

О ДИФФУЗИОННОМ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ КАПЕЛЬ В ЖИДКОСТИ

А. Д. ПОЛЯНИН

(Москва)

В работе методом сращиваемых асимптотических разложений (по большому числу Пекле) исследована трехмерная задача о стационарной конвективной диффузии к поверхностям капель, обтекаемых ламинарным потоком вязкой несжимаемой жидкости, поле скоростей которого считается известным из решения соответствующей гидродинамической задачи.

Показано, что при больших числах Пекле тепломассообмен между каплями полностью определяется взаимным расположением особых (начинающихся или оканчивающихся на поверхности капли) линий тока, при этом в потоке существуют цепочки капель, которые не оказывают взаимного диффузионного влияния одна на другую, а полный диффузионный поток на каплю определяется диффузией к частицам, расположенным выше по потоку в той же цепочке. Для случая, когда расстояние между каплями в цепочке много меньше $P^{1/2}$ (P — число Пекле), получены формулы для распределения концентрации и полного диффузионного потока на поверхность каждой капли. Показано, что полный диффузионный поток на поверхность капли стремится к нулю обратно пропорционально корню ее порядкового номера в цепочке, что обобщает [1], где рассматривался осесимметричный случай.

Получено решение диффузионной задачи для случая, когда на поверхности капли имеются критические линии. Задача решена до конца, если особые линии тока не замкнуты и уходят в бесконечность. При наличии области замкнутой циркуляции за каплей задача сведена к интегральному уравнению.

1. Постановка задачи. Рассмотрим трехмерную задачу о стационарной конвективной диффузии к поверхностям жидких частиц, обтекаемых ламинарным потоком вязкой несжимаемой жидкости. Предполагается, что в любой точке поверхности каждой капли может быть проведена единственная нормаль и существует область, в которой эти нормали не пересекаются.

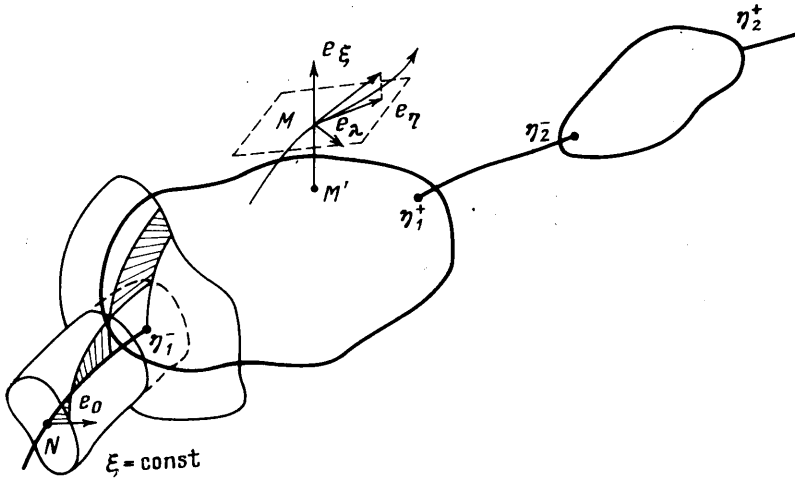
Назовем точкой натекания (вытекания) критическую точку (точка, к которой особая линия тока подходит к поверхности), в окрестности которой нормальная компонента скорости жидкости направлена к поверхности (от поверхности), а линию тока, выходящую из нее, — траекторией натекания (вытекания). Критические точки могут быть 1) изолированными, 2) образовывать критические линии на поверхности капли. Например, при осесимметричном обтекании сферической капли чистосдвиговым потоком [2] изолированные критические точки лежат на оси потока ($\theta=0, \pi$), а критическая линия задается пересечением поверхности капли с плоскостью, перпендикулярной оси потока и проходящей через центр капли ($\theta=\pi/2$). Траектории натекания и вытекания, соответствующие изолированным особым точкам, называем несущими траекториями.

Пока считаем, что на поверхности каждой капли есть только две изолированные критические точки. Тогда в силу закона сохранения массы одна из них является точкой натекания, а вторая — точкой вытекания. Множество капель и выходящих из них особых линий тока называем цепочкой, если любые две капли этого множества могут быть соединены непрерывной кривой, проходящей по поверхностям капель и несущим траек-

ториям (фиг. 1). Нумерация капель в цепочке ведется от крайней капли, на которую приходит траектория натекания.

Считая, что поле течения жидкости найдено из решения соответствующей гидродинамической задачи, введем для каждой цепочки следующую локальную ортогональную систему координат: ξ, η, λ . Для этого нужно указать направление ортов в любой точке M , лежащей вблизи цепочки, и указать, как ведется отсчет криволинейных координат.

Ближайшая к M точка M' , принадлежащая цепочке, определит направление орта e_ξ , а отрезок $|MM'|$ задаст безразмерную координату ξ (обезразмеривание проводится по характерному размеру частиц, который считается единым для всей цепочки). Так как несущие траектории выходят с поверхности капель под некоторым углом, то введенные таким образом



Фиг. 1

координатные поверхности $\xi = \text{const}$ не являются гладкими. Поэтому считаем, что в окрестности критических точек устроено локальное сглаживание и рассматриваемые в дальнейшем величины имеют сколько потребуется частных производных по ξ ($\xi \neq 0$).

Направление орта e_η определяется проекцией вектора скорости жидкости в точке M на плоскость, перпендикулярную e_λ , а орт e_λ выбирается так, что система векторов e_ξ, e_η, e_λ составляет ортогональную правую тройку. Через произвольную точку N , лежащую на траектории натекания первой частицы, проводим координатную поверхность $\eta = \text{const}$. В касательной плоскости в точке N произвольно фиксируем вектор e_0 . Направление несущей траектории и этого вектора определит координатную поверхность $\lambda = 0$, от которой в дальнейшем ведется отсчет. При этом величину λ определим углом между e_0 и вектором нормали к координатной поверхности $\lambda = \text{const}$ в точке N ($0 \leq \lambda \leq 2\pi$). Координату η определим длиной дуги от точки N вдоль линии пересечения поверхности $\lambda = 0$ и поверхности цепочки ($\xi = 0$) (фиг. 1).

В такой системе координат вектор скорости жидкости в каждой точке имеет вид $u = \{u_\xi, u_\eta, 0\}$ и обладает следующими свойствами вблизи цепочки ($\xi \rightarrow 0$):

$$(1.1) \quad u_\xi = \xi O(1), \quad u_\eta = u_\eta^0 + \xi O(1)$$

Здесь $u_\eta^0 = u_\eta$ ($\xi = 0$) — компонента скорости жидкости на поверхности цепочки, т. е. на поверхности капли и несущих траекториях; считается,

что u_n^0 может обращаться в нуль лишь в критических точках. Свойство (1.1) выполняется вблизи поверхности капель из-за гидродинамических граничных условий и вблизи особых линий тока, так как направляющий вектор несущих траекторий совпадает с вектором скорости жидкости.

Компоненты метрического тензора g_{ii} обладают следующими свойствами при $\xi \rightarrow 0$:

$$(1.2) \quad g_{11} = O(1), \quad g_{22} = O(1), \quad g_{33} = O(1)$$

$$(1.3) \quad g_{11} = O(1), \quad g_{22} = O(1), \quad g_{33} = \xi^2 O(1)$$

где свойство (1.2) выполняется вблизи поверхностей капель, а (1.3) — вблизи несущих траекторий, при этом они нарушаются вблизи критических точек.

Дальнейший анализ проведем в квазистационарном приближении, т. е. время t , входящее в рассматриваемые величины, считаем параметром и частными производными по t пренебрегаем. Это соответствует медленным процессам, например наблюдаемым в эксперименте при всплывании цепочки пузырей [3] и изученным теоретически, когда расстояние между пузырями, отнесенное к радиусу пузырей, удовлетворяет неравенству $1 \ll l_h \ll R^{1/2}$ (R — число Рейнольдса) [4].

Запишем безразмерное уравнение стационарной конвективной диффузии и граничные условия в предположении полного поглощения диффундирующего вещества на поверхности капель и постоянства концентрации вдали от них

$$(1.4) \quad \frac{u_\xi}{\sqrt{g_{11}}} \frac{\partial c}{\partial \xi} + \frac{u_\eta}{\sqrt{g_{22}}} \frac{\partial c}{\partial \eta} =$$

$$= \frac{\varepsilon^2}{\sqrt{g}} \left\{ \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\sqrt{g}}{g_{11}} \frac{\partial c}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \eta} \frac{\sqrt{g}}{g_{22}} \frac{\partial c}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \lambda} \frac{\sqrt{g}}{g_{33}} \frac{\partial c}{\partial \lambda} \right\}$$

$$c|_{\xi=0, \eta_k^- \leq \eta \leq \eta_k^+} = 0, \quad c|_{\xi \rightarrow \infty} \rightarrow 1, \quad (k=1, 2, \dots, n)$$

$$g = g_{11}, g_{22}, g_{33}, \quad \varepsilon^{-2} = P = aU/D$$

Здесь P — число Пекле, a — характерный размер капель, U — характерная скорость натекающего потока, D — коэффициент диффузии, $\eta_k^- (\eta_k^+)$ — координата критической точки натекания (вытекания) k -й частицы.

2. Диффузия к одиночной частице. Уравнение неразрывности несжимаемой жидкости имеет вид

$$(2.1) \quad \nabla u = \frac{1}{\sqrt{g}} \left[\frac{\partial}{\partial \xi} \left(u_\xi \sqrt{\frac{g}{g_{11}}} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(u_\eta \sqrt{\frac{g}{g_{22}}} \right) \right] = 0$$

Определим функцию $\Phi(\xi, \eta, \lambda)$ как решение системы

$$(2.2) \quad \frac{\partial}{\partial \xi} \Phi = \sqrt{\frac{g}{g_{22}}} u_\eta, \quad \frac{\partial}{\partial \eta} \Phi = -\sqrt{\frac{g}{g_{11}}} u_\xi; \quad \Phi(0, 0, \lambda) = 0$$

тогда уравнение неразрывности удовлетворяется автоматически. Система (2.2) имеет единственное решение, так как ввиду (2.1) выполнено условие интегрируемости [5]. Функция Φ обращается в нуль на поверхности цепочки.

Поверхности $\Phi(\xi, \eta, \lambda) = \text{const}$ имеют простой физический смысл для однородно-поступательного потока на бесконечности. Траектория натекания вдали от первой капли в этом случае представляет собой прямую линию. Выделенные элементы жидкости, лежащие на равном расстоянии

от этой прямой вдали от капли, дают наглядное представление о поверхности $\Phi = \text{const}$, если проследить за ними в процессе обтекания цепочки. Если поле течения обладает осевой симметрией, то Φ совпадает с обычной функцией тока.

Уравнение (1.4) с учетом (2.2) принимает вид

$$(2.3) \quad -\frac{\partial(c, \Phi)}{\partial(\xi, \eta)} = \varepsilon^2 \left\{ \frac{\partial \sqrt{g}}{\partial \xi} \frac{\partial c}{g_{11}} + \frac{\partial \sqrt{g}}{\partial \eta} \frac{\partial c}{g_{22}} + \frac{\partial \sqrt{g}}{\partial \lambda} \frac{\partial c}{g_{33}} \right\}$$

$$c|_{\xi=0, \eta_k^- < \eta < \eta_k^+} = 0, \quad c|_{\xi \rightarrow \infty} \rightarrow 1 \quad (k=1, \dots, n)$$

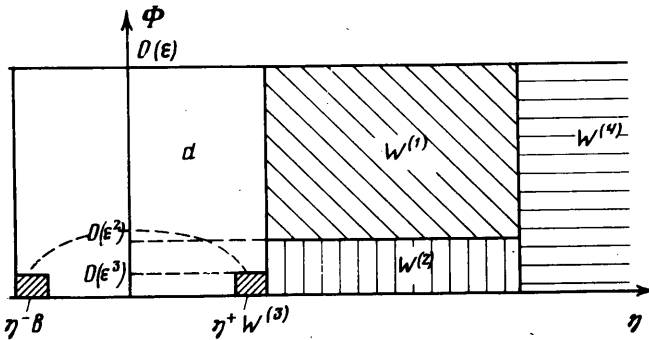
где в левой части уравнения стоит якобиан функций c и Φ . Из свойств (1.1) – (1.3) видно, что функцию Φ вблизи цепочки можно представить в виде

$$(2.4) \quad \xi \rightarrow 0, \quad \Phi(\xi, \eta, \lambda) \rightarrow \xi f(\eta, \lambda) \quad (\eta_k^- < \eta < \eta_k^+)$$

$$\xi \rightarrow 0, \quad \Phi(\xi, \eta, \lambda) \rightarrow \xi^2 h(\eta, \lambda) \quad (\eta_k^+ < \eta < \eta_{k+1}^-)$$

В дальнейшем считаем, что число Пекле велико, т. е. $\varepsilon \ll 1$.

Асимптотический анализ уравнения (2.3) с учетом (2.4) показывает, что при $\varepsilon \ll 1$ в окрестности капли можно выделить несколько областей с различным механизмом массопереноса, которые схематически показаны на фиг. 2. Это внешняя область e , область диффузионного пограничного слоя d ,



Фиг. 2

область передней критической точки b и область диффузионного следа W , которая в свою очередь состоит из подобластей $W^{(k)}$ ($k=1, 2, 3, 4$). В каждой из этих областей уравнение (2.3) заменяется приближенным путем выделения главных членов разложений по малому параметру ε . Соответствие между решениями устанавливается асимптотическим сращиванием на условных границах смежных областей. Подробный анализ этих областей в случае стока обтекания сферической капли однородно-поступательным потоком проведен в [9].

Во внешней области $e = \{\varepsilon \ll \xi, \ll \varepsilon |\eta - \eta_k^-|, \varepsilon \ll |\eta - \eta_k^+|\}$ (здесь и далее неравенства в фигурных скобках указывают порядок характерных размеров рассматриваемой области, где область изменения параметра λ , $0 \leq \lambda \leq 2\pi$, опущена) правой частью уравнения (2.3) можно пренебречь по сравнению с левой. Поэтому концентрация растворенного компонента сохраняет здесь постоянное значение, равное единице.

Массообмен в диффузионном пограничном слое $d_1 = \{\Phi \ll \varepsilon, \varepsilon \ll \eta - \eta_1^-, \varepsilon \ll \eta_1^+ - \eta\}$ характеризуется тем, что диффузионным переносом вещества

вдоль поверхности частицы можно пренебречь по сравнению с переносом по нормали.

Вводя переменные $\zeta = \varepsilon^{-1}\Phi$, η , λ и оставляя старшие члены разложения по степеням ε , из уравнения (2.3) с учетом (1.2), (2.4) получаем

$$(2.5) \quad \left(\frac{\partial}{\partial t_1} - \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} \right) c_1^{(d)} = 0$$

$$c_1^{(d)}|_{t_1=0} = 1, \quad c_1^{(d)}|_{\zeta=0} = 0, \quad c_1^{(d)}|_{\zeta \rightarrow \infty} \rightarrow 1$$

$$t_1 = \tau(\eta, \eta_1^-, \lambda), \quad \tau(\eta, \mu, \lambda) = \int_{\mu}^{\eta} \Lambda f d\eta, \quad \Lambda = [\sqrt{g} g_{11}^{-1}]|_{\zeta=0}$$

Здесь начальное условие соответствует условию натекания на переднюю критическую точку.

Решение задачи (2.5) имеет вид [7]

$$(2.6) \quad c_1^{(d)}(\zeta, t_1) = \operatorname{erf}(\zeta/2t_1^{1/2})$$

Толщина диффузионного погранслоя δ , локальный и полный диффузионные потоки на поверхность капли определяются формулами

$$(2.7) \quad j_1(\eta, \lambda) = \frac{1}{\sqrt{g_{11}^{\circ}}} \frac{\partial c}{\partial \xi} \Big|_{\xi=0} = \frac{f(\eta, \lambda)}{\varepsilon \sqrt{\pi g_{11}^{\circ}(\eta, \lambda)} t_1(\eta, \lambda)}, \quad \delta = \frac{1}{j},$$

$$g_{11}^{\circ} = [g_{11}]_{\xi=0}$$

$$I_1 = \int_0^{2\pi} \int_{\eta_1^-}^{\eta_1^+} j_1 \Lambda \sqrt{g_{11}^{\circ}} d\eta d\lambda = \frac{2}{\varepsilon \sqrt{\pi}} \int_0^{2\pi} \sqrt{t_1^{\circ}(\lambda)} d\lambda, \quad t_1^{\circ} = \tau(\eta_1^+, \eta_1^-, \lambda)$$

Из выражений (2.7) видно, что при $\eta \rightarrow \eta_1^+$ толщина диффузионного погранслоя неограниченно растет, при этом производные по η становятся большими и ими уже нельзя пренебречь в уравнении (2.3). Поэтому здесь, как и для осесимметричного обтекания капли [6], необходимо рассмотреть диффузионный след $W_1 = \{\Phi < \varepsilon, \eta_1^+ - \varepsilon < \eta\}$, состоящий из четырех подобластей $W^{(k)}$ ($k=1, 2, 3, 4$) (фиг. 2).

В конвективно-погранслоевой области $W_1^{(1)} = \{\varepsilon^2 \ll \Phi \ll \varepsilon, \varepsilon \ll \eta - \eta_1^+\}$ правая часть уравнения (2.3) несущественна, поэтому концентрация здесь зависит лишь от Φ и λ и сохраняет постоянное значение вдоль линий тока, равное значениям на выходе из диффузионного погранслоя.

Явное выражение для концентрации в $W_1^{(1)}$ определяется сращиванием с решением (2.6) и имеет вид

$$(2.8) \quad c_1^{(1)}(\zeta, \lambda) = c_1^{(d)}(\zeta, \eta, \lambda)|_{\eta \rightarrow \eta_1^+} = \operatorname{erf}(\zeta/2\sqrt{t_1^{\circ}}), \quad t_1^{\circ}(\lambda) = t_1(\eta, \lambda)|_{\eta \rightarrow \eta_1^+}$$

Области задней критической точки $W_1^{(3)} = \{\Phi \ll \varepsilon^3, |\eta - \eta_1^+| \ll \varepsilon\}$, где существен как нормальный, так и тангенциальный перенос, внутренняя область следа $W_1^{(2)} = \{\Phi \ll \varepsilon^2, \eta_1^+ - \varepsilon \ll \eta \ll \varepsilon^{-1}\}$ и область смещения $W^{(4)} = \{\Phi \ll \varepsilon, \varepsilon^{-1} \ll \eta\}$, где существен лишь нормальный перенос, здесь рассматриваться не будут. Укажем лишь порядок (по ε) концентрации в этих областях: $c_1^{(2)} \sim \varepsilon$, $c_1^{(3)} \sim \varepsilon^2$, $c_1^{(4)} \sim 1$. Следует отметить, что более сложный анализ трехмерного диффузионного погранслоя проведен в [8], где для

уравнения стационарной конвективной диффузии, записанного в пограничных координатах, было найдено преобразование, сводившее его к уравнению с разделяющимися переменными.

3. Диффузия к произвольной капле цепочки. Здесь предполагаем, что расстояние между каплями удовлетворяет условию $\eta_{k+1}^- - \eta_k^+ \ll \varepsilon^{-1}$. На поверхности второй капли можно выделить области передней $b_2 = \{\Phi \ll \varepsilon^3, |\eta - \eta_2^-| \ll \varepsilon\}$ и задней $W_2^{(3)} = \{\Phi \ll \varepsilon^3, |\eta - \eta_2^+| \ll \varepsilon\}$ критических точек и область диффузионного пограничного слоя $d_2 = \{\Phi \ll \varepsilon, \varepsilon \ll \eta - \eta_2^-, \varepsilon \ll \eta_2^+ - \eta\}$. Вклады областей b_2 и $W_2^{(3)}$ в полный диффузионный поток незначительны по сравнению с вкладом d_2 [6]. Поэтому для нахождения главного члена разложения полного диффузионного потока на вторую каплю по степеням ε достаточно получить решение в диффузионном пограничном слое d_2 .

Запишем уравнение и граничные условия для концентрации в диффузионном пограничном слое второй капли

$$(3.1) \quad \left(\frac{\partial}{\partial t_2} - \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \right) c_2^{(d)} = 0, \quad t_2(\eta, \lambda) = \tau(\eta, \eta_2^-, \lambda)$$

$$c_2^{(d)}|_{\xi=0, \eta_2^- \leq \eta \leq \eta_2^+} = 0, \quad c_2^{(d)}|_{\xi \rightarrow \infty} \rightarrow 1 \quad (\xi = \varepsilon^{-1} \Phi)$$

где выражение для τ определено в (2.5).

Условие натекания для диффузионного погранслоя второй частицы определяется сращиванием с решениями в областях $W_1^{(1)}$ и $W_1^{(2)}$ первой капли. Используя решение уравнения (3.1) с произвольным начальным условием, можно показать, что распределение концентрации во внутренней области следа $W_1^{(2)}$ не влияет на старший член разложения по степеням ε решения в d_2 . Поэтому условие натекания для второй капли определяется выражением (2.8).

Аналогично рассуждениям, проведенным для первой капли, можно показать, что из уравнения (3.1) нельзя получить распределения концентрации в окрестности точки вытекания второй капли. Поэтому необходимо рассмотреть диффузионный след второй капли $W_2 = \{\Phi \ll \varepsilon, \eta_2^+ - \varepsilon < \eta\}$, конвективно-пограничная область $W_2^{(1)} = \{\Phi \ll \varepsilon, \varepsilon \ll \eta - \eta_2^+\}$ которого будет определять условие натекания для диффузионного пограничного слоя третьей капли.

Рекуррентная система уравнений, описывающая распределение концентрации в диффузионном пограничном слое любой капли цепочки, имеет вид

$$(3.2) \quad \left(\frac{\partial}{\partial t_k} - \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \right) c_k^{(d)} = 0, \quad (k=1, 2, \dots, n)$$

$$c_k^{(d)}|_{\xi=0, \eta_k^- \leq \eta \leq \eta_k^+} = 0, \quad c_k^{(d)}|_{\xi \rightarrow \infty} \rightarrow 1$$

$$c_k^{(d)}|_{t_k=0} = c_{k-1}^{(d)}(\xi, t_{k-1}^0), \quad c_0^{(d)} \equiv 1$$

$$t_k = \tau(\eta, \eta_k^-, \lambda), \quad t_k^0 = \tau(\eta_k^+, \eta_k^-, \lambda) \quad (\xi = \varepsilon^{-1} \Phi)$$

Введение новой переменной

$$(3.3) \quad t^* = \sum_{i=1}^{k-1} t_i^0 + t_k, \quad (\eta_k^- \leq \eta \leq \eta_k^+)$$

сводит систему (3.2) к одному уравнению

$$(3.4) \quad \left(\frac{\partial}{\partial t^*} - \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \right) c = 0$$

$$c|_{t^*=0} = 1, \quad c|_{\xi=0} = 0, \quad c|_{\xi \rightarrow \infty} \rightarrow 1$$

решение которого определяется выражением

$$(3.5) \quad c = \operatorname{erf}(\xi / 2\sqrt{t^*})$$

Локальный и полный диффузионные потоки на k -ю частицу задаются формулами

$$(3.6) \quad j_k(\eta, \lambda) = \frac{f(\eta, \lambda)}{\varepsilon \sqrt{\pi g_{11}^{\circ}(\eta, \lambda) t^*(\eta, \lambda)}} \quad (\eta_k^- \leq \eta \leq \eta_k^+)$$

$$I_k = I_{\Sigma}^{(k)} - I_{\Sigma}^{(k-1)}, \quad I_{\Sigma}^{(k)} = \frac{2}{\varepsilon \sqrt{\pi}} \int_0^{2\pi} \left[\sum_{i=1}^k t_i^{\circ} \right]^{1/2} d\lambda$$

Используя выражения (3.3), (3.6), исследуем поведение полного диффузионного потока на каплю для больших порядковых номеров k

$$(3.7) \quad k \rightarrow \infty, \quad I_k \rightarrow \frac{1}{\varepsilon \sqrt{\pi}} \int_0^{2\pi} t_k^{\circ}(\lambda) \left[\sum_{i=1}^k t_i^{\circ}(\lambda) \right]^{-1/2} d\lambda$$

Для цепочки периодической структуры (любой гидродинамический параметр α , описывающий цепочку, удовлетворяет условию $\alpha(\eta+T, \lambda) = \alpha(\eta, \lambda)$, $T = \eta_2^- - \eta_1^-$) из выражения (3.6) имеем

$$(3.8) \quad I_{\Sigma}^{(k)} = I_1 k^{1/2}, \quad I_k = I_1 [k^{1/2} - (k-1)^{1/2}]$$

$$k \rightarrow \infty, \quad I_k \rightarrow \frac{1}{2} I_1 k^{-1/2}, \quad I_1 = \frac{2}{\varepsilon \sqrt{\pi}} \int_0^{2\pi} \sqrt{t_1^{\circ}(\lambda)} d\lambda$$

В осесимметричном случае $\partial/\partial\lambda = 0$ и введенная в п. 1 система координат вблизи частицы переходит в обычную систему координат (связанную с ее поверхностью), которая часто используется при исследовании гидродинамического пограничного слоя.

Для полного диффузионного потока выражение (3.6) упрощается и принимает вид

$$(3.9) \quad I_k = I_{\Sigma}^{(k)} - I_{\Sigma}^{(k-1)}, \quad I_{\Sigma}^{(k)} = 4\varepsilon^{-1} \sqrt{\pi} \left[\sum_{i=1}^k t_i^{\circ} \right]^{1/2},$$

$$t_k^{\circ} = \int_{\eta_k^-}^{\eta_k^+} \Lambda [\partial\psi/\partial\xi]_{\xi=0} d\eta$$

Рассмотрим теперь цепочку капель сферической формы с радиусами $\kappa(k)$ ($k=1, \dots$) расположенных на расстояниях $I \ll l_k \ll \varepsilon^{-1}$ одна за другой на оси поступательного стока потока. В сферической системе координат,

неподвижно связанной с центром k -й капли, функция тока имеет вид

$$(3.10) \quad \psi_k = \frac{\kappa(k)}{2(\beta+1)} (r_k - \kappa(k)) \sin^2 \theta_k + O(L^{-1}) + O(r_k - \kappa(k))^2$$

$$L = \min_k l_k, \quad \kappa(1) = 1, \quad \kappa(k) = O(1), \quad \beta_k = \beta$$

где β_k — отношение вязкостей капли и окружающей ее жидкости. Учитывая, что $\Lambda = \kappa^2(k) \sin \theta_k$ и используя (3.2), (3.6), (3.10), получаем следующие выражения для полных диффузионных потоков на капли

$$(3.11) \quad I_k = I_{\Sigma}^{(k)} - I_{\Sigma}^{(k-1)}, \quad I_{\Sigma}^{(k)} = I_1 \left[\sum_{i=1}^k \kappa^3(i) \right]^{1/2}$$

$$k \rightarrow \infty, \quad I_k \rightarrow 1/2 I_1 \kappa^3(k) \left[\sum_{i=1}^k \kappa^3(i) \right]^{-1/2}, \quad I_1 = 4\varepsilon^{-1} \sqrt{2\pi/3(\beta+1)}$$

Полагая в (3.11) $\kappa(k) = 1$ получаем результат [1].

При $\kappa(k) = k^\nu$ использование формул (3.11) дает

$$(3.12) \quad k \rightarrow \infty, \quad I_{\Sigma}^{(k)} \rightarrow (3\nu+1)^{-1/2} I_1 k^{(3\nu+1)/2} \quad (\nu > -1/3)$$

$$I_k \approx \partial I_{\Sigma}^{(k)} / \partial k \rightarrow 1/2 (3\nu+1)^{1/2} I_1 k^{(3\nu-1)/2}$$

Определим теперь закон роста радиусов капель $\kappa(k)$ в цепочке, при котором полные диффузионные потоки на каждую из них равны между собой $I_k = I_1$. Используя (3.11), и учитывая, что $I_{\Sigma}^{(k)} = k I_1$, получаем следующие значения радиусов

$$(3.13) \quad \kappa(k) = (2k-1)^{1/2}$$

Снимем теперь предположение о том, что расстояния между каплями удовлетворяют соотношению $\eta_{k+1} - \eta_k \ll \varepsilon^{-1}$.

Аналогично [6] получаем, что распределение концентрации в области смешения $W_1^{(k)} = \{\Phi \ll \varepsilon, \varepsilon^{-1/(1+\nu)} \ll \eta - \eta_1^+\}$ первой капли удовлетворяет следующему уравнению и граничным условиям

$$(3.14) \quad \left(\frac{\partial}{\partial \rho_1} - 2 \frac{\partial}{\partial \zeta} \zeta \frac{\partial}{\partial \zeta} \right) c_1^{(k)} = 0, \quad \zeta = \varepsilon^{-1} \Phi$$

$$c_1^{(k)} \Big|_{\rho_1 \rightarrow 0} \rightarrow c_1^{(1)}(\zeta, \lambda), \quad c_1^{(k)} \Big|_{\zeta \rightarrow 0} < \infty, \quad c_1^{(k)} \Big|_{\zeta \rightarrow \infty} \rightarrow 1$$

$$\rho_1(\eta, \eta_1^+) = \varepsilon n(\lambda) \int_{\eta_1^+}^{\eta} \tau^\nu d\tau, \quad m(\eta, \lambda) \Big|_{\eta \rightarrow \infty} \rightarrow n(\lambda) \eta^\nu$$

$$m(\eta, \lambda) = \lim_{\xi \rightarrow 0} [\sqrt{g}/g_{11} \xi]$$

В случае поступательного потока $n(\lambda) = 1, \nu = 0$ [6].

Решение задачи (3.14) имеет вид

$$(3.15) \quad c_1^{(k)}(\zeta, \rho_1) = A(\zeta, \rho_1) * c^{(1)}(\zeta)$$

$$A(\zeta, \rho) * u(\zeta) = \int_0^\infty \frac{1}{2\rho} \exp\left(-\frac{\zeta + \zeta^*}{2\rho}\right) I_0\left(\frac{\sqrt{\zeta \zeta^*}}{\rho}\right) u(\zeta^*) d\zeta^*$$

Здесь и ниже переменная λ во всех выражениях опущена.

Распределение концентрации в области смешения первой капли $W_1^{(4)}$ задает условие натекания для диффузионного погранслоя второй капли. При этом распределение концентрации в d_2 определяется решением уравнения (3.1) с начальным условием (3.15). Диффузионный след W_2 второй капли определяет условие натекания для третьей капли и т. д. Поэтому распределение концентрации в диффузионном погранслое произвольной капли цепочки определяется следующей рекуррентной формулой

$$(3.16) \quad c_k^{(d)} = L(\zeta, t_k) * c_{k-1}^{(4)}(\zeta, \rho_{k-1}^{\circ}), \quad \rho_k^{\circ} = \rho_k(\eta_k^-, \eta_{k-1}^+)$$

$$c_k^{(4)} = A(\zeta, \rho_k) * c_k^{(d)}(\zeta, t_k^{\circ}), \quad c_0^{(4)} \equiv 1$$

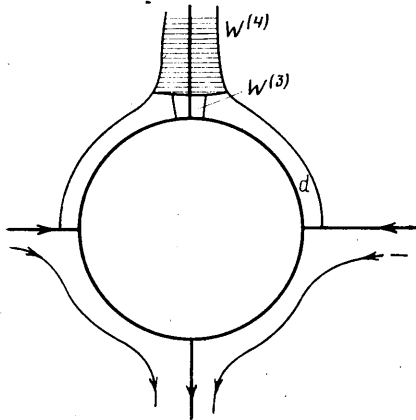
$$L(\zeta, t) * u(\zeta) = \int_0^{\infty} \frac{\sqrt{\zeta \zeta^*}}{2t} \exp\left(-\frac{\zeta^2 + \zeta^{*2}}{4t}\right) I_{1/2}\left(\frac{\zeta \zeta^*}{2t}\right) u(\zeta^*) d\zeta^*$$

При $\rho_k \rightarrow 0$, $A \rightarrow E$, где E тождественный оператор. Поэтому при $\rho_k^{\circ} \ll 1$ формулы (3.16) переходят в (3.5).

Из формулы (2.8) видно, что полный диффузионный поток на поверхность капли стремится к нулю обратно-пропорционально квадратному корню ее порядкового номера в цепочке. Суммарный диффузионный поток I_2 пропорционален $n^{1/2}$ и значительно меньше, чем суммарный поток на цепочку, вычисленный по решению диффузионного погранслоя [7] (без учета диффузионного взаимодействия капель), где он пропорционален n . Отметим, что для случая цепочки, состоящей из твердых сфер, полный диффузионный поток на i -ю сферу $I_i \sim i^{-1/2}$, а суммарный поток $I_2 \sim n^{1/2}$ [9]. Это говорит о том, что капли значительно сильнее оказывают диффузионное влияние одна на другую.

4. Случай критических линий на поверхности капли. В п. 1—3 считалось, что на поверхностях капель существуют лишь две изолированные критические точки. Теперь рассмотрим случай, когда на поверхности капли есть критические линии. Для упрощения рассуждений считаем, что соответствующая задача осесимметрична ($\partial/\partial\lambda=0$), капля имеет сферическую форму, критическая линия (вытекания) одна и особая поверхность, определенная этой линией, выходит по нормали к поверхности капли. Возможны два случая: 1) особая поверхность вытекания уходит на бесконечность (фиг. 3), 2) она ограничивает конечный объем жидкости — область замкнутой циркуляции (фиг. 4).

При сделанных предположениях ψ — функция тока и вблизи поверхности капли имеем $\xi = r - 1$, $\eta = \theta + \text{const}$ (r, θ — сферическая система координат, неподвижно связанная с центром капли), поэтому уравнение диффузии (2.3) удобнее записать в сферической системе координат



Фиг. 3

$$(4.1) \quad \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \frac{\partial c}{\partial r} - \frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{\partial c}{\partial \theta} = \\ = \varepsilon^2 \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \sin \theta \frac{\partial c}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial c}{\partial \theta} \right) \right]$$

Здесь угол θ отсчитывается от траектории натекания, а знаки плюс и минус соответствуют знаку функции тока ψ (-) в соответствующих областях, как указано на фиг. 3, 4.

Обозначим c_+ (c_-) — концентрацию в области d_+ (d_-). В области d_+ условие натекания для диффузионного погранслоя будет обычным $c_+(\theta=\pi)=1$ [7], поэтому распределение концентрации как в первом, так и во

втором случае будет определяться автомодельным решением [10]

$$(4.2) \quad c_+^{(d)} = \operatorname{erf}(\zeta/2 \sqrt{t_+(\theta)}), \quad \zeta = \varepsilon^{-1} \psi$$

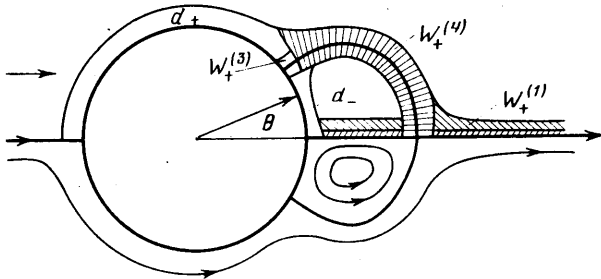
$$t_+(\theta) = \int_0^\pi \sin \tau f(\tau) d\tau,$$

$$f(\theta) = [\partial \psi / \partial r]_{r=1}$$

Условие натекания для $c_-^{(d)}$ задается концентрацией, приносимой на «вход» в диффузионный погранслой, по линиям тока, лежащим вблизи оси $\theta=0$

$$(4.3) \quad c_-^{(d)}(\theta, 0) = x(\zeta)$$

В первом случае выражение (4.3) соответствует обычному условию натекания $x(\zeta) = 1$, а во втором $x(\zeta)$ заранее неизвестна и должна определяться в ходе решения задачи. Распределение концентрации в d_- будет определяться решением уравнения диффузионного погранслоя с граничными условиями полного поглощения на



Фиг. 4

поверхности капли и постоянства концентрации вдали от нее (2.5) и начальным условием (4.3).

Считая $x(\zeta)$ известной, получаем следующее распределение концентрации в d_- :

$$(4.4) \quad c_-^{(d)}(\zeta, t_-) = L(|\zeta|, t_-) * x(\zeta)$$

$$L(\zeta, t) * u(\zeta) = \int_0^\infty \frac{(\zeta \zeta^*)^{1/2}}{2t} \exp\left(-\frac{\zeta^2 + \zeta^{*2}}{4t}\right) I_{1/2}\left(\frac{\zeta \zeta^*}{2t}\right) u(\zeta^*) d\zeta^*$$

$$t_- = t_-(\theta) = \int_0^\theta \sin \tau |f(\tau)| d\tau$$

Приближение диффузионного погранслоя (4.2), (4.4) становится непригодным при $|\theta - \theta^*| \sim \varepsilon$, здесь угол θ^* определяет критическую линию вытекания поверхности капли.

Асимптотический анализ уравнения (4.1) показывает, что при $\varepsilon \ll 1$ в окрестности θ^* можно выделить две области с различным механизмом массопереноса $W^{(3)}$ и $W^{(4)}$.

Учитывая, что вблизи поверхности вытекания функцию тока можно представить в виде

$$(4.5) \quad \psi(r, \theta) |_{r \rightarrow R_*(\theta)} \rightarrow (r - R_*(\theta)) \varphi(\theta), \quad \varphi(\theta) = [\partial \psi / \partial r]_{r=R_*(\theta)}$$

$$\varphi(\theta) |_{\theta \rightarrow \theta^*} \rightarrow \gamma(\theta - \theta^*)$$

где $r = R_*(\theta)$ — уравнение поверхности вытекания, определенное критической линией θ^* поверхности капли, в переменных

$$Y = (\varepsilon \lambda)^{-1} (r - 1), \quad S = (\varepsilon \lambda)^{-1} (\theta - \theta^*), \quad \lambda = (\sin \theta^* / \gamma)^{1/2}$$

получаем следующее уравнение и граничные условия для области $W^{(3)}$:

$$(4.6) \quad Y \frac{\partial c^{(3)}}{\partial Y} - S \frac{\partial c^{(3)}}{\partial S} = \frac{\partial^2 c^{(3)}}{\partial Y^2} + \frac{\partial^2 c^{(3)}}{\partial S^2}, \quad c^{(3)}|_{Y=0} = 0$$

$$c^{(3)}|_{S \rightarrow +\infty} \rightarrow c_+^{(d)}|_{\theta \rightarrow \theta^*} = \varepsilon \sin \theta^* A^+ Y S$$

$$c^{(3)}|_{S \rightarrow -\infty} \rightarrow c_-^{(d)}|_{\theta \rightarrow \theta^*} = -\varepsilon \sin \theta^* A^- Y S$$

$$A^+ = (\pi t_+^{\circ})^{-1/2}, \quad A^- = \int_0^{\infty} \frac{\zeta^*}{2 \sqrt{\pi} t^{3/2}} \exp\left(-\frac{\zeta^{*2}}{4t_-^{\circ}}\right) x(\zeta^*) d\zeta^*$$

$$t_+^{\circ} = t_+(\theta^*), \quad t_-^{\circ} = t_-(\theta^*)$$

Здесь граничные условия при $S \rightarrow \infty$ получены из условия сращивания с решениями диффузионного погранслоя d_+ (4.2) и d_- (4.4). Задачу (4.6) необходимо дополнить еще граничным условием на бесконечности ($Y \rightarrow +\infty$), которое может быть получено из следующего соображения: в области смещения $W^{(4)}$, прилегающей к $W^{(3)}$, переносом по нормали к поверхности капли можно пренебречь по сравнению с тангенциальным переносом, поэтому при $Y \rightarrow +\infty$ должно выполняться условие

$$(4.7) \quad Y \rightarrow +\infty, \quad \left[\frac{\partial^2 c^{(3)}}{\partial Y^2} / \frac{\partial^2 c^{(3)}}{\partial S^2} \right] \rightarrow 0$$

Решение задачи (4.6), (4.7) ищем в виде

$$(4.8) \quad c^{(3)}(Y, S) = \varepsilon \sin \theta^* Y F(S)$$

где функция F определяется из следующего уравнения:

$$(4.9) \quad F_{SS}'' + S F_S' - F = 0, \quad F|_{S \rightarrow -\infty} \rightarrow -A^- S, \quad F|_{S \rightarrow +\infty} \rightarrow A^+ S$$

Окончательно для распределения концентрации в $W^{(3)}$ получаем

$$(4.10) \quad c^{(3)}(Y, S) = \varepsilon \sin \theta^* Y \left[C_1 S + C_2 \left(e^{-S^2/2} + S \int_0^S e^{-\tau^2/2} d\tau \right) \right],$$

$$C_1 = 1/2(A^+ - A^-), \quad C_2 = (2\pi)^{-1/2}(A^+ + A^-)$$

В первом случае для потока, симметричного относительно плоскости $\theta^* = \pi/2$, получаем $t_-^{\circ} = t_+^{\circ}$, $A^- = A^+$, $C_1 = 0$, $C_2 = \sqrt{2}/\pi A^+$. В частности, в случае чистосдвигового потока [2] имеем

$$\gamma = 3/(\beta + 1), \quad \lambda = [(\beta + 1)/3]^{1/2}, \quad t^{\circ} = 3/4(\beta + 1), \quad A = (\pi t^{\circ})^{-1/2}$$

при этом локальный диффузионный поток в окрестности критической линии вытекания определяется

$$j(S) = \frac{1}{\varepsilon \lambda} \frac{\partial c^{(3)}}{\partial Y} \Big|_{Y=0} = j_{\min} \left[e^{-S^2/2} + S \int_0^S e^{-\tau^2/2} d\tau \right], \quad j_{\min} = j(0) = 2 \sqrt{2} \pi^{-1}$$

В области $W^{(4)}$ существует лишь перенос вещества по нормали к поверхности вытекания $r = R_*(\theta)$, поэтому уравнение, описывающее распределение концентрации в этой области, имеет вид

$$(4.11) \quad \frac{\partial c^{(4)}}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 c^{(4)}}{\partial \zeta^2}, \quad c^{(4)}|_{|\zeta| \rightarrow \infty} \rightarrow 1, \quad \tau = \int_0^{\eta} g_{\lambda\lambda}^* \sqrt{g_{\eta\eta}^*} v_{\eta}^* d\eta, \quad \zeta = \varepsilon^{-1} \psi$$

$$\left(\tau = \tau(\theta) = \int_0^{\theta^*} \sin \tau \left[R_*^2 + \left(\frac{d}{d\tau} R_* \right)^2 \right] (\partial \psi / \partial r)_{r=R_*(\tau)} d\tau \right)$$

где величины $g_{\lambda\lambda}^*$, $g_{\eta\eta}^*$, v_{η}^* взяты на поверхности вытекания, η — длина дуги от критической линии вдоль поверхности вытекания; выражение τ через θ дано для слу-

чая, когда поверхность $r=R^*(\theta)$ выходит не по нормали к поверхности капли ($R_0^{*'}(\theta) \leq 0$).

Начальное условие для задачи (4.11) определяется из условия срачивания $c^{(4)}$ с погранслоем решением d_+ (4.2) и d_- (4.4)

$$(4.12) \quad c|_{\tau=0} = \Delta(\zeta, x(\zeta)) = \begin{cases} c_+^{(d)}(\zeta, t_+^0), & \zeta \geq 0 \\ c_-^{(d)}(\zeta, t_-^0), & \zeta < 0 \end{cases}$$

В первом случае, когда за каплей область замкнутой циркуляции отсутствует, выражение (4.12) упрощается

$$(4.13) \quad \Delta(\zeta) = \operatorname{erf}\left(\frac{|\zeta|}{2t_0^{1/2}}\right), \quad t_0 = \begin{cases} t_+^0, & \zeta > 0 \\ t_-^0, & \zeta < 0 \end{cases}$$

Решение задачи (4.11), (4.12) имеет вид

$$(4.14) \quad c^{(4)}(\zeta, x(\zeta), \tau) = \mathbf{H}(\zeta, \tau) * \Delta(\zeta, x(\zeta)) = \\ = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{\tau}} \exp\left\{-\frac{(\zeta-\xi)^2}{4\tau}\right\} \Delta(\xi, x(\xi)) d\xi$$

В первом случае $\Delta(\zeta, x(\zeta))$ не зависит от x и выражения (4.13), (4.14) полностью определяют концентрацию в области $W^{(4)}$ (фиг. 3). Во втором случае, при подходе поверхности вытекания $r=R_*(\theta)$ к оси потока ($\theta=0$) диффузионный след распадается на два, один из которых находится внутри, а второй вне области замкнутой циркуляции (фиг. 4).

Диффузионный след в приосевой области ($\theta \sim 0$) состоит из двух подобластей $-W_-^{(1)}$ и $W_+^{(2)}$ ($W_+^{(1)}$ и $W_+^{(2)}$) с различным механизмом массопереноса. В конвективно-погранслоевой области $W_+^{(1)} = \{\varepsilon^2 \ll |\psi| \ll \varepsilon, y = r - 1 \ll \varepsilon^{-1}\}$ происходит перенос вещества, приходящего из $W^{(4)}$ вдоль линий тока без изменения [6]. Внутри $W^{(1)}$ находится внутренняя область диффузионного следа $W_+^{(2)} = \{|\psi| \ll \varepsilon^2, y \ll \varepsilon^{-1}\}$, которая здесь не рассматривается и которую можно исследовать аналогично [6].

Распределение концентрации в $W^{(1)}$ определяется выражением

$$(4.15) \quad c_{\pm}^{(1)}(\zeta) = c_{\pm}^{(4)}(\zeta, \tau_0), \quad \tau_0 = \tau(0)$$

Выражение для $c_-^{(1)}$ определяет условие натекания для диффузионного погранслоя d_- , которое по предположению задавалось некоторой заранее неизвестной функцией (4.3), поэтому имеем

$$(4.16) \quad x(\zeta) = \mathbf{H}(\zeta, \tau_0) * \Delta(\zeta, x(\zeta)), \quad (\zeta < 0)$$

Выражение (4.16) – линейное неоднородное интегральное уравнение относительно неизвестной функции $x(\zeta)$, заданное соотношениями (4.4), (4.11), (4.12), (4.14). Решив это уравнение (например, методом итераций), можно получить распределение концентрации внутри области замкнутой циркуляции и вне ее.

Концентрация во внешней конвективно-погранслоевой области $W_+^{(1)}$ удовлетворяет неравенству

$$(4.17) \quad \mathbf{H}(\zeta, \tau_0) * \Theta(\zeta) \operatorname{erf}(\zeta/2(t_+^0)^{1/2}) \leq \\ \leq c_+^{(1)} \leq \mathbf{H}(\zeta, \tau_0) * \operatorname{erf}(|\zeta|/2t_*^{1/2}), \quad t_* = \min(t_+^0, t_-^0)$$

где $\Theta(\zeta)$ – единичная функция Хэвисайда.

Выражение (4.17) может применяться для оценки диффузионного влияния капель друг на друга.

Решив уравнение (4.16) относительно неизвестной функции $x(\zeta)$, и подставляя ее в выражения (4.12), (4.14), получаем распределение концентрации в конвективно-погранслоевой области $W_+^{(1)}$ (4.15). На расстоянии порядка ε^{-1} (от границы области замкнутой циркуляции) область $W_+^{(1)}$ примыкает к области смешения $W_+^{(4)}$, распределение концентрации в которой может быть получено действием оператора А (см. формулу (3.15)) на $c_+^{(1)}$.

Если за первой каплей, имеющей область замкнутой циркуляции, движется вторая, то распределение концентрации в диффузионном пограничном слое d_2 определяется применением оператора L (3.16) к c_+ или $c_+^{(k)}$, в зависимости от того на каком расстоянии от первой она находится. Указанная процедура легко распространяется на случай цепочки, содержащей произвольное число капель (пузырей).

Проведенный анализ показывает, что в отличие от твердых частиц, где диффузионный след, порожденный критическими линиями поверхности частицы, имеет радиус действия порядка $R^{-1/2}$ [11], аналогичный диффузионный след капли значительно протяженнее и имеет характерную длину порядка единицы.

Обсуждение результатов. Из результатов пп. 1–3 видно, что вблизи цепочки при $\Phi \gg \varepsilon$ концентрация растворенного в потоке вещества практически не отличается от необедненной концентрации в набегающем потоке. Поэтому, если в жидкости имеется много цепочек и расстояния между ними удовлетворяют неравенству $l_{ij}^* \gg \varepsilon$, то они не оказывают влияния (по диффузии) друг на друга. При этом внутренний массообмен в фиксированной цепочке сильно заторможен взаимодействием диффузионных следов и пограничных слоев капель, принадлежащих цепочке. Например в цепочках с периодической по гидродинамике структурой, полный диффузионный поток на капли убывает как $k^{-1/2}$ (k — номер капли в цепочке), а суммарный поток на все капли цепочки пропорционален $k^{1/2}$ и значительно меньше суммарного потока вычисленного по автомодельному решению [7] (без учета диффузионного взаимодействия капель), где он пропорционален k .

Это говорит о том, что в концентрированных дисперсных системах, в тепломассообмене между фазами, решающую роль играет структура особых линий тока, начинающихся и оканчивающихся на поверхностях капель (пузырей).

Отметим, что результаты, полученные в данной работе, распространяются на те случаи, когда для функции тока справедливо представление (2.4). Это имеет место, например, в случае невязкого или фильтрационного обтекания частиц.

Автор благодарит Ю. П. Гупало и Ю. С. Рязанцева за внимание к работе.

Поступила 25 III 1977

ЛИТЕРАТУРА

1. Гупало Ю. П., Полянин А. Д., Рязанцев Ю. С. О диффузии к цепочке капель (пузырей) при больших числах Пекле. Изв. АН СССР, МЖГ, 1978, № 1.
2. Taylor G. I. Viscosity of a fluid containing small drops of another fluid. Proc. Roy. Soc., A, 1932, vol. 138, No. 834.
3. Marks C. H. Measurements of the terminal velocity of bubbles rising in a chain. Trans. ASME, 1973, vol. 195, No. 1.
4. Harper J. F. On bubbles rising in line at large Reynolds numbers. J. Fluid Mech., 1970, vol. 41, No. 4.
5. Камке Э. Справочник по дифференциальным уравнениям в частных производных первого порядка. М., «Наука», 1966.
6. Гупало Ю. П., Полянин А. Д., Рязанцев Ю. С. Массоперенос в диффузионном следе капли при стоксовом обтекании. ПММ, 1977, т. 41, вып. 2.
7. Левич В. Г. Физико-химическая гидродинамика. М., Физматгиз, 1959.
8. Волощук В. М. Фундаментальные уравнения диффузионного пограничного слоя. Тр. Ин-та эксперим. метеорол., 1973, вып. 3 (37).
9. Гупало Ю. П., Полянин А. Д., Рязанцев Ю. С. О массообмене частиц, расположенных на оси потока, при больших числах Пекле. Изв. АН СССР, МЖГ, 1977, № 2.
10. Гупало Ю. П., Полянин А. Д., Рязанцев Ю. С. Диффузия к частице при больших числах Пекле в случае произвольного осесимметрического обтекания вязкой жидкостью. ПММ, 1976, т. 40, вып. 5.
11. Полянин А. Д. О структуре диффузионного следа поглощающей частицы вблизи критических линий. Изв. АН СССР, МЖГ, 1977, № 3.