МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 2 · 1978

УДК 532.59

К ТЕОРИИ СТОЯЧИХ ВОЛН КОНЕЧНОЙ АМПЛИТУДЫ НА ПОВЕРХНОСТИ ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ КОНЕЧНОЙ ГЛУБИНЫ

С. С. БИШАЙ ХАННА

(Каир, АРЕ)

Нелинейная задача о плоских стоячих гравитационных волнах конечной амплитуды на поверхности идеальной несжимаемой жидкости бесконечной глубины была решена аналитически [1]. Она также была решена в [2] с помощью нового метода. В этом методе безразмерный потенциал скорости, профиль свободной поверхности и частота берутся в виде степенных рядов по параметру ε, равному отношению амплитуды к длине волны. Результаты обеих работ совпадают.

Ниже методом работы [2] изучаются плоские стоячие поверхностные волны конечной амплитуды на поверхности жидкости конечной глубины. Получены выражения для частоты, профиля свободной поверхности и потенциала скорости в виде степенных рядов по малому параметру ε. Решение получено до третьего приближения. Найдено выражение зависимости частоты от амплитуды.

1. Постановка задачи. Рассмотрим плоское потенциальное движение идеальной несжимаемой жидкости, ограниченной сверху свободной поверхностью и снизу горизонтальным зафиксированным дном глубиной h'. Движение считается периодическим относительно времени и горизонтальной координаты. Исследуемое движение задается следующими безразмерными уравнениями и граничными условиями:

$$\Delta\varphi(x, y, t)=0 \tag{1.1}$$

$$\eta_t-\eta_x\varphi_x+\eta_y=0, \quad \varphi_t-{}^1/_2(\varphi_x^2+\varphi_y^2)-y=0 \quad (y=\eta(x, t)) \tag{1.2}$$

$$\varphi_y=0 \quad (y=-h), \quad [\nabla\varphi]=0 \tag{1.3}$$

$$a_x=\frac{\partial a}{\partial x}, \quad a_y=\frac{\partial a}{\partial y}, \quad a_t=\frac{\partial a}{\partial t}, \quad a=(\varphi, \eta)$$

$$x=k'x', \quad y=k'y', \quad t=t'\sqrt{gk'}, \quad \eta=k'\eta'$$

$$h=k'h', \quad \varphi=\varphi'\sqrt{(k')^3/g}, \quad \sigma=\sigma'/\sqrt{gk'}$$

Здесь φ — потенциал скорости; η — отклонение свободной поверхности от невозмущенного положения; x, y — горизонтальная и вертикальная координаты, начало координат находится на невозмущенной свободной поверхности; y — координатная ось, направленная вверх; Δ, ∇ — операторы Лапласа и градиента; t — время; u, v — горизонтальная и вертикальная компоненты скорости; λ' — длина волны; σ' — частота; штрихами обозначены размерные величины.

2. Метод решения. Возьмем потенциал скорости φ и профиль волны η в виде степенных рядов по малому параметру ε

$$\varphi=\varepsilon\varphi_1+\varepsilon^2\varphi_2+\varepsilon^3\varphi_3+\ldots, \quad \eta=\varepsilon\eta_1+\varepsilon^2\eta_2+\varepsilon^3\eta_3+\ldots \tag{2.1}$$

Здесь $\varepsilon=k'a'$, a' — амплитуды волны. Подставляя эти выражения для φ и η в систему (2.8) — (2.12), находим решение, которое содержит секулярный член в выражениях для η_2 и η_3. Эти затруднения можно обойти, следуя работам [2, 3], взяв также и частоту в виде степенного ряда

$$\sigma=\sigma_1+\varepsilon\sigma_2+\varepsilon^2\sigma_3+\ldots \tag{2.2}$$

Выражение для σ_1 должно получиться таким же, как в линейной теории, а выражения для σ_2 и σ_3 определяются из условий отсутствия секулярных членов в выражениях для η_2 и η_3. Применив преобразование времени $\tau=\sigma t$ к системе уравнений (1.1) — (1.3), получим

$$\Delta\varphi(x,y,\tau)=0,\qquad \sigma\eta_\tau-\eta_x\varphi_x+\varphi_y=0,$$
$$\sigma\varphi_\tau-{}^1/_2(\varphi_x^2+\varphi_y^2)-y=0\qquad (y=\eta(x,\tau))$$
$$\varphi_y=0\quad (y=-h),\qquad \nabla\varphi(x,y,\tau)=\nabla\varphi(x,y,\tau+2\pi)$$

Подставляя выражения (2.1), (2.2) в эту систему и сравнивая коэффициенты при ε, ε^2, ε^3, получим следующие формулировки задач в первом, втором и третьем приближениях.

Первое приближение

$$\Delta\varphi_1=0,\qquad \sigma_1\eta_{1\tau}+\varphi_{1y}=0,\qquad \sigma_1\varphi_{1\tau}-\eta_1=0\qquad (y=0)$$
$$\varphi_{1y}=0\quad (y=-h),\qquad \nabla\varphi_1(x,y,\tau)=\nabla\varphi_1(x,y,\tau+2\pi)$$

Решение этой системы

$$\eta_1(x,\tau)=\sin\tau\cos x,\qquad \varphi_1(x,t)=-\frac{\operatorname{ch}(y+h)}{\sqrt{\operatorname{sh}h\operatorname{ch}h}}\cos\tau\cos x,\qquad \sigma_1=\sqrt{\operatorname{th}h} \tag{2.3}$$

Это решение совпадает с известным решением линейной задачи [1].

Второе приближение

$$\Delta\varphi_2=0 \tag{2.4}$$

$$\sigma_1\eta_{1\tau}+\varphi_{2y}=\eta_{1x}\varphi_{1x}-\eta_1\varphi_{1yy}-\sigma_2\eta_{1\tau}\qquad (y=0) \tag{2.5}$$

$$\sigma_1\varphi_{2\tau}-\eta_2={}^1/_2(\varphi_{1x}^2+\varphi_{1y}^2)-\sigma_1\eta_1\varphi_{1\tau y}-\sigma_2\varphi_{1\tau}\qquad (y=0) \tag{2.6}$$

$$\varphi_{2y}=0\quad (y=-h),\qquad \nabla\varphi_2(x,y,\tau)=\nabla\varphi_2(x,y,\tau+2\pi) \tag{2.7}$$

Подставляя найденные выражения (2.3) для η_1, φ_1, σ_1 в (2.5), (2.6), получим

$$\sqrt{\operatorname{th}h}\,\eta_{2\tau}+\varphi_{2y}={}^1/_2\sqrt{\operatorname{cth}h}\sin 2\tau\cos 2x-\sigma_2\cos\tau\cos x\qquad (y=0) \tag{2.8}$$

$$\begin{aligned}\sqrt{\operatorname{th}h}\,\varphi_{2\tau}-\eta_2={}&{}^1/_8[(3\operatorname{th}h-\operatorname{cth}h)\cos 2\tau-\\&-(\operatorname{th}h+\operatorname{cth}h)]\cos 2x-\sigma_2\sqrt{\operatorname{cth}h}\sin\tau\cos x+\\&+{}^1/_8(3\operatorname{th}h+\operatorname{cth}h)\cos 2\tau-{}^1/_8(\operatorname{th}h-\operatorname{cth}h)\qquad (y=0)\end{aligned} \tag{2.9}$$

Находим решение системы (2.4), (2.7) — (2.9) в виде

$$\eta_2(x,\tau)=f_1(\tau)\cos x+f_2(\tau)\cos 2x,\qquad \sigma_2=0$$
$$\varphi_2(x,y,\tau)=\operatorname{ch}(y+h)[F_1(\tau)\cos x+F_2(\tau)\cos 2x]+F_3(\tau)$$

Подставляя эти выражения для η_2, φ_2 в (2.8), (2.9) и сравнивая коэффициенты при $\cos x$ и $\cos 2x$, получим дифференциальные уравнения для f_1, f_2, F_3 и соотношения между F_1, F_2, f_1, f_2

$$\frac{d^2f_1}{d\tau^2}+f_1=2\sigma_2\sqrt{\operatorname{cth} h}\sin\tau$$

$$\frac{d^2f_2}{d\tau^2}+f_2=-\frac{3}{8}(\operatorname{th} h-3\operatorname{cth} h)\cos 2\tau+\frac{1}{8}(\operatorname{th} h+\operatorname{cth} h)$$

$$\frac{dF_3}{d\tau}=\frac{1}{8}(3\sqrt{\operatorname{th} h}+\sqrt{\operatorname{cth}^3 h})\cos 2\tau-\frac{1}{8}(\sqrt{\operatorname{th} h}-\sqrt{\operatorname{cth}^3 h})$$

$$F_1(\tau)=-\operatorname{cosech} h\left(\sqrt{\operatorname{th} h}\frac{df_1}{d\tau}+\sigma_2\cos\tau\right),$$

$$F_2(\tau)=-\operatorname{cosech} h\left(\sqrt{\operatorname{th} h}\frac{df_2}{d\tau}-\frac{1}{2}\sqrt{\operatorname{cth} h}\sin 2\tau\right)$$

Из этой системы уравнений и соотношений получим следующее периодическое решение:

$$\eta_2=(\alpha_1\sin\tau+\alpha_2\cos\tau)\cos x+[\alpha_3\sin\tau+\alpha_4\cos\tau+ +{}^1/_8(\operatorname{th} h+\operatorname{cth} h)+{}^1/_8(\operatorname{th} h-3\operatorname{cth} h)\cos 2\tau]\cos 2x \tag{2.10}$$

$$\varphi_2=\frac{\operatorname{ch}(y+h)}{\sqrt{\operatorname{sh} h\operatorname{ch} h}}(\alpha_2\sin\tau-\alpha_1\cos\tau)\cos x+ \tag{2.11}$$

$$+\frac{\operatorname{ch}(y+h)}{\operatorname{sh} h}\left[\frac{1}{4}(\sqrt{\operatorname{th}^3 h}-\sqrt{\operatorname{cth} h})\sin 2\tau+\sqrt{\operatorname{th} h}(\alpha_4\sin\tau-\alpha_3\cos\tau)\right]\cos 2x-$$

$$-\frac{1}{8}(\sqrt{\operatorname{th} h}-\sqrt{\operatorname{cth}^3 h})\tau+\frac{1}{16}(3\sqrt{\operatorname{th} h}+\sqrt{\operatorname{cth}^3 h})\sin 2\tau,\quad \sigma_2=0$$

где $\alpha_1-\alpha_4$ — произвольные константы. Если потребовать, чтобы при $h\to\infty$ выражение (2.10) для η_2 стремилось к найденному раньше аналогичному выражению в [1], то $\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=\alpha_4=0$ и тогда η_2 и φ_2 примут следующий вид:

$$\eta_2={}^1/_8[(\operatorname{th} h+\operatorname{cth} h)+(\operatorname{th} h-3\operatorname{cth} h)\cos 2\tau]\cos 2x$$

$$\varphi_2=\frac{(\sqrt{\operatorname{th}^3 h}-\sqrt{\operatorname{cth} h})}{4\operatorname{sh} h}\operatorname{ch}(y+h)\sin 2\tau\cos 2x-$$

$$-{}^1/_8(\sqrt{\operatorname{th} h}-\sqrt{\operatorname{cth}^3 h})\tau+{}^1/_{16}(3\sqrt{\operatorname{th} h}+\sqrt{\operatorname{cth}^3 h})\sin 2\tau$$

Третье приближение

$$\Delta\varphi_3=0 \tag{2.12}$$

$$\sigma_1\eta_{3\tau}+\varphi_{3y}=\eta_{1x}\varphi_{2x}+\eta_1\eta_{1x}\varphi_{1xy}+\eta_{2x}\varphi_{1x}-\sigma_2\eta_{2\tau}- -\sigma_3\eta_{1\tau}-\eta_1\varphi_{2yy}-\eta_2\varphi_{1yy}-{}^1/_2\eta_1^2\varphi_{1yyy}\quad (y=0) \tag{2.13}$$

$$\sigma_1\varphi_{3\tau}-\eta_3=\varphi_{1x}\varphi_{2x}+\eta_1\varphi_{1x}\varphi_{1xy}+\varphi_{1y}\varphi_{2y}+\eta_1\varphi_{1y}\varphi_{1yy}- -\sigma_1\eta_1\varphi_{2\tau y}-\sigma_1\eta_2\varphi_{1\tau y}-{}^1/_2\sigma_1\eta_1^2\varphi_{1\tau yy}-\sigma_2\varphi_{2\tau}-\sigma_2\eta_1\varphi_{1\tau y}-\sigma_3\varphi_{1\tau}\quad (y=0) \tag{2.14}$$

$$\varphi_{3y}=0\quad (y=-h),\quad \nabla\varphi_3(x,y,\tau)=\nabla\varphi_3(x,y,\tau+2\pi) \tag{2.15}$$

Подставляя найденные выражения для η_1, φ_1, σ_1, η_2, φ_2, σ_2 в (2.13) и (2.14), получим

(2.16)
$$\sqrt{\operatorname{th} h}\,\eta_{3\tau}+\varphi_{3y} = \left[-\left(\sigma_3+\frac{1}{32}\sqrt{\operatorname{cth}^3 h}\right)\cos\tau + \right.$$

$$\left.+\frac{1}{32}\left(-4\sqrt{\operatorname{th} h}+5\sqrt{\operatorname{cth}^3 h}\right)\cos 3\tau\right]\cos x +$$

$$+{}^1/_{32}\left[\left(6\sqrt{\operatorname{th} h}+3\sqrt{\operatorname{cth}^3 h}\right)\cos\tau+\left(6\sqrt{\operatorname{th} h}-15\sqrt{\operatorname{cth}^3 h}\right)\cos 3\tau\right]\cos 3x \quad (y=0)$$

$$\sqrt{\operatorname{th} h}\,\varphi_{3\tau}-\eta_3=\left[\left(-\sigma_3\sqrt{\operatorname{cth} h}+{}^1/_{32}\operatorname{th}^2 h-{}^3/_8+{}^1/_8\operatorname{cth}^2 h\right)\sin\tau-\right.$$

$$\left.-{}^1/_{32}\left(7\operatorname{th}^2 h-16-4\operatorname{cth}^2 h\right)\sin 3\tau\right]\cos x+{}^1/_{32}\left[\left(\operatorname{th}^2 h-6-4\operatorname{cth}^2 h\right)\sin\tau-\right.$$

$$\left.-\left(7\operatorname{th}^2 h-14+4\operatorname{cth}^2 h\right)\sin 3\tau\right]\cos 3x \qquad (y=0)$$

Решение системы (2.12), (2.15), (2.16) ищется в виде

$$\eta_3=g_1(\tau)\cos x+g_2(\tau)\cos 3x,\qquad \varphi_3=\left[\operatorname{ch}(y+h)G_1(\tau)+\beta_1\cos\tau+\right.$$
$$\left.+\beta_2\cos 3\tau\right]\cos x+\left[\operatorname{ch}(y+h)G_2(\tau)+\beta_3\cos\tau+\beta_4\cos 3\tau\right]\cos 3x$$

Подставляя эти выражения для η_3 и φ_3 в (2.16) и сравнивая коэффициенты при $\cos x$ и $\cos 3x$, получим два уравнения для определения g_1 и g_2 и два соотношения для определения G_1 и G_2 через g_1 и g_2

$$\frac{d^2g_1}{d\tau^2}+g_1=\left(2\sigma_3\sqrt{\operatorname{cth} h}-\frac{1}{32}\operatorname{th}^2 h+\frac{3}{8}-\frac{3}{32}\operatorname{cth}^2 h-\beta_1\sqrt{\operatorname{th} h}\right)\sin\tau+$$

$$+\left({}^7/_{32}\operatorname{th}^2 h-{}^1/_8-{}^{19}/_{32}\operatorname{cth}^2 h-2\beta_2\sqrt{\operatorname{th} h}\right)\sin 3\tau$$

(2.17)
$$\frac{d^2g_2}{d\tau^2}+g_2=-\frac{1}{32}\left(\operatorname{th}^2 h-\operatorname{cth}^2 h+32\beta_2\sqrt{\operatorname{th} h}\right)\sin\tau+$$

$$+\left(\frac{7}{32}\operatorname{th}^2 h-1+\frac{49}{32}\operatorname{cth}^2 h-3\beta_4\sqrt{\operatorname{th} h}\right)\sin 3\tau$$

$$G_1=-\operatorname{cosech} h\left[\left(\sigma_3+\frac{1}{32}\sqrt{\operatorname{cth}^3 h}\right)\cos\tau+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{32}\left(4\sqrt{\operatorname{th} h}-5\sqrt{\operatorname{cth}^3 h}\right)\cos 3\tau+\sqrt{\operatorname{th} h}\,\frac{dg_1}{d\tau}\right]$$

$$G_2=\operatorname{cosech} h\left[\frac{3}{32}\left(2\sqrt{\operatorname{th} h}+\sqrt{\operatorname{cth}^3 h}\right)\cos\tau+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{32}\left(6\sqrt{\operatorname{th} h}-15\sqrt{\operatorname{cth}^3 h}\right)\cos 3\tau-\sqrt{\operatorname{th} h}\,\frac{dg_2}{d\tau}\right]$$

Периодическим решением системы (2.17) является

$$\eta_3=\left[\beta_5\sin\tau+\beta_6\cos\tau-\left(\frac{7}{256}\operatorname{th}^2 h-\frac{1}{64}-\frac{19}{256}\operatorname{cth}^2 h-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\frac{3\beta_2}{8}\sqrt{\operatorname{th} h}\right)\sin 3\tau\right]\cos x+\left[\beta_7\sin\tau+\beta_8\cos\tau-\left(\frac{7}{256}\operatorname{th}^2 h-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\frac{1}{8}+\frac{49}{256}\operatorname{cth}^2 h-\frac{3\beta_4}{8}\sqrt{\operatorname{th} h}\right)\sin 3\tau\right]\cos 3x$$

$$\varphi_3=\left\{\frac{\operatorname{ch}(y+h)}{\operatorname{sh}h}\left[\beta_6\sqrt{\operatorname{th}h}\sin\tau-\left(\sigma_3+\frac{1}{32}\sqrt{\operatorname{cth}^3h}+\beta_5\sqrt{\operatorname{th}h}\right)\cos\tau+\right.\right.$$

$$\left.+\left(\frac{21}{256}\sqrt{\operatorname{th}^5h}-\frac{11}{64}\sqrt{\operatorname{th}h}-\frac{17}{256}\sqrt{\operatorname{cth}^3h}-\frac{9}{8}\beta_2\operatorname{th}h\right)\cos3\tau\right]+$$

$$\left.+\beta_1\cos\tau+\beta_2\cos3\tau\right\}\cos x+\left\{\frac{\operatorname{ch}(y+h)}{\operatorname{sh}h}\left[\beta_8\sqrt{\operatorname{th}h}\sin\tau+\right.\right.$$

$$+\left(\frac{3}{16}\sqrt{\operatorname{th}h}+\frac{3}{32}\sqrt{\operatorname{cth}^3h}-\beta_7\sqrt{\operatorname{th}h}\right)\cos\tau+$$

$$\left.+\left(\frac{21}{256}\sqrt{\operatorname{th}^5h}-\frac{3}{16}\sqrt{\operatorname{th}h}+\frac{27}{256}\sqrt{\operatorname{cth}^3h}-\frac{9}{8}\beta_4\operatorname{th}h\right)\cos3\tau\right]-$$

$$\left.-\frac{1}{32}\left(\sqrt{\operatorname{th}^3h}-\sqrt{\operatorname{cth}^5h}\right)\cos\tau+\beta_4\cos3\tau\right\}\cos3x$$

$$\sigma_3=\frac{1}{64}\sqrt{\operatorname{th}^5h}-\frac{3}{16}\sqrt{\operatorname{th}h}+\frac{3}{64}\sqrt{\operatorname{cth}^3h}+\frac{1}{2}\beta_1\operatorname{th}h$$

$$\beta_3=-\frac{1}{32}\left[\sqrt{\operatorname{th}^3h}-\sqrt{\operatorname{cth}^5h}\right]$$

где β_1, β_2, $\beta_4-\beta_8$ – произвольные константы. Пользуясь условием, что это решение стремится к найденному раньше решению [1, 2] при $h\to\infty$, находим, что $\beta_1=\beta_2=\beta_4=\beta_6=\beta_8=0$, $3\beta_5=\beta_7{}^9/_{32}$, и тогда η_3, φ_3 и σ_3 примут вид

$$\eta_3=\frac{1}{256}\left[24\sin\tau-(7\operatorname{th}^2h-4-19\operatorname{cth}^2h)\sin3\tau\right]\cos x+$$

$$+\frac{1}{256}\left[72\sin\tau-(7\operatorname{th}^2h-32+49\operatorname{cth}^2h)\sin3\tau\right]\cos3x$$

$$\varphi_3=\frac{\operatorname{ch}(y+h)}{4\sqrt{\operatorname{sh}h\operatorname{ch}h}}\left[(-4\operatorname{th}^2h+24-20\operatorname{cth}^2h)\cos\tau+(21\operatorname{th}^2h-44-17\operatorname{th}^2h)\cos3\tau\right]\cos x+$$

$$+\frac{1}{256\sqrt{\operatorname{sh}h\operatorname{ch}h}}\left\{\operatorname{ch}(y+h)\left[24\operatorname{cosech}^2h\cos\tau+(21\operatorname{th}^2h-48+\right.\right.$$

$$\left.\left.+27\operatorname{cth}^2h)\cos3\tau\right]-8\operatorname{th}h\operatorname{sech}^2h\cos\tau\right\}\cos3x,$$

$$\sigma_3=\frac{1}{64}\sqrt{\operatorname{th}h}\,(\operatorname{th}^2h-12+3\operatorname{cth}^2h)$$

Учитывая найденные решения в первом, втором и третьем приближениях, получаем, что выражениями для профиля волны, потенциала скорости и частоты до третьей степени точности являются

$$\eta_3=\left[\left(\varepsilon+\frac{3}{32}\varepsilon^2\right)\sin\tau-\frac{1}{256}(7\operatorname{th}^2h-4-19\operatorname{cth}^2h)\,\varepsilon^3\sin3\tau\right]\cos x+$$

$$+\frac{\varepsilon^2}{8}\left[(\operatorname{th}h+\operatorname{cth}h)+(\operatorname{th}h-3\operatorname{cth}h)\cos2\tau\right]\cos2x+$$

$$+\frac{\varepsilon^3}{256}\left[72\sin\tau-(7\operatorname{th}^2h-32+49\operatorname{cth}^2h)\sin2\tau\right]\cos3x$$

$$\varphi=\frac{\operatorname{ch}(y+h)}{\sqrt{\operatorname{sh}h\operatorname{ch}h}}\left\{-\left[\varepsilon+\frac{1}{64}(\operatorname{th}^2 h-6+5\operatorname{cth}^2 h)\varepsilon^3\right]\cos\tau+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{256}(21\operatorname{th}^2 h-44-17\operatorname{th}^2 h)\varepsilon^3\cos 3\tau\right\}\cos x+\frac{\varepsilon^2}{4\sqrt{\operatorname{sh}h\operatorname{ch}h}}\times$$

$$\times(\operatorname{th}h-\operatorname{cth}h)\operatorname{ch}(y+h)\sin 2\tau\cos 2x+\frac{\varepsilon^3}{\sqrt{\operatorname{sh}h\operatorname{ch}h}}\left\{\frac{\operatorname{ch}(y+h)}{256}\times\right.$$

$$\times[24\operatorname{cosech}^2 h\cos\tau+(21\operatorname{th}^2 h-48+27\operatorname{cth}^2 h)\cos 3\tau]-$$

$$\left.-8\operatorname{th}h\operatorname{sech}^2 h\cos\tau\right\}\cos 3x+\frac{\varepsilon^2}{8}\sqrt{\operatorname{th}h}\operatorname{cosech}^2 h\tau+$$

$$+\frac{\varepsilon^2}{16}\sqrt{\operatorname{th}h}(3+\operatorname{cth}^2 h)\sin 2\tau$$

$$\sigma=\sqrt{\operatorname{th}h}\left[1+\frac{\varepsilon^2}{64}(\operatorname{th}^2 h-12+3\operatorname{cth}^2 h)\right]$$

Из этого выражения следует, что частота σ возрастает с ростом амплитуды ε, если глубина $h<0.5566$. В противном случае частота уменьшается с ростом амплитуды.

Поступила 14 II 1977

ЛИТЕРАТУРА

1. *Rajappa N. R.* A new approach to the study of standing surface waves of finite amplitude. Acta Mech., 1970, vol. 9. No. 1—2.
2. *Penney W. G., Price A. T.* Finite periodic stationary gravity waves in a perfect liquid. Philos. Trans. Roy. Soc. London. Ser. A., 1952, vol. 244, No. 882.
3. *Lighthill M. J.* A technique for rendering approximate solutions to physical problems uniformly valid. Philos. Mag., 1949, vol. 40, No. 311.
4. *Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В.* Теоретическая гидромеханика, т. 1. М., Физматгиз, 1963.