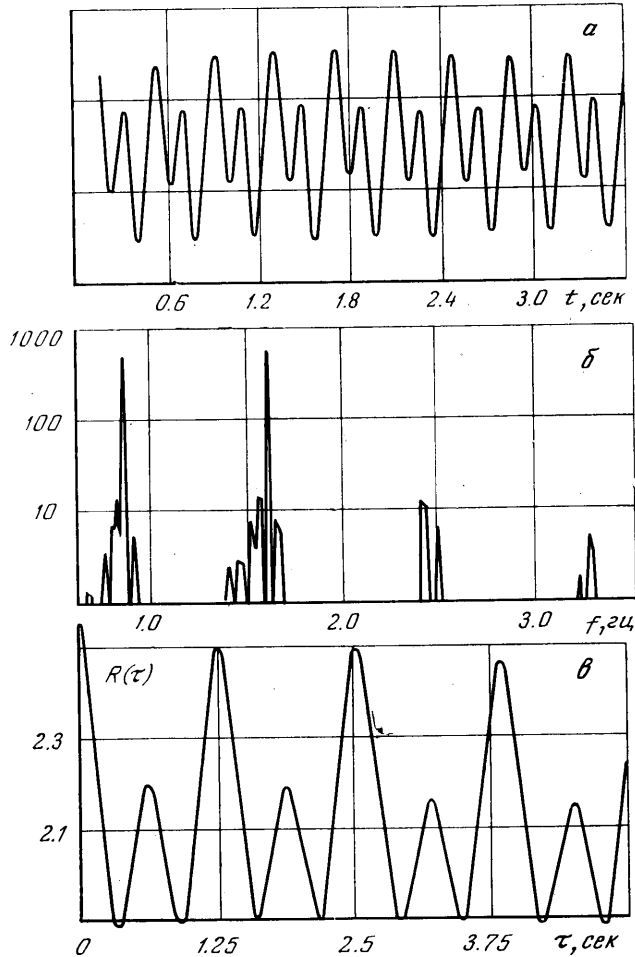
где $P_j^h(\theta)$ — присоединенные функции Лежандра; $\Omega = -c/m$ — фазовая скорость распространения возмущений, зависящая от толщины слоя δ и в общем случае от отношения угловых скоростей вращения сфер ω ; S_{2n-m+1} и T_{2n-m} — радиальные амплитуды, подлежащие определению в процессе решения задачи на собственные значения.

Одновременно с визуальными наблюдениями измерялся момент вращения с помощью динамометра, включенного в компенсационную схему. Исследование течения в слое толщины $\delta=1.33$ (достаточно близкой к толщине $\delta=1.27$, изученной в [4]), показало отсутствие резких изменений кривой моментов вблизи Re_1, Re_2 и Re_3 , т. е. примерно там, где были зарегистрированы изломы кривой в [4]. Визуально, так же как и ранее в [3, 4], перестроек в течение вблизи этих чисел Re обнаружено не было, не зарегистрировал никаких изменений и датчик термоанемометра (начиная с числа $Re \sim 20$ датчик регистрировал лишь очень слабые колебания, медленно растущие с Re , с частотой вращения внутренней сферы, появление которых было отнесено за счет отличия реального слоя от сферического).



Фиг. 3

Четвертый из отмеченных в [4] изломов при $Re_c \approx 406 = Re_c(\delta)$ (фиг. 2) соответствовал описанной выше неустойчивости в виде волнового режима. При этом значении Re наблюдалось резкое изменение формы и возрастание примерно на два порядка амплитуды сигнала датчика. Регистрируемый сигнал, спектральная плотность и автокорреляционная функция при $Re=439$ (фиг. 5) демонстрируют наличие кроме частоты вращения только одной частоты ($\nu=0.818$ гц), соответствующей частоте визуального наблю-



Фиг. 5

даемых вихрей и ее гармоник. Желательно, конечно, иметь измерения спектральных характеристик течения не только на экваторе, как это было в настоящих экспериментах, но и в ядре течения. Однако, поскольку наибольшие градиенты скорости и перестройки течения происходят в приэкваториальной зоне, следует, по-видимому, заключить, что первая неустойчивость сферического течения Круэтта в толстых слоях возникает при $Re = Re_c = Re_c(\delta)$ и кривая a в плоскости (Re, δ) является пределом устойчивости для толстых слоев.

При этом переход через $Re_c(\delta)$ сопровождается не внезапным возникновением турбулентности, как считается в [4], а переходом к сложно-

му ламинарному периодическому течению. Характеристики течения, аналогичные приведенным на фиг. 5, получены также на толстых слоях с другими δ .

3. Форма и характер вторичного течения, возникающего в толстых слоях при $Re \geq Re_c$, его отличие от вихрей Тейлора и значительно больше, чем в тонких слоях, Re_c указывают на то, что механизм неустойчивости в толстых слоях отличен от центробежного, вызывающего неустойчивость сферического течения Куэтта в тонких слоях и цилиндрического — в слоях произвольной толщины.

Дело здесь в том, что сферическое течение Куэтта в отличие от цилиндрического состоит кроме дифференциального вращения еще и из меридиональной циркуляции (см., напримр, [10]). Функция тока меридионального течения в тонких слоях, как показано в [11], пропорциональна $\delta^3 Re$. В тонких слоях, где δ мало, меридиональная циркуляция очень слаба и сферическое течение Куэтта ведет себя так же, как и цилиндрическое. На пределе устойчивости возникают вихри Тейлора вблизи экватора, где локальное число Рейнольдса раньше всего превышает критическое значение. Затем в очень тонких слоях ($\delta \leq 0.1$) с ростом числа Re появляются кольцевые вихри на более высоких широтах.

С увеличением толщины слоя критическое число Re_c падает, как $\delta^{-3/2}$, а меридиональная циркуляция при $Re = Re_c$ растет пропорционально $\delta^3 Re_c = \delta^{3/2}$.

При достаточной интенсивности меридиональная циркуляция перераспределяет угловой момент и угловую скорость в слое жидкости, что приводит к подавлению центробежной неустойчивости. Эффект подавления центробежной неустойчивости меридиональным течением наблюдался ранее в тонких слоях. Как было отмечено в [5], если мгновенно увеличить угловую скорость вращения, а следовательно и число Re с докритического значения до любого значения, лежащего в плоскости (Re, δ) между кривой *a* и продолжением кривой *b* в сторону $\delta < \delta^*$ (фиг. 2), то в слое сохранится основное сферическое течение Куэтта, которое в этой области значений чисел Re оказывается снова устойчивым.

Такое явление экспериментально наблюдается потому, что мгновенное включение угловой скорости приводит к установлению сферического течения Куэтта за безразмерное время «spin-up» порядка $Re^{1/2}$, которое обычно меньше времени роста возмущений $(Re - Re_c)$ [12]. Выше кривой *b* сферическое течение Куэтта становится вновь неустойчивым, на этот раз относительно трехмерных периодических возмущений, как и толстые слои.

Перераспределение меридиональными движениями угловой скорости в толстых слоях приводит при больших числах Re , как показывают расчеты [13], к появлению в профилях азимутальной скорости точек перегиба. Похоже, что механизм невязкой рэлеевской неустойчивости так же, как и в случае вращающегося диска [14], ответствен за появление волновой неустойчивости в существенно неплоскопараллельном сферическом течении Куэтта.

4. Таким образом, экспериментальное исследование устойчивости сферического течения Куэтта в толстых слоях при вращении внутренней сферы приводит к следующим результатам.

В отличие от цилиндрического течения [15] потеря устойчивости сферическим течением в толстых слоях происходит с несоблюдением принципа смены устойчивости и теоремы Сквайра.

Вторичные течения, возникающие при $Re \geq Re_c$, являются сложными периодическими волновыми течениями, подобными гравитационно-гироскопическим волнам, и распространяются в азимутальном направлении с

безразмерной скоростью $\Omega/\Omega_1 < 1$, зависящей от толщины слоя и слабо от числа Re.

Азимутальное волновое число m растет с уменьшением толщины слоя и падает с ростом числа Re.

В закритической области при одних и тех же значениях параметров подобия существует несколько режимов течения с различными волновыми числами, но одинаковой угловой скоростью распространения.

Механизм неустойчивости в толстых слоях отличен от центробежного и, по-видимому, связан с появлением точек перегиба в профилях азимутальной скорости.

Авторы благодарят С. А. Щербакова за помощь в организации автоматического ввода сигналов в БЭСМ-6.

Поступила 7 VI 1977

ЛИТЕРАТУРА

1. Хлебугин Г. Н. Устойчивость движения жидкости между вращающейся и неподвижной концентрическими сферами. Изв. АН СССР, МЖГ, 1968, № 6.
2. Sawatzky O., Zierep J. Das Stromfeld in Spalt zwischen zwei konzentrischen Kugelflächen, von denen die innere rotiert. Acta Mech., 1970, vol. 9, No. 1—2.
3. Яворская И. М., Беляев Ю. Н., Монахов А. А. Экспериментальное изучение сферического течения Кэтта. Докл. АН СССР, 1975, т. 221, № 5.
4. Munson V. R., Menguturk M. Viscous incompressible flow between concentric rotating spheres. J. Fluid Mech., 1975, vol. 69, pt. 4.
5. Петров Г. И., Яворская И. М., Беляев Ю. Н., Монахов А. А., Слезингер И. М., Горайнов А. А., Фукс В. И. Моделирование динамических процессов в атмосферах планет, ч. 1. Установка для изучения устойчивости сдвиговых течений в сферических слоях. М., Препринт Ин-та космических исследований, АН СССР, 1975, № 225.
6. Bonnet J.—P., Alziary de Roquefort A. Ecoulement entre deux sphères concentriques en rotation. J. Mech., 1976, vol. 15, No. 3.
7. Wimmer M. Experiments on a viscous fluid flow between concentric rotating spheres. J. Fluid Mech., 1976, vol. 78, pt 2.
8. Беляев Ю. Н., Яворская И. М., Монахов А. А. О неустойчивости сферического течения Куэтта (эксперимент и некоторые теоретические вопросы). 4-й Всесоюз. съезд по теорет. и прикл. механ. (Аннот. докл.). Киев, «Наукова думка», 1976.
9. Якушин В. И. Об устойчивости движения жидкости в шаровом слое. Уч. зап. Пермск. гос. ун-та, 1971, № 248.
10. Pearson C. A. A numerical study of the time-dependent viscous flow between two rotating spheres. J. Fluid Mech., 1967, vol. 28, pt 2.
11. Яворская И. М. Влияние пиротного градиента температуры на сферическое течение Куэтта. Изв. АН СССР, МЖГ, 1975, № 2.
12. Сорокин В. С. Нелинейные явления в замкнутых потоках вблизи критических чисел Рейнольдса. ПММ, 1961, т. 25, № 2.
13. Астафьева Н. М., Браиловская И. Ю., Яворская И. М. Нестационарное движение сжимаемой вязкой жидкости в шаровом слое. Изв. АН СССР, МЖГ, 1972, № 3.
14. Gregory N., Stuart J. T., Walker W. S. On the stability of three-dimensional boundary layers with application to the flow due to a rotating disk. Philos. Trans. Roy. Soc. London, 1955, vol. A 248, No. 943.
15. Snyder H. A. Stability of rotating Couette flow. I. Asymmetric waveforms. Phys. Fluids, 1968, vol. 11, No. 4.