

**О ПОСТРОЕНИИ УРАВНЕНИЙ ГАЗОДИНАМИКИ
ДЛЯ МНОГОАТОМНЫХ ГАЗОВ С ПРОИЗВОЛЬНЫМ ОТНОШЕНИЕМ
СКОРОСТЕЙ УПРУГИХ И НЕУПРУГИХ ПРОЦЕССОВ**

М. Н. КОГАН, Н. К. МАКАШЕВ

(Москва)

Метод построения уравнений газодинамики, предложенный в работах [1-3], допускает определенный произвол. Ниже проанализирован характер этого произвола и показано, что при любом выборе фигурирующих в методе произвольных постоянных окончательные уравнения газодинамики получаются одними и теми же.

Анализируется необходимость учета отклонения функции распределения от равновесной при определении скоростей реакций (неупругих процессов), происходящих при бимолекулярных столкновениях.

1. Асимптотическая теория решений кинетического уравнения Больцмана при малых значениях числа Кнудсена хорошо известна [4-7]. В последнее время большое число работ посвящено выводу из уравнения Больцмана уравнений газодинамики для смесей газов при наличии неупругих процессов (возбуждения внутренних степеней свободы и химических реакций); библиографию по этому поводу см., например, в [7-9] и в соответствующих работах, опубликованных в сборниках [10]. Уравнение Больцмана для функции распределения $f_a(t, x, \xi)$ молекул, находящихся в квантовом внутреннем состоянии Ω , можно записать в следующем безразмерном виде:

$$(1.1) \quad \varepsilon \frac{df_a}{dt} = \varepsilon \left(\frac{\partial f_a}{\partial t} + \xi_{a i} \frac{\partial f_a}{\partial x_i} \right) = \frac{1}{2} J_a^e(f, f) + \alpha \frac{1}{2} J_a^R(f, f)$$

Для простоты рассмотрение проводится на примере газа из молекул одного сорта с внутренними степенями свободы. Для многоатомных газов при наличии химических реакций все рассуждения аналогичны, но более громоздки; некоторые основные результаты, относящиеся к этому случаю, приведены в Приложении I. С целью упрощения записи принимается также, что все неупругие процессы характеризуются одним параметром α ; обобщение также очевидно.

В (1.1) $1/2 J_a^e$ и $1/2 J_a^R$ — суммы интегралов упругих и неупругих столкновений, $\varepsilon = Kn$ — число Кнудсена, параметры $\alpha = \sigma_R / \sigma_e$ характеризуют отношение сечений неупругих столкновений σ_R к сечениям упругих столкновений σ_e .

Из уравнений (1.1) следуют уравнения сохранения, справедливые при любых значениях числа Кнудсена

$$(1.2) \quad \frac{\partial n_a}{\partial t} + \frac{\partial n_a u_{a i}}{\partial x_i} = \frac{\alpha}{\varepsilon} \int \frac{1}{2} J_a^R(f, f) d\xi_a = \frac{\alpha}{\varepsilon} R_a$$

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial n u_i}{\partial x_i} = 0 \quad \frac{D u_i}{D t} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P_i}{\partial x_j}$$

$$n \frac{D}{Dt} \left(\frac{3}{2} kT + E \right) = -P_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial q_i}{\partial x_i}$$

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u_i \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad n_\alpha = \int f_\alpha d\xi_\alpha, \quad n = \sum_\alpha n_\alpha$$

$$\rho = mn, \quad E = \frac{1}{n} \sum_\alpha n_\alpha E_\alpha, \quad u_\alpha = \frac{1}{n_\alpha} \int f_\alpha \xi_\alpha d\xi_\alpha$$

$$u = \frac{1}{n} \sum_\alpha n_\alpha u_\alpha, \quad T = \frac{1}{3nk} \sum_\alpha \int mc_\alpha^2 f_\alpha d\xi_\alpha$$

$$P_{ij} = m \sum_\alpha \int c_{\alpha i} c_{\alpha j} f_\alpha d\xi_\alpha,$$

$$q = \sum_\alpha \int \left(\frac{mc_\alpha^2}{2} + E_\alpha \right) c_{\alpha i} f_\alpha d\xi_\alpha$$

Здесь m — масса молекулы, ξ_α — ее скорость, k — постоянная Больцмана.

Для замыкания системы (1.2) необходимо выразить «лишние» величины u_α , R_α , P_{ij} и q через газодинамические величины n_α , u , T и их производные. Цель асимптотического анализа и состоит в нахождении этих дополнительных связей, справедливых при $\varepsilon = Kn \rightarrow 0$.

До недавнего времени исследовались лишь две предельных ситуации: а) $\alpha = \text{const}$, $\varepsilon \rightarrow 0$ («равновесный» случай); б) $\alpha \sim \varepsilon \rightarrow 0$ («релаксационный» случай). Решение строится в виде асимптотического ряда

$$f_{\alpha a, b} = f_{\alpha a, b}^{(0)} + \varepsilon f_{\alpha a, b}^{(1)} + \dots = f_{\alpha a, b}^{(0)} (1 + \varepsilon \varphi_{\alpha a, b}^{(1)} + \dots)$$

члены которого удовлетворяют уравнениям

$$(1.3) \quad \frac{1}{2} J_{\alpha a} (f_a^{(0)}, f_a^{(0)}) = \frac{1}{2} J_{\alpha a}^e (f_a^{(0)}, f_a^{(0)}) + \alpha \frac{1}{2} J_{\alpha a}^R (f_a^{(0)}, f_a^{(0)}) = 0,$$

$$\frac{df_{\alpha a}^{(0)}}{dt} = J_{\alpha a} (f_a^{(0)}, f_a^{(1)}), \dots$$

$$(1.4) \quad \frac{1}{2} J_{\alpha b} (f_b^{(0)}, f_b^{(0)}) = \frac{1}{2} J_{\alpha b}^e (f_b^{(0)}, f_b^{(0)}) = 0,$$

$$\frac{df_{\alpha b}^{(0)}}{dt} - \frac{1}{2} J_{\alpha b}^R (f_b^{(0)}, f_b^{(0)}) = J_{\alpha b} (f_b^{(0)}, f_b^{(1)}), \dots$$

Решением интегральных уравнений $\frac{1}{2} J_{\alpha a, b} (f^{(0)}, f^{(0)}) = 0$ являются максвелловские функции

$$f_{\alpha a, b}^{(0)} = n_{\alpha a, b}^{(0)} \left(\frac{m}{2\pi k T_{\alpha a, b}^{(0)}} \right)^{3/2} \exp \left[- \frac{m}{2k T_{\alpha a, b}^{(0)}} (\xi_\alpha - u_{\alpha a, b}^{(0)})^2 \right]$$

где $n_{\alpha a, b}^{(0)}$, $u_{\alpha, b}^{(0)}$ и $T_{\alpha, b}^{(0)}$ — неизвестные параметры, зависящие от t и x , причем

$$n_{\alpha a}^{(0)} = n_a^{(0)} g_{\alpha} \exp\left(-\frac{E_{\alpha}}{kT_a^{(0)}}\right) \left[\sum_{\Psi} g_{\Psi} \exp\left(-\frac{E_{\Psi}}{kT_a^{(0)}}\right) \right]^{-1} =$$

$$= n_a^{(0)} \Phi_{\alpha}(T_a^{(0)}), \quad \sum_{\alpha} n_{\alpha a, b}^{(0)} = n_{a, b}^{(0)}$$

т. е. в случае б) этих неизвестных параметров на $z-1$ больше, чем в случае а). Здесь z — число различных значений индекса Ω , g_{α} — вырождение Ω -состояния.

Уравнения для $f_{\Omega a, b}^{(k)}$, $k=1, 2, \dots$, фредгольмовского типа; условия их разрешимости, число которых равно числу собственных функций однородных интегральных уравнений, накладывают на неоднородные части уравнений ровно столько условий, сколько неизвестных параметров содержат функции $f_{\Omega a, b}^{(0)}$. Эти условия позволяют исключить производные по времени из неоднородных частей интегральных уравнений. Равенство числа собственных функций однородных уравнений числу неизвестных параметров позволяет также распорядиться произвольными постоянными в общих решениях уравнений, например, таким образом, чтобы $n_{\alpha b}^{(k)}$, $n_{a, b}^{(k)}$,

$u_{\alpha, b}^{(k)}$ и $T_{\alpha, b}^{(k)}$, вычисляемые по $f_{\Omega a, b}^{(k)}$, $k=1, 2, \dots$, равнялись нулю. В этом случае неизвестные параметры, входящие в $f_{\Omega a, b}^{(0)}$, методом построения делаются равными истинным значениям гидродинамических величин.

В работах [1-3] дан алгоритм построения решения уравнения Больцмана (1.1) при $\varepsilon \rightarrow 0$, пригодного для произвольных по величине α . При этом, в частности, показано, что при всех α функции $f_{\Omega}^{(0)}$ и $f_{\Omega}^{(1)}$ удовлетворяют уравнениям

$$(1.5) \quad {}^1/2 J_{\alpha}^e(f^{(0)}, f^{(0)}) = {}^1/2 J_{\alpha b}(f^{(0)}, f^{(0)}) = 0$$

$$(1.6) \quad \frac{df_{\Omega}^{(0)}}{dt} - \frac{\alpha}{\varepsilon} \frac{1}{2} J_{\alpha}^R(f^{(0)}, f^{(0)}) = J_{\alpha}^e(f^{(0)}, f^{(1)}) +$$

$$+ \alpha J_{\alpha}^{RS}(f^{(0)}, f^{(1)}) = J_{\alpha a}^*(f^{(0)}, f^{(1)})$$

Здесь $J_{\alpha}^{RS}(f^{(0)}, f^{(1)})$ — симметризованная часть линеаризованного интеграла неупругих столкновений; оператор $J_{\alpha a}^*(f^{(0)}, f^{(1)})$ имеет те же собственные функции, что и приведенный выше оператор $J_{\alpha a}(f_a^{(0)}, f_a^{(1)})$.

В связи с этим отметим, что процедура симметризации, предложенная в [1], имеет принципиальное значение для построения метода, поскольку только для самосопряженных операторов известные теоремы теории фредгольмовских интегральных уравнений справедливы в том виде, в каком они применяются в кинетической теории газов при выводе уравнений газодинамики из уравнения Больцмана.

Действительно, сумматорные инварианты столкновений в случае использования несимметризованного оператора являются собственными функциями сопряженного исходному оператору, вследствие чего условия разрешимости будут иметь тот же вид. Однако собственные функции самого несимметризованного оператора неизвестны (известно лишь их число), а это делает невозможным получение общего решения рассматриваемых интегральных уравнений для членов разложения f_{Ω} .

Как следует из сказанного выше, функции $f_{\Omega}^{(0)}$ в данном случае содержат на $z-1$ больше неизвестных параметров, чем имеется собственных

функций у однородного интегрального оператора уравнения (1.6), и, следовательно, условий разрешимости этого уравнения.

Условия разрешимости накладывают пять условий на левые части уравнения (1.6)

$$(1.7) \quad \frac{\partial n_0}{\partial t} + \frac{\partial n_0 u_{0i}}{\partial x_i} = 0, \quad \rho_0 \left(\frac{\partial u_{0i}}{\partial t} + u_{0j} \frac{\partial u_{0i}}{\partial x_j} \right) = - \frac{\partial p_0}{\partial x_i}$$

$$n_0 \left(\frac{\partial}{\partial t} + u_{0j} \frac{\partial}{\partial x_j} \right) \left(\frac{3}{2} k T_0 + E_0 \right) = - p_0 \frac{\partial u_{0i}}{\partial x_i}, \quad p_0 = n_0 k T_0$$

Эти условия позволяют исключить из левой части (1.6) производные по времени от n_0 , u_{0i} и T_0 ¹; в результате имеем

$$(1.8) \quad f_a^{(0)} \left[\left(\frac{m c_{0a}^2}{2kT_0} - \frac{5}{2} \right) c_{0ai} \frac{1}{T_0} \frac{\partial T_0}{\partial x_i} + c_{0ai} \frac{\partial \ln Y_{a0}}{\partial x_i} + \right.$$

$$\left. + \frac{m}{kT_0} \left(c_{0ai} c_{0aj} - \frac{\delta_{ij}}{3} c_{0a}^2 \right) \frac{\partial u_{0i}}{\partial x_j} + \frac{1}{Y_{a0}} \frac{D_0 Y_{a0}}{Dt} - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{kT_0} \left(\frac{m c_{0a}^2}{3kT} - 1 \right) \sum_{\Psi} E_{\Psi} \frac{D_0 Y_{\Psi 0}}{Dt} \right] - \frac{\alpha}{\varepsilon} \frac{1}{2} J_a^R(f^{(0)}, f^{(0)}) =$$

$$= J_a^e(f^{(0)}, f^{(0)}) \Phi + \alpha J_a^{RS}(f^{(0)}, f^{(0)}) \Phi, \quad c_{0a} = \xi_a - u_0$$

$$Y_{a0} = \frac{n_{a0}}{n_0}, \quad \frac{D_0 Y_{a0}}{Dt} = \frac{1}{n_0} \left[\frac{\partial n_{a0}}{\partial t} + u_{0i} \frac{\partial n_{a0}}{\partial x_i} + n_{a0} \frac{\partial u_{0i}}{\partial x_i} \right] =$$

$$= \frac{1}{n_0} \frac{dn_{a0}}{dt}$$

Как видно, в левых частях (1.8) осталась $z-1$ производная по времени от величин n_{a0} (заметим, что $\sum_{\Omega} n_{a0} = n_0$). Так как условия разрешимости теперь выполнены, то решение (1.8) существует при любых dn_{a0}/dt , причем любое решение (1.8) удовлетворяет соотношениям

$$(1.9) \quad \frac{dn_{a0}}{dt} - \frac{\alpha}{\varepsilon} \int \frac{1}{2} J_a^R(f^{(0)}, f^{(0)}) d\xi_a = \alpha \int J_a^{RS}(f^{(0)}, f^{(0)}) \Phi d\xi_a$$

которые являются следствием (1.8).

Правые части в (1.9) (после нахождения Φ_a) есть некоторые величины $A_a(t, \mathbf{x})$, не зависящие от ξ_a , причем

$$\sum_a A_a = 0$$

С другой стороны, если задавать произвольно $z-1$ значений A_a , то из соотношений

$$(1.10) \quad \frac{dn_{a0}}{dt} = \frac{\alpha}{\varepsilon} \int \frac{1}{2} J_a^R(f^{(0)}, f^{(0)}) d\xi_a + A_a(t, \mathbf{x})$$

¹ Вообще говоря, исключение производных по времени не обязательно. С тем же правом можно исключить любые другие пять производных (по числу условий разрешимости). Исключение производных по времени связано лишь с целью получения выражения для функции распределения через гидродинамические величины и их пространственные производные, что соответствует методу Чепмена – Энскога.

можно получить $z-1$ независимых условий, с помощью которых можно исключить $z-1$ производную $dn_{\alpha 0}/dt$ из левых частей уравнений (1.8). При этом решение получившихся уравнений, как легко проверить, удовлетворяет соотношениям

$$(1.11) \quad \alpha \int J_{\alpha}^{RS}(f^{(0)}, f^{(0)}) d\xi_{\alpha} = A_{\alpha}(t, x)$$

В связи с этим заметим, что по предположению $f_{\alpha} = f_{\alpha}^{(0)} [1 + \varepsilon \varphi_{\alpha} + \dots]$, $\varphi_{\alpha} = O(1)$. Рассматривая (1.9) и (1.11), можно заключить, что φ_{α} — решение (1.8) — будет величиной порядка единицы лишь в том случае, если производные $dn_{\alpha 0}/dt$ отличаются от интеграла

$$\frac{\alpha}{\varepsilon} \int \frac{1}{2} J_{\alpha}^R(f^{(0)}, f^{(0)}) d\xi_{\alpha} = O(1)$$

на величины порядка α , или $A_{\alpha}(t, x)$ в (1.10) имеют величину $O(\alpha)$. В Приложении II показано, что требование $A_{\alpha} = O(\alpha)$ является в то же время и достаточным для того, чтобы φ_{α} были величинами порядка единицы. Таким образом, на самом деле произвол в соотношениях (1.10) заключается в величинах $O(\alpha)$, в то время как сами $dn_{\alpha 0}/dt = O(1)$.

После исключения $dn_{\alpha 0}/dt$ с помощью (1.10) общее решение уравнений (1.8) состоит из частного решения, определяемого заданием A_{α} , и общего решения однородного уравнения, содержащего пять произвольных коэффициентов (по числу собственных функций). Эти произвольные постоянные можно выбрать, например, так, чтобы φ_{α} не давали вклада в величины n , u и T , так что в этом случае $n = n_0$, $u = u_0$, $T = T_0$.

Однако

$$(1.12) \quad n_{\alpha} = \int f_{\alpha} d\xi_{\alpha} = \int f_{\alpha}^{(0)} d\xi_{\alpha} + \varepsilon \int f_{\alpha}^{(0)} \varphi_{\alpha} d\xi_{\alpha} + \dots = \\ = n_{\alpha 0} (1 + \varepsilon \bar{\varphi}_{\alpha} + \dots) = n_{\alpha 0} + \varepsilon n_{\alpha 1} + \dots$$

и в общем случае $\bar{\varphi}_{\alpha}$ не равны нулю, а их величина определяется выбором A_{α} .

В работе [11] предлагается исключить $dn_{\alpha 0}/dt$ с помощью соотношений (1.9), в этом случае для φ_{α} получается уравнение с усложненным интегральным оператором, включающим в себя помимо хорошо изученного оператора уравнения (1.8) интегралы по скоростям от симметризованного линеаризованного интеграла неупругих столкновений. При этом приходится отыскивать собственные функции для этого усложненного интегрального оператора, знание которых необходимо для построения общего решения уравнения (1.8), преобразованного указанным способом.

Однако нетрудно показать, что общее решение этих усложненных интегральных уравнений совпадает с общим решением, которое строится в настоящей работе с помощью исключения $dn_{\alpha 0}/dt$ согласно (1.10), и, следовательно, подход работы [11] приводит к тем же конечным результатам, но более сложным путем.

Действительно, рассмотрим уравнения для скалярной части φ_{α} , решаемые здесь и в работе [11]. Для краткости изложения запишем их в несколько схематичном представлении

$$(1.13) \quad W_{\alpha}(A) + F_{\alpha}(c_{\alpha}^2) = L_{\alpha}(\varphi)$$

$$(1.14) \quad W_{\alpha} \left(\int L(\varphi) d\xi \right) + F_{\alpha}(c_{\alpha}^2) = L_{\alpha}(\varphi)$$

где $L_{\alpha}(\varphi)$ — интегральный оператор уравнений (1.8); $F_{\alpha}(c_{\alpha}^2)$ — слагаемые в неоднородной части уравнения после ее преобразования согласно (1.9) или (1.10), в которые не входят соответственно $\alpha \int J_{\alpha}^{RS}(f^{(0)}, f^{(0)}) d\xi_{\alpha}$ или A_{α} ; $W_{\alpha}(A) = \sum_{\Psi} W_{\alpha \Psi} A_{\Psi}$ — члены

в неоднородной части, содержащие произвольные величины A_α ; $W_\alpha(\int L(\varphi) d\epsilon)$ — члены, содержащие интегралы $\alpha \int J_\alpha^{RS}(f^{(0)}, f^{(0)}\varphi) d\xi_\alpha$. Уравнение (1.14) решается в [11].

Для дальнейшего важно, что общее решение уравнения (1.13) может быть представлено в виде

$$(1.15) \quad \varphi_{\alpha*} = \varphi_{\alpha 1}(A) + \varphi_{\alpha 2}(F) + \Sigma_\alpha$$

где Σ_α — общее решение однородного уравнения $L_\alpha(\varphi) = 0$. Это возможно потому, что оба слагаемых в неоднородной части (1.13) по отдельности удовлетворяют условиям разрешимости.

Нетрудно проверить, что

$$\int F_\alpha(c_\alpha^2) dc_\alpha = 0, \quad \int W_\alpha(A) dc_\alpha = A_\alpha$$

В силу этого имеют место равенства

$$(1.16) \quad \int L_\alpha(\varphi_2(F)) dc_\alpha = 0, \quad \int L_\alpha(\varphi_1(A)) dc_\alpha = A_\alpha$$

а сама функция $\varphi_{\alpha*}$ удовлетворяет уравнению (1.14). Покажем, что в силу произвольности величин A_α и постоянных, входящих в общее решение однородного уравнения Σ_α , решение (1.15) является общим решением и уравнения (1.14).

Поскольку $\varphi_{\alpha*}$ удовлетворяет (1.14), то общее решение этого уравнения может быть представлено в виде $\varphi_\alpha = \varphi_{\alpha*} + \psi_\alpha = \varphi_{\alpha 1}(A) + \varphi_{\alpha 2}(F) + \Sigma_\alpha + \psi_\alpha$, где ψ_α удовлетворяет однородному уравнению

$$(1.17) \quad W_\alpha \left(\int L(\psi) d\epsilon \right) = L_\alpha(\psi)$$

Если допустить существование нетривиального решения уравнения (1.17), отличающегося от Σ_α , то для него имеет место $\int L_\alpha(\psi) dc_\alpha = B_\alpha$, где B_α — новые постоянные, не зависящие от скоростей молекул. Тогда, очевидно, $\psi_\alpha = \varphi_{\alpha 1}(B) + \xi_\alpha$, где $\int L_\alpha(\xi) dc_\alpha = 0$, и вследствие этого ξ_α , удовлетворяющие уравнению $L_\alpha(\xi) = 0$, совпадают по виду с Σ_α , т. е. $\xi_\alpha = \Sigma_\alpha$.

Таким образом, общее решение уравнения (1.14) имеет вид

$$\varphi_\alpha = \varphi_{\alpha 1}(A) + \varphi_{\alpha 2}(F) + \varphi_{\alpha 1}(B) + \Sigma_\alpha + \Sigma_\alpha''$$

или в силу линейной зависимости $\varphi_{\alpha 1}(A)$ от A_α и Σ_α от соответствующих произвольных постоянных

$$\varphi_\alpha = \varphi_{\alpha 1}(A') + \varphi_{\alpha 2}(F) + \Sigma_\alpha', \quad A_\alpha' = A_\alpha + B_\alpha, \quad \Sigma_\alpha' = \Sigma_\alpha' + \Sigma_\alpha''$$

что и требовалось доказать.

Нашей конечной целью является вывод замкнутых уравнений газодинамики для полных величин n , u , T и n_α . Покажем, что выраженные через эти полные газодинамические величины функции f_α не зависят от выбора A_α , а следовательно, не зависят от этого выбора и получающиеся уравнения газодинамики.

2. Пусть $\varphi_{\alpha*}$ — решение уравнений (1.8) при некотором произвольном выборе A_α и пусть постоянные в общем решении однородного уравнения подобраны таким образом, что $n_0 = n$, $u_0 = u$, $T_0 = T$. Заменим в функции $f_\alpha^{(0)}$ плотность $n_{\alpha 0}$ на n_α по формуле $n_{\alpha 0} = n_\alpha [1 - \epsilon \varphi_{\alpha*} + \dots]$. Тогда для функции распределения f_α получим

$$(2.1) \quad f_\alpha = \tilde{f}_\alpha^{(0)} [1 + \epsilon (\varphi_{\alpha*} - \varphi_{\alpha*}') + \dots] = \tilde{f}_\alpha^{(0)} [1 + \epsilon \psi_\alpha + \dots],$$

$$\tilde{f}_\alpha^{(0)} = n_\alpha f_\alpha^{(0)} / n_{\alpha 0}$$

Очевидно, что

$$(2.2) \quad \bar{\psi}_\alpha = \frac{1}{n_\alpha} \int \tilde{f}_\alpha^{(0)} \psi_\alpha d\xi_\alpha = 0$$

С погрешностью $O(\varepsilon)$

$$(2.3) \quad \sum_{\alpha} \int \tilde{f}_{\alpha}^{(0)} \psi_{\alpha} \left\{ \begin{matrix} c_{\alpha} \\ mc_{\alpha}^2 \end{matrix} \right\} d\xi_{\alpha} = 0$$

т. е. функции ψ_{α} не дают вклада не только в n , u и T , но и в n_{α} .

Учитывая, что

$$(2.4) \quad \begin{aligned} J_{\alpha}^e(f^{(0)}, f^{(0)}\varphi^*) &= J_{\alpha}^e(\tilde{f}^{(0)}, \tilde{f}^{(0)}\varphi^*) + O(\varepsilon) = 0 \\ \frac{\alpha}{\varepsilon} \frac{1}{2} J_{\alpha}^R(f^{(0)}, f^{(0)}) &= \frac{\alpha}{\varepsilon} \frac{1}{2} J_{\alpha}^R(\tilde{f}^{(0)}, \tilde{f}^{(0)}) - \alpha J_{\alpha}^{RS}(\tilde{f}^{(0)}, \tilde{f}^{(0)}\varphi^*) + O(\varepsilon) \\ \alpha J_{\alpha}^{RS}(\tilde{f}^{(0)}, \tilde{f}^{(0)}\varphi^*) &= \alpha J_{\alpha}^{RS}(\tilde{f}^{(0)}, \tilde{f}^{(0)}\varphi^*) + O(\alpha\varepsilon) \\ J_{\alpha}^e(\tilde{f}^{(0)}, \tilde{f}^{(0)}\varphi^*) &= J_{\alpha}^e(\tilde{f}^{(0)}, \tilde{f}^{(0)}\varphi^*) + O(\varepsilon) \end{aligned}$$

найдем, что функции ψ_{α} с ошибкой $O(\varepsilon)$ удовлетворяют уравнениям (1.8) и условиям (1.9) (а также и (2.2), (2.3)), в которых $\tilde{f}_{\alpha}^{(0)}$ и φ_{α}^* заменены на $\tilde{f}_{\alpha}^{(0)}$ и ψ_{α} , а $n_{\alpha 0}$, n_{α} , u_{α} и T_{α} — на n_{α} , n , u , T , т. е. на полные газодинамические величины.

Важно отметить, что при этом теряется явная зависимость решения от A_{α} , поскольку в уравнения для ψ_{α} величины A_{α} не входят. Исходя из этого, несложно доказать и более сильное утверждение о том, что функции $\psi_{\alpha} = \varphi_{\alpha}^* - \bar{\varphi}_{\alpha}^*$ с погрешностью $O(\varepsilon)$ вообще не зависят от произвола в выборе A_{α} , а зависят лишь от полных газодинамических величин.

Действительно, если φ_{α}^{**} и φ_{α}^{***} — решения уравнения (1.8) при различном выборе A_{α} , причем $A_{\alpha}' \neq A_{\alpha}''$, то, переходя от функций φ_{α}^{**} и φ_{α}^{***} к функциям ψ_{α}' и ψ_{α}'' согласно (2.1), в соответствии с вышесказанным найдем, что функции

$$\chi_{\alpha} = \psi_{\alpha}' - \psi_{\alpha}'' = (\varphi_{\alpha}^{**} - \bar{\varphi}_{\alpha}^{**}) - (\varphi_{\alpha}^{***} - \bar{\varphi}_{\alpha}^{***})$$

с погрешностью $O(\varepsilon)$ являются решениями однородных интегральных уравнений

$$J_{\alpha}^e(\tilde{f}^{(0)}, \tilde{f}^{(0)}\chi_{\alpha}) + \alpha J_{\alpha}^{RS}(\tilde{f}^{(0)}, \tilde{f}^{(0)}\chi_{\alpha}) = 0$$

Так как по построению функции φ_{α}^* не дают вклад в n , u и T , то и функции χ_{α} с погрешностью $O(\varepsilon)$ удовлетворяют условиям

$$\sum_{\alpha} n_{\alpha} \chi_{\alpha} = 0, \quad \sum_{\alpha} \int \tilde{f}_{\alpha}^{(0)} \chi_{\alpha} \left\{ \begin{matrix} mc_{\alpha} \\ \frac{mc_{\alpha}^2}{2} \end{matrix} \right\} d\xi_{\alpha} = 0$$

а отсюда следует, что с погрешностью $O(\varepsilon)$ χ_{α} равны нулю, т. е.

$$(\varphi_{\alpha}^{**} - \bar{\varphi}_{\alpha}^{**}) = (\varphi_{\alpha}^{***} - \bar{\varphi}_{\alpha}^{***}) + O(\varepsilon)$$

что и требовалось доказать.

Как показано в Приложении II, решение уравнений (1.8) действительно содержит лишь $z+4$ произвольных постоянных (пять коэффициентов в общем решении однородного интегрального уравнения и $z-1$ новых произвольных величин A_{α} в (1.10)), что позволяет единственным образом построить решение этого уравнения, удовлетворяющее условиям (2.2) и (2.3).

Таким образом, если найти функции φ_{α}^* при произвольном выборе величин A_{α} и затем перейти в решении к полным газодинамическим вели-

чинам согласно (2.1), то в результате получим с ошибкой $Q(\epsilon^2)$ одну и ту же функцию f_α и, следовательно, одни и те же газодинамические уравнения, независимо от того, какие A_α были выбраны.

В работах [1-3] величины A_α были выбраны равными нулю. При этом $n_\alpha \neq n_{\alpha 0}$. В уже упомянутой работе [11] решение строится таким образом, что добавки $n_\alpha^{(k)} = 0$, т. е. $n_\alpha = n_{\alpha 0}$. Из сказанного выше следует, что это видоизменение метода работы [1] не существенно; окончательный вид уравнений газодинамики получается одним и тем же. Действительно, в обозначениях данной работы решение, полученное способом, предлагаемым в [11], может быть представлено в виде

$$f_\alpha = f_\alpha^{(0)} \{1 + \epsilon [\varphi_{\alpha 1}(A_*) + \varphi_{\alpha 2}(F)] + \dots\}, \quad \bar{\varphi}_{\alpha 1}(A_*) = -\bar{\varphi}_{\alpha 2}(F)$$

Аналогично решение, полученное в [1-3] для $A_\alpha = 0$

$$f_\alpha = f_\alpha^{(0)} [1 + \epsilon \varphi_{\alpha 2}(F_0)] = f_\alpha^{(0)} \{1 + \epsilon [\varphi_{\alpha 2}(F_0) - \bar{\varphi}_{\alpha 2}(F_0)] + \dots\}$$

Тогда в силу доказанного выше имеет место равенство

$$\varphi_{\alpha 2}(F_0) - \bar{\varphi}_{\alpha 2}(F_0) = \varphi_{\alpha 1}(A_*) + \varphi_{\alpha 2}(F) - \bar{\varphi}_{\alpha 1}(A_*) - \bar{\varphi}_{\alpha 2}(F) = \varphi_{\alpha 1}(A_*) + \varphi_{\alpha 2}(F)$$

Следовательно, и газодинамические уравнения будут совпадать. В то же время при подходе работ [1-3] решение приводит к уже изученным интегральным уравнениям и операторам, тогда как в работе [11] появляется необходимость исследования усложненного по сравнению с (1.8) интегрального уравнения для φ_α .

3. Существенной особенностью рассматриваемой задачи и метода является то, что в задачу входят два безразмерных параметра (ϵ и α). В данной работе предполагается, что изменения функции f_α определяются характерным размером L или временем θ задачи ($\epsilon = \lambda/L$ или τ_ϵ/θ , где λ и τ_ϵ — средние длина пробега и время между столкновениями молекул). Такая ситуация имеет место, например, в газодинамическом сопле, при обтекании тела и т. п., т. е. там, где скорость изменения f_α или гидродинамических величин навязывается процессом (например, формой сопла или тела, периодом каких-либо колебаний).

Как следует из рассмотренного метода, гидродинамическое описание течения возможно при $\epsilon \rightarrow 0$ и произвольных α . Для малых ϵ столкновения делают функцию распределения близкой к равновесной по поступательным степеням свободы, а параметр α характеризует скорость подстройки внутренних степеней свободы или химических реакций под локальные гидродинамические параметры.

Совершенно другая задача возникает, когда скорость изменения f_α определяется скоростью неупругих процессов и химических реакций (например, процесс релаксации за плоской ударной волной). В этом случае характерное время течения θ равно τ_R — характерному времени неупругих процессов или химических реакций. В задаче имеется только один безразмерный параметр ($\beta = \tau_\epsilon/\tau_R \sim \alpha$), и уравнение Больцмана (1.1) в безразмерном виде записывается так:

$$(3.1) \quad \frac{df_\alpha}{dt} = \frac{1}{\beta} \frac{1}{2} J_\alpha^e(f, f) + \frac{1}{2} J_\alpha^R(f, f)$$

Если в предыдущем случае величина производной df_α/dt определялась течением (формой тела или периодом колебаний) и не зависела от скорости неупругих процессов, то теперь она полностью определяется последними и скорость изменения f_α равна скорости неупругих процессов (производная df_α/dt порядка $1/2 J_\alpha^R(f, f)$). В этой ситуации гидродинамическое описание возможно лишь при $\beta \rightarrow 0$ и соответствует релаксационному случаю (1.4). Для не малых β нельзя построить обоснованного асимптотического макроскопического описания явления и необходимо пользоваться кинетическими уравнениями (3.1).

Такой однопараметрический случай рассмотрен в работе [9], где решение для всех β ($0 \leq \beta \leq 1$) ищется в виде $f_\alpha = f_\alpha^{(0)} [1 + \varphi_\alpha]$ и для φ_α постулируется уравнение типа (1.6) с несимметризованным интегральным оператором. Однако в этом однопараметрическом случае для $\beta \sim 1$ функция φ_α не является малой и уравнение (1.6) теряет смысл.

Следует особо отметить, что здесь везде речь идет об обратимых неупругих процессах или химических реакциях, т. е. о таких ситуациях, когда скорость прямого процесса сравнима со скоростью обратного процесса, вследствие чего при $\alpha = O(1)$ и $\epsilon \rightarrow 0$ функция распределения f_α близка к локально-равновесной и по внутренним степеням свободы молекул, а концентрации компонентов (если в газе происходят химические реакции) близки к равновесным значениям, соответствующим локальным условиям в потоке.

Существенно необратимые процессы должны быть рассмотрены особо, однако и здесь в тех случаях, когда изменение обусловлено неупругими процессами, гидродинамическое описание возможно лишь для $\beta \ll 1$.

4. Следует сделать ряд замечаний о первом из уравнений (1.2) и связанном с ним вопросе о влиянии возмущений функции распределения f_α на кинетику (скорость) газофазных реакций или иных неупругих процессов.

Уравнение (1.2) с погрешностью $O(\epsilon)$ может быть записано, например, в виде

$$(4.1) \quad \frac{Dn_\alpha}{Dt} + n_\alpha \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = \frac{\alpha}{\epsilon} \int \frac{1}{2} J_\alpha^R(\tilde{f}^{(0)}, \tilde{f}^{(0)}) d\xi_\alpha - \\ - \alpha \int J_\alpha^{RS}(\tilde{f}^{(0)}, \tilde{f}^{(0)} \bar{\varphi}_0) d\xi_\alpha$$

где $\bar{\varphi}_0$ соответствует $A_\alpha = 0$.

При получении (4.1) учтено, что в силу (1.11)

$$(4.2) \quad \alpha \int J_\alpha^{RS}(\tilde{f}^{(0)}, \tilde{f}^{(0)} \bar{\varphi}_0) d\xi_\alpha = 0$$

Перепишем правую часть (4.1) таким образом:

$$(4.3) \quad \frac{\alpha}{\epsilon} \sum_{\Delta\Lambda\Psi} [K_{\Delta\Lambda}^{\circ\Omega\Psi} n_\Delta n_\Lambda - K_{\Omega\Psi}^{\circ\Delta\Lambda} n_\Omega n_\Psi] - \alpha \sum_{\Delta\Lambda\Psi} K_{\Omega\Psi}^{\circ\Delta\Lambda} n_\Omega n_\Psi \times \\ \times [\bar{\varphi}_{\Delta 0} + \bar{\varphi}_{\Lambda 0} - \bar{\varphi}_{\Omega 0} - \bar{\varphi}_{\Psi 0}] + O(\epsilon) = \frac{\alpha}{\epsilon} \sum_{\Delta\Lambda\Psi} \{K_{\Delta\Lambda}^{\circ\Omega\Psi} [1 - \epsilon \times \\ \times (\bar{\varphi}_{\Delta 0} + \bar{\varphi}_{\Lambda 0})] n_\Delta n_\Lambda - K_{\Omega\Psi}^{\circ\Delta\Lambda} [1 - \epsilon (\bar{\varphi}_{\Omega 0} + \bar{\varphi}_{\Psi 0})] n_\Omega n_\Psi\} + O(\epsilon)$$

$$(4.4) \quad K_{\Omega\Psi}^{\circ\Delta\Lambda}(T) = \frac{1}{n_\Omega n_\Psi} \int \tilde{f}_{\Omega^{(0)}} \tilde{f}_{\Psi^{(0)}} q_{\Omega\Psi} d\sigma_{\Omega\Psi} d\xi_\Omega d\xi_\Psi$$

Здесь $q_{\Omega\Psi}$ и $\sigma_{\Omega\Psi}^{\Delta\Lambda}$ — относительная скорость сталкивающихся молекул и сечение процесса $\Omega + \Psi \rightarrow \Delta + \Lambda$, происходящего при данном неупругом столкновении.

Величины $K_{\Omega\Psi}^{\circ\Delta\Lambda} = K_{\Omega\Psi}^{\Delta\Lambda} [1 - \epsilon (\bar{\varphi}_{\Omega 0} + \bar{\varphi}_{\Psi 0})]$ могут рассматриваться как константы скоростей реакции, вычисленные по возмущенной относительно максвелловской функции распределения молекул. Как видно из (4.1), поправки на неравновесность функции распределения могут оказаться существенными при $\epsilon \rightarrow 0$, если $\alpha \gg O(\epsilon)$, т. е. для $\epsilon/\alpha \ll 1$. Чтобы проанализировать этот вопрос, упростим выражение, стоящее в правой части уравнений (4.1).

Для $\alpha \gg \epsilon$ справедливо равенство

$$\frac{\alpha}{\epsilon} \sum_{\Delta\Lambda\Psi} [K_{\Delta\Lambda}^{\circ\Omega\Psi} n_\Delta n_\Lambda - K_{\Omega\Psi}^{\circ\Delta\Lambda} n_\Omega n_\Psi] = \\ = \frac{\alpha}{\epsilon} \sum_{\Delta\Lambda\Psi} K_{\Omega\Psi}^{\circ\Delta\Lambda} n_{\Omega eq} n_{\Psi eq} [\delta \bar{n}_\Omega + \delta \bar{n}_\Psi - \delta \bar{n}_\Delta - \delta \bar{n}_\Lambda] + O\left(\frac{\epsilon}{\alpha}\right)$$

Здесь $\delta \bar{n}_\alpha = (n_{\alpha eq} - n_\alpha)/n_{\alpha eq}$, $n_{\alpha eq}$ — равновесное значение плотности Ω -молекул, соответствующее локальным условиям в потоке.

В результате видим, что уравнение для n_a с модельным выражением для скоростей реакций

$$(4.5) \quad \frac{Dn_a}{Dt} + n_a \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = \frac{\alpha}{\varepsilon} K^\circ [n_{aeq} - n_a] - \alpha K^\circ n_a \Phi_{a0}$$

хорошо описывает структуру уравнений (4.1) при достаточно больших α .

Аналогом обычных релаксационных уравнений при этом будет такое соотношение

$$(4.6) \quad \frac{Dn_a}{Dt} + n_a \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = \frac{\alpha}{\varepsilon} K^\circ [n_{aeq} - n_a]$$

Дальнейшие рассуждения для простоты проведем для уравнений (4.5) и (4.6). Перенос полученных результатов на точные уравнения (4.1) очевиден. Можно утверждать, что если известны величины $\sigma_{\Omega\Upsilon}^{\Delta\Delta}$ и константы скоростей $K_{\Omega\Upsilon}^{\Delta\Delta}(T)$ могут быть определены согласно (4.4), то возмущением констант скоростей реакций относительно $K_{\Omega\Upsilon}^{\Delta\Delta}$, или дополнительным членом в правой части уравнений для n_a , можно пренебречь с погрешностью в решении $O(\varepsilon)$ по сравнению с единицей, что достаточно для решения большинства газодинамических задач как в приближении Эйлера, так и при существенном влиянии вязкости газа (пограничный слой, медленные движения с $Re \ll O(1)$) [1, 12].

Действительно, остальные газодинамические уравнения можно переписать в таком виде, что в них будут входить лишь плотности и не будут входить скорости реакций. Для n_a из (4.5) при этом имеем

$$(4.7) \quad n_a = n_{aeq} - \frac{\varepsilon}{\alpha K^\circ} \left[\frac{Dn_a}{Dt} + n_a \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \right] - \varepsilon n_a \Phi_{a0}$$

т. е. удовлетворяющие уравнениям (4.5) n_a могут быть представлены в виде

$$n_a = n_a^* [1 + O(\varepsilon)]$$

где n_a^* являются решением упрощенных уравнений (4.6), в которых не учитывается влияние неравновесности функции распределения на кинетику неупругих процессов.

Однако если бы задача заключалась в определении величины правой части уравнений (4.5) (или уравнений (4.1)) по известной откуда-то величине n_a , причем известной с точностью до членов $O(\varepsilon)$, то, очевидно, учет неравновесных поправок был бы принципиально необходим для $\alpha = O(1)$ во всех приближениях, даже и в эйлеровском. Такая ситуация возникает в тех случаях, когда необходимо экспериментально определить величину константы скорости реакции (например, при исследовании процессов релаксации за ударными волнами, спектрографических исследованиях кинетики неупругих процессов, измерений дисперсии и поглощения ультразвука в многоатомных газах и т. п.), и обусловлена тем, что сильные реакции, если их рассматривать на «гидродинамических» масштабах времен и расстояний, обусловлены малыми отклонениями плотностей n_a от их локальных равновесных значений. Величины же этих отклонений для $\alpha \sim 1$ обычными релаксационными уравнениями

$$\frac{Dn_a}{Dt} + n_a \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = \frac{\alpha}{\varepsilon} \int \frac{1}{2} J_a^R(\tilde{f}^{(0)}, \tilde{f}^{(0)}) d\tilde{\xi}_a.$$

или их аналогом (4.6) описываются с конечной ошибкой [1], в чем трудно убедиться исходя из (4.7).

При экспериментальном определении констант скоростей реакций измеренная временная или пространственная эволюция сравнивается с решением релаксационных уравнений типа (4.6). Исходя из сравнения подбираются значения констант скоростей реакций K .

Если для таких операций использовать уравнения типа (4.5) с учетом неравновесных поправок в правой части, то в результате получится иная величина константы скоростей реакции K° , которая связана с K следующим образом:

$$(4.8) \quad K = K^\circ [1 - \varepsilon n_a \Phi_{a0} (n_{a_{eq}} - n_a)^{-1}]$$

Поскольку $n_{a_{eq}} - n_a = O(\varepsilon n_a / \alpha)$, то ошибка в определении K по неточным уравнениям (4.6) оказывается порядка α , т. е. для $\alpha \sim 1$ эта ошибка имеет конечную величину.

Весьма важно, что величина отличия между K и K° существенно зависит от условий эксперимента, именно от n_a , u , T и т. п., в то время как константа скорости реакции согласно (4.4) есть функция лишь T . Определить величину поправки к K невозможно, не зная функций Φ_{a0} , которые находятся из решения уравнения Больцмана при известных сечениях $\sigma_{a\alpha}^{\Delta\Delta}$.

В итоге приходим к важному выводу: измерение констант скоростей бимолекулярных газофазных реакций, происходящих с конечной вероятностью при столкновениях молекул, должно основываться на методах измерения сечений столкновений, приводящих к этим реакциям.

Очевидно, большие поправки к скоростям реакций можно было бы ожидать для $\alpha \sim 1$ в задачах, в которых все изменения f_a определяются неупругими процессами (а не граничными условиями). О таких случаях говорилось в п. 3. Однако здесь невозможно гидродинамическое описание для $\alpha \sim 1$.

По виду уравнений (1.6) и (1.8) для навье-стоксовской добавки к функции распределения $f_{\Omega}^{(0)} \Phi_a$ нетрудно установить, что решение этих уравнений по своей структуре совпадает с соответствующим решением уравнений (1.4) для $\alpha \sim \varepsilon$ (соответственно, аналогичной будет и структура уравнений Навье - Стокса). Однако в отличие от этого случая коэффициенты переноса, определенные по $f_{\Omega}^{(0)} \Phi_a$, зависят от сечений как упругих, так и неупругих процессов [1]. Перестройка решения, полученного обобщенным методом Чепмена - Энскога, к упоминавшимся выше решениям для $\alpha = 0$ (1) и $\alpha \sim \varepsilon \rightarrow 0$ проанализирована в [3]. Существенные упрощения в решении уравнения Больцмана и уравнениях газодинамики могут быть осуществлены, если $\alpha \ll 1$ (при произвольном соотношении между величинами ε и α).

Эти вопросы рассмотрены, например, в [1, 12] в рамках обобщенного приближения Эйкена.

Приложение. I. Химически реагирующая газовая смесь. Введем ряд чисел, характеризующих такую смесь:

а) z - число различных значений индекса Ω , $\Omega = N\omega$, где N - сорт молекулы, ω - ее внутреннее состояние, $\{\Omega\} = z$;

б) $X_{\Omega}^{(p)}$ - число атомов (или их устойчивых комбинаций, не разрушающихся в протекающих реакциях) p -го сорта в Ω -молекуле;

в) N_p - число различных значений индекса p , $\{p\} = N_p$;

г) l - число независимых соотношений вида

$$(П.1) \quad X_{\Omega}^{(p)} + X_{\Psi}^{(p)} = X_{\Lambda}^{(p)} + X_{\Gamma}^{(p)}$$

При этом в однокомпонентном газе $l = z - 1$, где z - число различных внутренних состояний у молекул, составляющих газ.

В произвольной газовой смеси имеют место неравенства

$$(П.2) \quad z \geq l, \quad N_p \geq z - l$$

в чем можно убедиться, рассмотрев задачу об определении равновесного состава.

Если n_Ω и n_p — числовые плотности Ω -молекул и атомов p -го сорта, причем

$$(П.3) \quad n_p = \sum_{\Omega} n_{\Omega} X_{\Omega}^{(p)}$$

то среди n_p содержится всего $z-l$ независимых величин, остальные выражаются через них с помощью линейных комбинаций.

Исходя из величин n_p можно определить как массовую, так и числовую плотности газовой смеси

$$(П.4) \quad \rho = \sum_{\Omega} m_{\Omega} n_{\Omega} = \sum_{\Omega, p} n_{\Omega} X_{\Omega}^{(p)} m_p = \sum_p n_p m_p,$$

$$n = \sum_{\Omega} n_{\Omega} = \sum_{\bar{p}} W_{\bar{p}}^{-n_{\bar{p}}}, \quad \{\bar{p}\} = z-l$$

где $W_{\bar{p}}$ — единственное решение системы уравнений

$$(П.5) \quad \sum_{\bar{p}} X_{\Omega}^{(\bar{p})} W_{\bar{p}} = 1$$

m_{Ω} и m_p — масса Ω -молекулы и атома p -го сорта.

В связи с этим представляет интерес установить вид общего решения однородного интегрального уравнения

$$(П.6) \quad J_{\Omega}^e(f^{(0)}, f^{(0)})\varphi + J_{\Omega}^{RS}(f^{(0)}, f^{(0)})\varphi = 0$$

которое обычно записывают в виде линейной комбинации всех инвариантов неупругих столкновений

$$(П.7) \quad \varphi_{\Omega} = \delta + \sum_p X_{\Omega}^{(p)} \mu_p + \gamma \left(\frac{m_{\Omega} \xi_{\Omega}^2}{2kT} + \frac{E_{\Omega}}{kT} \right) + \beta \frac{m_{\Omega} \xi_{\Omega}}{kT}$$

Здесь δ , μ_p , γ , β — произвольные величины, не зависящие от скоростей молекул ξ_{Ω} . Можно показать, что без потери общности вместо (7) можно записать выражение

$$(П.8) \quad \varphi_{\Omega} = \sum_{\bar{p}} X_{\Omega}^{(\bar{p})} \hat{\mu}_{\bar{p}} + \gamma \left(\frac{m_{\Omega} \xi_{\Omega}^2}{2kT} + \frac{E_{\Omega}}{kT} \right) + \beta \frac{m_{\Omega} \xi_{\Omega}}{kT}$$

где $\{\bar{p}\} = z-l$, т. е. общее решение (6) содержит $z-l+4$ произвольных величин $\hat{\mu}_{\bar{p}}$, γ и β .

Произвольные параметры A_{Ω} , определяемые в п.1 согласно (1.9) и (1.10), в случае химически реагирующей смеси удовлетворяют соотношениям

$$(П.9) \quad \sum_{\Omega} A_{\Omega} = 0, \quad \sum_{\Omega} X_{\Omega}^{(p)} A_{\Omega} = 0$$

среди которых $z-l$ независимых.

Соответственно, среди A_{Ω} имеется l независимых величин. Таким образом, и в этом случае общее решение уравнения для навье-стоксовской поправки к функции распределения после преобразования его неоднородной части в соответствии с условиями разрешимости (число которых здесь равно $z-l+4$) содержит $z+4$ произвольных параметров: $\hat{\mu}_{\bar{p}}$, γ , β и $A_{\bar{\Omega}}$, $\{\bar{\Omega}\} = l$.

Приложение II. Решение уравнения для первого члена в разложении функции распределения. Рассмотрим ту часть уравнения (1.8), которая определяет скалярную часть его частного решения G_{Ω} , т. е.

$$(П.10) \quad f_{\Omega}^{(0)} \left[\frac{1}{n_{\Omega 0}} \frac{dn_{\Omega 0}}{dt} - \frac{1}{p} \left(\frac{mc_{\Omega}^2}{3kT} - 1 \right) \sum_{\Psi} E_{\Psi} \frac{dn_{\Psi 0}}{dt} \right] -$$

$$- \frac{\alpha}{\varepsilon} \frac{1}{2} J_{\Omega}^R(f^{(0)}, f^{(0)}) = J_{\Omega}^e(f^{(0)}, f^{(0)})G + \alpha J_{\Omega}^{RS}(f^{(0)}, f^{(0)})G$$

Разложим $(\alpha/\varepsilon)^{1/2} J_{\Omega}^R(f^{(0)}, f^{(0)})$ по полиномам Эрмита и Вальдмана – Трюбенбахера [13] относительно $f_{\Omega}^{(0)}$

$$(П.11) \quad \frac{\alpha}{\varepsilon} \frac{1}{2} J_{\Omega}^R(f^{(0)}, f^{(0)}) = f_{\Omega}^{(0)} \left\{ \frac{R_{\Omega}^{(0)}}{n_{\Omega 0}} - \frac{1}{p} \left(\frac{mc_{\Omega}^2}{3kT} - 1 \right) \sum_{\Psi} E_{\Psi} R_{\Psi}^{(0)} - \left(\frac{mc_{\Omega}^2}{2kT} - \frac{3}{2} \right) \sum_{r=1}^{\infty} a_{1r} P^{(r)}(\varepsilon_{\Omega}) + \dots \right\}$$

Подставив результат в (10), нетрудно показать, что G_{Ω} могут быть представлены в виде суммы двух функций – g_{Ω} и ξ_{Ω} , которые удовлетворяют уравнениям

$$(П.12) \quad f_{\Omega}^{(0)} \left\{ \frac{1}{n_{\Omega 0}} \left[\frac{dn_{\Omega 0}}{dt} - R_{\Omega}^{(0)} \right] - \frac{1}{p} \left(\frac{mc_{\Omega}^2}{3kT} - 1 \right) \sum_{\Psi} E_{\Psi} \left[\frac{dn_{\Psi}}{dt} - R_{\Psi}^{(0)} \right] \right\} = J_{\Omega}^e(f^{(0)}, f^{(0)}) \xi_{\Omega} + \alpha J_{\Omega}^{RS}(f^{(0)}, f^{(0)}) \xi_{\Omega}$$

$$(П.13) \quad f_{\Omega}^{(0)} \left[- \left(\frac{mc_{\Omega}^2}{2kT} - \frac{3}{2} \right) \sum_{r=1}^{\infty} a_{1r} P^{(r)}(\varepsilon_{\Omega}) + \dots \right] = J_{\Omega}^e(f^{(0)}, f^{(0)}) g_{\Omega} + \alpha J_{\Omega}^{RS}(f^{(0)}, f^{(0)}) g_{\Omega}$$

$$\varepsilon_{\Omega} = \frac{E_{\Omega}}{kT}, \quad R_{\Omega}^{(0)} = \frac{\alpha}{\varepsilon} \int \frac{1}{2} J_{\Omega}^R(f^{(0)}, f^{(0)}) d\xi_{\Omega}$$

Полиномы $P^{(r)}(\varepsilon_{\Omega})$ определяются аналогично [13], однако без предположения о больцмановском распределении молекул по внутренним степеням свободы

$$(П.14) \quad P^{(0)} = 1, \quad P^{(1)} = \varepsilon_{\Omega} - \langle \varepsilon_{\Omega} \rangle, \quad P^{(r)} = \varepsilon_{\Omega} P^{(r-1)} - \sum_{s=0}^{r-1} \frac{\langle \varepsilon_{\Omega} P^{(r-1)} P^{(s)} \rangle P^{(s)}}{\langle P^{(s)2} \rangle}$$

$$\langle t_{\Omega} \rangle = \frac{1}{n} \sum_{\Omega} n_{\Omega 0} t_{\Omega}, \quad \sum_{\Omega} n_{\Omega 0} P^{(r)}(\varepsilon_{\Omega}) P^{(q)}(\varepsilon_{\Omega}) = 0, \quad r \neq q$$

Решение уравнения (12) имеет вид

$$(П.15) \quad \xi_{\Omega} = \sum_{\Delta} Q_{\Omega\Delta} \left[\frac{dn_{\Delta 0}}{dt} - R_{\Delta}^{(0)} \right], \quad Q_{\Omega\Omega} = 0$$

где функции $Q_{\Omega\Delta}$ удовлетворяют уравнениям

$$(П.16) \quad f_{\Omega}^{(0)} \left[\frac{\delta_{\Omega\Delta} - \delta_{\Delta\Omega}}{n_{\Omega 0}} - \frac{1}{p} \left(\frac{mc_{\Omega}^2}{3kT} - 1 \right) (E_{\Delta} - E_{\Omega}) \right] = J_{\Omega}^e(f^{(0)}, f^{(0)}) (Q_{\Delta} - Q_{\Omega}) + \alpha J_{\Omega}^{RS}(f^{(0)}, f^{(0)}) (Q_{\Delta} - Q_{\Omega})$$

Представляя $Q_{\Omega\Delta}$ в виде разложения по полиномам Эрмита и Вальдмана – Трюбенбахера

$$(П.17) \quad Q_{\Omega\Delta} = \sum_r b_{\Delta}^{(0,r)} P^{(r)}(\varepsilon_{\Omega}) + \sum_r b_{\Delta}^{(1,r)} P^{(r)}(\varepsilon_{\Omega}) \left(\frac{mc_{\Omega}^2}{2kT} - \frac{3}{2} \right) + \dots$$

нетрудно установить, что $b_{\Delta}^{(0,r)} \sim b_{\Delta}^{(1,0)} \sim \alpha^{-1}$.

По этой причине, чтобы сохранить величину $G_{\Omega} = O(1)$ и не нарушить разложение решения уравнения Больцмана (1.1) по степеням числа Кнудсена ε , необходимо считать, что

$$(П.18) \quad \frac{dn_{\Omega 0}}{dt} - R_{\Omega}^{(0)} = A_{\Omega} = O(\alpha)$$

Очевидно, что требование $A_\alpha = O(\alpha)$ является достаточным, чтобы $\Phi_\alpha = O(1)$, поскольку вторая функция g_α , входящая в определение G_α и удовлетворяющая уравнению (13), имеет величину порядка единицы вне зависимости от выбора A_α . Для этого нужно лишь, чтобы $R_\Omega^{(0)} = O(1)$.

Таким образом, действительно, произвольных величин в общем решении уравнения (18) содержится всего $z+4$, что должно позволить построить единственное решение этого уравнения, удовлетворяющее $z+4$ условиям (2.2) и (2.3).

Из (12), (15) и (16) нетрудно показать, что функции ξ_α обладают свойством

$$\alpha \int J_\alpha^{RS}(f^{(0)}, f^{(0)}\xi) d\xi_\alpha = A_\alpha$$

в то время как из (13) следует, что такой же интегральный оператор на g_α равен нулю

$$\alpha \int J_\alpha^{RS}(f^{(0)}, f^{(0)}g) d\xi_\alpha = 0$$

При выборе $A_\alpha = 0$, как это было сделано в [1-3], решение уравнения (10) совпадает с решением, которое было построено в этих работах, т. е. для $A_\alpha = 0$, $G_\alpha = g_\alpha$, а $\xi_\alpha = 0$.

Все проведенные выше рассуждения естественным образом могут быть обобщены и на случай химически реагирующей смеси газов.

В заключение авторы благодарят В. С. Галкина за полезные дискуссии.

Поступила 12 VII 1977

ЛИТЕРАТУРА

1. Галкин В. С., Коган М. Н., Макашев Н. К. Обобщенный метод Чепмена – Энского, ч. 1. Уравнения неравновесной газовой динамики. Уч. зап. ЦАГИ, 1974, т. 5, № 5.
2. Галкин В. С., Коган М. Н., Макашев Н. К. Обобщенный метод Чепмена – Энского. Докл. АН СССР, 1975, т. 220, № 2.
3. Макашев Н. К. О свойствах обобщенного метода Чепмена – Энского. Тр. ЦАГИ 1976, вып. 1742.
4. Hilbert D. Grundzüge einer allgemeinen Theorie der Linearen Integralgleichungen. N. Y., Chelsea, 1953.
5. Чепмен С., Каулинг Т. Математическая теория неоднородных газов. М., Изд-во иностр. лит., 1960.
6. Grad H. Asymptotic theory of the Boltzmann equation. Phys. Fluids, 1963, vol. 6, No. 2.
7. Коган М. Н. Динамика разреженного газа. М., «Наука», 1967.
8. Андерсен Г. Вывод уравнений гидродинамики из уравнения Больцмана. В сб. «Кинетические процессы в газах и плазме». М., Атомиздат, 1972.
9. Алексеев Б. В. Явления переноса в химически реагирующих газовых смесях. В сб. «Очерки физики и химии низкотемпературной плазмы». М., «Наука», 1971.
10. Аэродинамика разреженных газов, вып. 1–7. Л., Изд. ЛГУ, 1963–1974.
11. Мацук В. А., Рыков В. А. О методе Чепмена – Энского для смеси газов. Докл. АН СССР, 1977, т. 223, № 1.
12. Макашев Н. К. О решении уравнения Больцмана в задачах обтекания тел в режиме сплошной среды. Тр. ЦАГИ, 1976, вып. 1742.
13. Абрамов В. А. Релаксационные процессы в частично ионизованном газе. В сб. «Очерки физики и химии низкотемпературной плазмы». М., «Наука», 1971.