

ИСТЕЧЕНИЕ ГАЗА ИЗ ОГРАНИЧЕННОГО ОБЪЕМА ЧЕРЕЗ СОПЛО ЛАВАЛЯ

В. В. МИХАЙЛОВ

(Москва)

Рассматривается автомодельный нестационарный режим течения в сопле Лавалья, который устанавливается при истечении идеального газа из емкости в пространство с достаточно малым давлением. Течение в сопле предполагается одномерным. Делаются качественные выводы о влиянии нестационарности течения на распределение чисел M . Для случая малого влияния нестационарности дается асимптотическое решение, полученное в квадратурах, и пример расчета.

1. Предположим, что время истечения из емкости достаточно велико и внутри сопла установился предельный автомодельный режим течения. Согласно работе [1] уравнения такого течения в одномерном приближении имеют вид

$$(1.1) \quad \frac{dA}{dx} = M \frac{\alpha - 1 - MA\Phi}{\alpha(M^2 - 1)}, \quad \frac{dM}{dx} = \frac{M^2 - \alpha^2 + (M^2 + \alpha)MA\Phi}{\alpha A(M^2 - 1)}$$

Здесь $\alpha = 2/(\kappa - 1)$, $\Phi = d \ln F/dx$, $A = at/L$, κ — показатель адиабаты, a — скорость звука, t — время, L — характерный линейный размер, F — площадь поперечного сечения сопла, M — Число Маха, x — расстояние вдоль оси сопла, отнесенное к L .

Чтобы в сопле могло реализоваться сверхзвуковое течение, необходимо выполнение следующего условия, аналогичного условию в критическом сечении при стационарном режиме

$$(1.2) \quad \Phi A = \alpha - 1, \quad M = 1$$

Используя (1.1), (1.2), сделаем некоторые качественные выводы о влиянии нестационарности на распределение значений числа M вдоль оси сопла.

Чтобы сравнить нестационарный и стационарный режимы течения, отметим, что последний является предельным случаем первого, например, при $A \rightarrow \infty$.

Рассмотрим влияние нестационарности на течение вблизи критического сечения сопла. В стационарном случае при $\Phi = 0$ значение $M = 1$. Для нестационарного течения согласно соотношению (1.2) число $M = 1$ достигается при $\Phi > 0$, так как для реальных значений κ ($\kappa \leq 5/3$) значение $\alpha > 1$, а значение A по определению всегда положительно. Таким образом сечение, в котором $M = 1$, сдвигается вниз по потоку, т. е. влияние нестационарности приводит к уменьшению чисел M в окрестности критического сечения сопла.

Рассмотрим далее расширяющуюся сверхзвуковую часть сопла, примыкающую к критическому сечению. Обозначим через F_1 , F_{1s} площадь сечений сопла, в которых $M = M_1 > 1$ соответственно при нестационарном

и стационарном течении. Тогда согласно доказанному выше значение M_1 всегда может быть выбрано таким образом, что $F_1 > F_{1s}$.

Из второго уравнения системы (1.1) вытекает следующее соотношение:

$$(1.3) \quad \ln \frac{F}{F_1} = \int_{M_1}^M \frac{dM}{Q(M) + \lambda}, \quad Q = \frac{M(\alpha + M^2)}{\alpha(M^2 - 1)}, \quad \lambda = \frac{M^2 - \alpha^2}{\alpha \Phi A (M^2 - 1)}$$

Для стационарного течения ($A = \infty$) значение $\lambda = 0$. Для нестационарного случая значение $\lambda < 0$ при $1 < M < \alpha$ и $\lambda > 0$ при $M > \alpha$. Из соотношения (1.3) для области чисел M , где при нестационарном течении $\lambda < 0$, получим, что $F/F_1 > (F/F_1)_s$, или (учитывая неравенство $F_1 > F_{1s}$) $F > F_s$. Отсюда следует, что по крайней мере в той части расширяющегося сопла, в которой при стационарном течении $1 \leq M \leq \alpha$, влияние нестационарности приводит к уменьшению значений числа M в фиксированных сечениях сопла. При $M > \alpha$ возможен и обратный эффект — увеличение значений числа M .

Рассмотрим сверхзвуковое течение в цилиндрической части сопла Лаваля. Решение системы (1.1) при $\Phi = 0$ имеет вид

$$(1.4) \quad A = C_1 (\alpha^2 - M^2)^{(\alpha-1)/2}, \quad M < \alpha, \quad A = C_2 (M^2 - \alpha^2)^{(\alpha-1)/2}, \quad M > \alpha$$

$$x = C_3 + MA + \alpha(\alpha - 1) \int \frac{AdM}{\alpha^2 - M^2}; \quad C_1, C_2, C_3 = \text{const}$$

Из второго уравнения системы (1.1) следует, что, если в некотором сечении F цилиндрического участка $M < \alpha$, то $dM/dx < 0$, и вниз по потоку число M уменьшается, а в случае $M > \alpha$ — увеличивается. (При этом согласно соотношениям (1.4) значение A , т. е. скорость звука, увеличивается в обоих случаях.)

Таким образом предыдущий вывод об уменьшении значений чисел M за счет нестационарности, когда при стационарном режиме $1 \leq M \leq \alpha$, справедлив для всей сверхзвуковой части сопла, включая и цилиндрический участок. Конкретно такое уменьшение будет наблюдаться, если в стационарном случае $M \leq 5$ при $\kappa = 7/5$ и $M \leq 3$ при $\kappa = 5/3$ (значения α соответственно равны 5 и 3).

Определим форму сопла, обеспечивающую $M = \text{const}$ в рабочей части. Из системы (1.1) при $dM/dx = 0$ получим

$$(1.5) \quad F = C_4 [x + C_5 \alpha (\alpha + 1) M^{-1}]^{(\alpha^2 - M^2) \alpha M^{-2}}$$

$$A = C_5 + M x \alpha^{-1} (\alpha + 1)^{-1}; \quad C_4, C_5 = \text{const}$$

Соотношения (1.5) говорят о том, что при $M < \alpha$ рабочая часть такого сопла должна расширяться, при $M > \alpha$ — сужаться, и только при $M = \alpha$ иметь цилиндрическую форму.

Отметим также, что квазистационарный предел соотношений (1.5) соответствует $C_5 \rightarrow \infty$ (или $x \rightarrow 0$).

2. Рассмотренные выше особенности течения относятся, строго говоря, к автомодельному режиму. Применительно к аэродинамическим трубам такой режим устанавливается спустя некоторое время после открытия клапана, соединяющего емкость и сопло. За это время должны затухнуть колебания давления в емкости, а сопло должно заполниться газом. Таким образом автомодельный режим является по существу рабочим режимом аэродинамических труб рассматриваемого типа (например, гелиевых или импульсных). В указанных трубах течение, как правило, достаточно близко к квазистационарному.

Учитывая сказанное, решим асимптотическую задачу об одномерном течении в сопле Лавала при малом отклонении от квазистационарности.

Определим малый параметр, характеризующий порядок величины указанного отклонения. Предполагая расход газа из емкости достаточно малым и, следовательно, параметры газа внутри емкости в первом приближении постоянными, запишем уравнение расхода и условие изэнтропичности течения

$$(2.1) \quad \frac{d\rho_0}{dt} = -\frac{F_* \rho_* a_*}{V}, \quad \rho_* = \rho_0 \left(\frac{\alpha}{\alpha+1} \right)^{\alpha/2} = \left(\frac{a_*^2 C}{\kappa} \right)^{\alpha/2}$$

Здесь $C = \text{const}$, ρ — плотность, V — объем емкости, индексами * и 0 обозначены соответственно параметры в критическом сечении и внутри емкости.

После интегрирования (2.1) получим

$$(2.2) \quad \left(\frac{\alpha}{\alpha+1} \right)^{1/2} a_0 t = a_* t = \alpha \left(\frac{\alpha+1}{\alpha} \right)^{\alpha/2} \frac{V}{F_*}, \quad A_* = \alpha \left(\frac{\alpha+1}{\alpha} \right)^{\alpha/2} \frac{V}{F_*}$$

Здесь при интегрировании учитывалось, что «автомодельное» время t отсчитывается от момента, соответствующего $a_* = 0$.

Поскольку квазистационарный предел соответствует $A = \infty$, в качестве малого параметра выберем величину

$$(2.3) \quad \varepsilon = \frac{1}{\alpha} \left(\frac{\alpha}{\alpha+1} \right)^{\alpha/2} \frac{F_* L}{V}$$

Отметим, что полученное выражение для малого параметра содержит в себе некоторую неопределенность, связанную с заданием величины объема емкости V . Однако если под L понимать характерную длину сопла, то величина $F_* L$ пропорциональна объему сопла, и поэтому при предельном переходе $\varepsilon \rightarrow 0$ объемом сопла с относительной погрешностью ε можно пренебречь по сравнению с V . Отсюда следует, что с указанной погрешностью можно условно отделить емкость от сопла в его любом начальном сечении. При этом если в асимптотическом разложении первый малый член имеет относительный порядок ε^k , то в решении имеет смысл удерживать лишь члены, превышающие по порядку величины ε^{k+1} .

Предельный переход $\varepsilon \rightarrow 0$ можно осуществлять различными способами, используя три независимых параметра V , F_* , L . В частности, пусть при $\varepsilon \rightarrow 0$ линейный размер емкости и длина сопла L остаются сравнимыми по порядку величины.

Рассмотрим уравнения трехмерного изэнтропического течения внутри емкости [1] при указанном предельном переходе

$$(2.4) \quad (\mathbf{M} \cdot \nabla) \mathbf{M} A + \alpha \nabla A - \mathbf{M} = 0, \quad (\nabla \cdot \mathbf{M}) A + \alpha [(\mathbf{M} \cdot \nabla A) - 1] = 0$$

Учитывая, что значение A внутри емкости в первом приближении имеет порядок ε^{-1} (соотношение (2.2)), а значение \mathbf{M} мало, согласно уравнениям (2.4) получим следующие разложения для A и \mathbf{M} :

$$(2.5) \quad A_0 = A_{01} \varepsilon^{-1} + A_{02} \varepsilon + \dots, \quad M_0 = M_{01} \varepsilon + \dots, \quad A_{01} = \alpha^{-1/2} (\alpha+1)^{1/2}$$

Асимптотические разложения для одномерного течения в сопле при использовании метода деформированных координат будут иметь вид

$$(2.6) \quad A = A_1 \varepsilon^{-1} + A_2 + \dots, \quad M = M_1 + M_2 \varepsilon + \dots, \quad x = \xi + x_1 \varepsilon + \dots \\ \Phi(x) = \Phi(\xi) + x_1 \Phi_1 \varepsilon + \dots, \quad \Phi_1 = d\Phi/d\xi$$

Разложение независимой переменной x должно обеспечить фиксированное (в переменной ξ) положение особой точки $M=1$. Поэтому из соотношения (1.2) будем иметь

$$(2.7) \quad x_1 = (\alpha - 1) / \Phi_{1*}, \quad \Phi_{1*} = d\Phi/d\xi \quad (\xi = \xi_*)$$

Подставляя разложения (2.6) в систему уравнений (1.1), получим

$$(2.8) \quad \begin{aligned} \frac{dA_1}{d\xi} &= -\frac{M_1^2 A_1 \Phi}{\alpha(M_1^2 - 1)} & \frac{dM_1}{d\xi} &= \frac{M_1 \Phi (M_1^2 + \alpha)}{\alpha(M_1^2 - 1)} \\ \frac{dA_2}{d\xi} &= \frac{dA_1}{d\xi} \left[\frac{A_2}{A_1} + \frac{\Phi_1 x_1}{\Phi} - \frac{\alpha - 1}{M_1 A_1 \Phi} - \frac{2M_2}{M_1 (M_1^2 - 1)} \right] \\ \frac{dM_2}{d\xi} &= \frac{dM_1}{d\xi} \left[\frac{M_2}{M_1} - \frac{2(\alpha + 1)M_2 M_1}{(M_1^2 - 1)(M_1^2 + \alpha)} - \frac{\Phi_1 x_1}{\Phi} \right] + \frac{M_1^2 - \alpha^2}{\alpha A_1 (M_1^2 - 1)} \end{aligned}$$

Начальные условия для M_1 и M_2 следуют из условий в особой точке ξ_* , где $\Phi(\xi) = 0, M = 1$. Они имеют вид

$$M_1 = 1, \quad M_2 = 0, \quad \xi = \xi_*$$

Начальные условия для A_1 и A_2 найдем, используя разложение A внутри емкости (2.5)

$$A_1 \rightarrow \alpha^{-1/2} (\alpha + 1)^{1/2}, \quad A_2 \rightarrow 0, \quad \Phi(\xi) \rightarrow -\infty \quad (M_1 \rightarrow 0)$$

Интегрирование уравнений (2.8) при указанных начальных условиях дает

$$(2.9) \quad \begin{aligned} A_1 &= \left(\frac{\alpha + 1}{\alpha + M_1^2} \right)^{1/2}, \quad \frac{F}{F_*} = \frac{1}{M_1} \left(\frac{\alpha + M_1^2}{\alpha + 1} \right)^{(\alpha + 1)/2} \\ M_2 &= \frac{M_1 (\alpha + M_1^2)}{\alpha (M_1^2 - 1)} \left(x_1 \Phi + \frac{1}{\sqrt{\alpha + 1}} \int_{\xi_*}^{\xi} \frac{M_1^2 - \alpha^2}{M_1 (\alpha + M_1^2)} d\xi \right) \\ A_2 &= A_1 \int_0^{M_1} \left(\frac{2M_2}{M_1^2 - 1} + \frac{\alpha - 1}{A_1 \Phi} - \frac{M_1 x_1 \Phi_1}{\Phi} \right) \frac{dM_1}{M_1^2 + \alpha} \end{aligned}$$

Первые два уравнения (2.9) являются уравнением Бернулли и уравнением сохранения расхода для квазистационарного течения. Два последних соотношения определяют в первом приближении отклонения, вызванные нестационарностью (в частности, изменение распределения чисел M по длине сопла).

Однако отметим, что для расчета влияния нестационарности на размерные характеристики течения необходим переход от безразмерных параметров A_1, A_2 к размерной величине — скорости звука ($A = at/L$). Для этой цели необходимо знать величину t , которая только при $t \rightarrow \infty$ может быть отождествлена со временем работы трубы.

В общем случае для определения t необходим расчет режима запуска трубы (режима перехода к автомодельному течению) или использование экспериментальных данных. Предположим, например, что в какой-либо момент времени после выхода на автомодельный режим течения известно значение скорости звука внутри емкости. Это значение a_{0j} (согласно разложениям (2.5)) постоянно по координатам с относительной погрешностью ε^2 , поскольку $A_{0j} \approx A\varepsilon$.

Отсюда же следует, что значение «автомодельного» времени t_j в данный момент равно с указанной погрешностью

$$t_j = La_{0j}^{-1} (\alpha + 1)^{1/2} \alpha^{-1/2}$$

Таким образом, если Δt — время, отсчитываемое от момента измерения a_{0j} , то

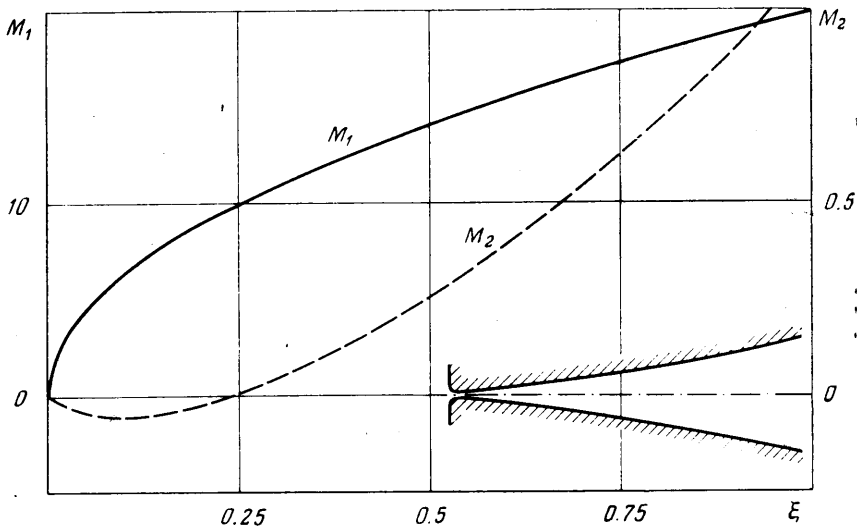
$$t = t_j + \Delta t$$

В том случае, когда известна зависимость a_0 от времени, можно обойтись и без определения t , поскольку из соотношений (2.9) следует:

$$a_1 = a_0 \left(\frac{\alpha}{M_1^2 + \alpha} \right)^{1/2}$$

$$a_2 = a_0 \left(\frac{\alpha}{M_1^2 + \alpha} \right)^{1/2} \int_0^{M_1} \left(\frac{2M_2}{M_1^2 - 1} + \frac{\alpha - 1}{A_1 \Phi} - \frac{M_1 x_1 \Phi_1}{\Phi} \right) \frac{dM_1}{M_1^2 + \alpha}$$

Значение a_0 может быть найдено с помощью измерения давления в емкости при использовании условия изэнтропичности течения.



3. Приведем пример расчета и некоторые соотношения, которые могут быть полезными при конкретных численных оценках.

Рассмотрим течение внутри сопла Лавала, имеющего следующие геометрические параметры:

$$(3.1) \quad \frac{F}{F_*} = \frac{1}{\sqrt{x}} \left(\frac{\alpha + x}{\alpha + 1} \right)^{(\alpha+1)/2}, \quad \Phi(x) = \frac{\alpha(x-1)}{2x(\alpha+x)}$$

При $x \rightarrow \infty$ отношение $F/F_* \rightarrow x^{\alpha/2}$ и для $\kappa=1.5$ (в случае осевой симметрии) будем иметь коническое сопло. При $\kappa=1.4$ форма такого сопла ($x \rightarrow \infty$) близка к конической.

Выбранная геометрия сопла обеспечивает достаточно простую связь числа M_1 с координатой, а именно

$$(3.2) \quad M_1 = \sqrt{\xi}$$

Из соотношений (2.9), (3.1), (3.2) следует:

$$(3.3) \quad M_2 = \frac{\alpha(\alpha^2 - 1)}{\sqrt{\xi}} + \frac{\sqrt{\xi(\xi + \alpha)}}{\alpha(\xi - 1)} \left[\sqrt{\frac{\xi(\xi + \alpha)}{1 + \alpha}} - 1 - \right. \\ \left. - \frac{\alpha(2\alpha + 1)}{\sqrt{\alpha + 1}} \ln \frac{\sqrt{\xi + \alpha} + \sqrt{\xi}}{\sqrt{1 + \alpha} + 1} \right] \\ x_1 = 2\alpha(\alpha^2 - 1)$$

В полученном решении за характерный линейный размер принято расстояние от емкости ($x=0$) до критического сечения сопла ($x=1$). При другом выборе характерной длины решение для M_2 изменилось бы, так как M_2 обратно пропорционально L . Однако произведение ϵM_2 , естественно, сохранило бы свою величину.

На фигуре представлены результаты расчета формы сопла и функций $M_1(\xi)$, $M_2(\xi)$. Здесь $\kappa=1.4$, а в качестве характерной длины выбрано расстояние от емкости до того сечения сопла, в котором $M_1=20$.

Полученные результаты полностью подтверждают качественные выводы, изложенные в п. 1.

В заключение приведем оценочные соотношения, которые следуют из (2.9) и определяют порядок относительного изменения числа M за счет влияния нестационарности

$$(3.4) \quad \left| \frac{\Delta M}{M} \right| \approx k \frac{x_d d_*^2}{V}$$

Здесь $k=0.008$ при $\kappa=1.4$, $k=0.03$ при $\kappa=1.67$, x_d — текущая размерная длина сопла, d_* — диаметр критического сечения сопла.

Формула (3.4) соответствует предельному случаю $M_1 \rightarrow \infty$, но может быть применена для оценок при всех $M_1 > 1$.

Поступила 10 VI 1977

ЛИТЕРАТУРА

1. Михайлов В. В., Хаскин Л. Я. Об истечении газа из емкости в вакуум. Изв. АН СССР, МЖГ, 1978, № 1.