

К РАСЧЕТУ ХАРАКТЕРИСТИК ВИБРОИСТОЧНИКА,
НАХОДЯЩЕГОСЯ В СЛОЕ ЖИДКОСТИ

Г. В. ТКАЧЕВ

(Ростов-на-Дону)

Рассматривается осесимметричная задача о возбуждении стационарных колебаний слоя идеальной несжимаемой жидкости в поле сил тяжести вибрацией двух круглых пластин, скрепленных по контуру и погруженных в жидкость на некоторую глубину. Слой жидкости со свободной от напряжений верхней границей находится на абсолютно жестком основании.

Соответствующая краевая задача в линейной постановке сводится к решению интегрального уравнения первого рода. Предлагается метод решения этого уравнения, основанный на сведении его к уравнению Фредгольма второго рода с помощью факторизации функций. Получены численные результаты, позволяющие судить о распределении потенциала скоростей на поверхности источника колебаний и определена присоединенная масса источника. Результаты могут быть использованы для расчета и оптимизации параметров морских виброейсмосточников.

1. В области $0 \leq \rho_0 \leq \infty$, $0 \leq \theta < 2\pi$, $-h \leq z \leq 0$ отыскивается решение уравнения Лапласа $\Delta\Phi=0$ для потенциала скоростей $\Phi(\rho_0, \theta, z, t) = \varphi(\rho_0, \theta, z)e^{-i\omega t}$ при граничных условиях $x^{[1, 2]}$.

$$(1.1) \quad \frac{\partial \Phi}{\partial z} + \frac{1}{g} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = 0, \quad z=0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0, \quad z=-h$$

Здесь h — толщина слоя, g — ускорение свободного падения, ω — частота колебаний виброисточника.

Заданы скорости движения верхней $V_1(\rho_0)$ и нижней $V_2(\rho_0)$ пластин источника колебаний радиуса R ($0 \leq \rho_0 \leq R$), расположенного в плоскости $z=-c$ ($0 \leq c \leq h$).

Методом интегральных преобразований $^{[3]}$ с учетом излучения на бесконечность $^{[4-6]}$ краевая задача сводится к решению интегрального уравнения в цилиндрических координатах вида

$$(1.2) \quad \int_0^1 T(r) k(r, \rho) r dr = f(\rho), \quad 0 \leq \rho \leq 1$$

$$k(r, \rho) = \int_0^1 K(u) J_0(u\rho) J_0(ur) u du$$

$$f(\rho) = R \int_0^1 F(r) r dr \int_0^1 \psi(u) J_0(u\rho) J_0(ur) u du - R V_1(\rho)$$

$$K(u) = \frac{u \operatorname{sh}(u(H-C)) (\chi^2 \operatorname{ch}(uC) - u \operatorname{sh}(uC))}{\chi^2 \operatorname{ch}(uH) - u \operatorname{sh}(uH)}$$

$$\psi(u) = \frac{\operatorname{ch}(u(H-C)) (\chi^2 \operatorname{ch}(uC) - u \operatorname{sh}(uC))}{\chi^2 \operatorname{ch}(uH) - u \operatorname{sh}(uH)}$$

Здесь $T(r)e^{-i\omega t}$ — разность потенциалов скоростей верхней и нижней пластин источника колебаний, $F(r) = V_1(r) - V_2(r)$, $C = c/R$, $H = h/R$, $\kappa^2 = \omega^2 R/g$, $J_0(z)$ — функция Бесселя.

Контур Γ лежит в правой полуплоскости и совпадает с действительной осью всюду, кроме вещественных нулей и полюсов функций $K(u)$ и $\psi(u)$, которые обходит снизу.

Функция $K(u)$ четная, вещественная на вещественной оси, аналитическая в комплексной плоскости, имеет два вещественных нуля $\pm t_1$ и два вещественных полюса $\pm z_1$, при $u \rightarrow \infty$ растет, как $|u|^1$. Чтобы свести интегральное уравнение (1.2) к уравнению с убывающей подынтегральной функцией ядра, введем функции

$$\begin{aligned} K^*(u) &= u^{-2}K(u) \\ f^*(\rho) &= R \int_0^1 r dr \left[F(r) \int_{\Gamma} (\psi(u)J_0(u\rho) - J_0(u)e^{-\lambda|u|})J_0(ur) \frac{du}{u} - \right. \\ (1.3) \quad & \left. - RV_1(r) \int_0^{\infty} (J_0(u\rho) - J_0(u)e^{-\lambda|u|})J_0(ur) \frac{du}{u} \right] \\ P(\rho) &= \int_0^1 T(r)r dr \int_{\Gamma} K^*(u)J_0(u\rho)J_0(ur)u du - f^*(\rho) \end{aligned}$$

Параметр λ ($\text{Re } \lambda > 0$) будет определен позднее.

Из (1.2) следует, что $P(\rho)$ удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\Delta P = 0$$

Здесь Δ — оператор Лапласа в цилиндрических координатах.

Решением этого уравнения будет функция

$$P(\rho) = A + B \ln \rho$$

Постоянную B следует положить равной нулю в силу ограниченности решения в центре виброисточника. Константа A находится из условия равенства нулю разности потенциалов на краях источника колебаний.

Таким образом, исходная краевая задача сведена к решению следующего интегрального уравнения:

$$\begin{aligned} (1.4) \quad & \int_0^1 T(r)r dr \int_{\Gamma} K^*(u)J_0(u\rho)J_0(ur)u du = q(\rho), \quad 0 \leq \rho \leq 1 \\ & q(\rho) = f^*(\rho) + A \end{aligned}$$

Функция $K^*(u)$ убывает при $u \rightarrow \infty$, как u^{-1} .

В соответствии с перечисленными выше свойствами подынтегральной функции ядра $K^*(u)$ уравнение (1.4) попадает в класс уравнений, исследованных в [7], и выполняются условия теорем существования и единственности решения.

В силу линейности уравнения (1.4) его решение отыскивается в виде суммы

$$T(r) = T_1(r) + T_2(r)$$

решений двух интегральных уравнений вида (1.4) для $T_1(r)$ и $T_2(r)$ при $q(\rho) = f^*(\rho)$ и $q(\rho) = A$ соответственно.

Методами работы [7] функции $T_j(r)$ представимы в виде

$$(1.5) \quad T_j(r) = \int_0^{\infty} J_0(ur) \frac{G_j(u)}{K^*(u)} u du + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_-} \frac{I_0(itr) X_j(t)}{I_0(it) K_+(t)} dt, \quad j=1, 2$$

Здесь $K_+(u)$ и $K_-(u)$ — функции, регулярные и не имеющие нулей соответственно выше и ниже контура Γ_0 . Эти функции — результат факторизации $K^*(u)$ относительно контура Γ_0 , $K^*(u) = K_+(u)K_-(u)$, $K_+(-u) = K_-(u)$, функции $G_j(u)$ ($j=1, 2$) являются преобразованиями Бесселя от $q_j(u)$ ($j=1, 2$), функции $X_j(t)$ ($j=1, 2$) мероморфны в нижней полуплоскости и находятся из однозначно разрешимого уравнения

$$(1.6) \quad \begin{aligned} X_j + NX_j &= D_j, \quad j=1, 2 \\ NX_j &= \frac{1}{4\pi^2} \int_{\Gamma_0} \frac{K_+(t)}{t-z} dt \int_{\Gamma} \frac{X_j(u) R_1(u, t)}{K_+(u) (t^2 - u^2)} du \\ D_j(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_0} \frac{K_+(t)}{z-t} dt \int_0^{\infty} q_j(r) r dr \int_0^{\infty} \frac{I_0(iry) I_0(iy) R_2(y, t)}{K^*(y) (t^2 - y^2)} y dy \\ R_1(u, t) &= t \left(\frac{K_1(it)}{K_0(it)} - 1 \right) + u \left(\frac{I_1(iu)}{I_0(iu)} - 1 \right), \\ R_2(y, t) &= t \frac{K_1(it)}{K_0(it)} + y \frac{I_1(iy)}{I_0(iy)} \end{aligned}$$

в котором $K_0(z)$, $K_1(z)$, $I_0(z)$, $I_1(z)$ — соответственно функции Макдональда и модифицированные функции Бесселя [8], контур Γ_0 совпадает с вещественной осью и обходит вещественные положительные нули и полюсы $K^*(u)$ снизу, а отрицательные — сверху. Все нули функции Бесселя $I_0(iz)$ контуром Γ_0 также обходятся снизу. Контур Γ_- расположен ниже соответственно контура Γ_0 , но так, что между ними подынтегральная функция регулярна, координата z — ниже Γ_- .

По найденной разности потенциалов $T(r)$ на границах источника колебаний определяется поле потенциала во всем слое жидкости по формуле

$$(1.7) \quad \begin{aligned} \varphi(\rho, z) &= \int_{\Gamma} L(u, z) J_0(u\rho) u du \int_0^1 M(u, r) J_0(ur) r dr \\ -c \leq z \leq 0, \quad L(u, z) &= \frac{u \operatorname{ch}(uZ) + \kappa^2 \operatorname{sh}(uZ)}{\kappa^2 \operatorname{ch}(uH) - u \operatorname{sh}(uH)} \\ M(u, r) &= RF(r) \frac{\operatorname{ch}(u(H-C))}{u} - T(r) \operatorname{sh}(u(H-C)) \\ -h \leq z < -c, \quad L(u, z) &= \frac{\operatorname{ch}(u(H-Z))}{\kappa^2 \operatorname{ch}(uH) - u \operatorname{sh}(uH)} \\ M(u, r) &= RF(r) \frac{u \operatorname{ch}(uC) - \kappa^2 \operatorname{sh}(uC)}{u} + T(r) (u \operatorname{sh}(uC) - \kappa^2 \operatorname{ch}(uC)) \\ Z &= z/R \end{aligned}$$

Имеет смысл приближенно ввести понятие присоединенной массы m всего источника колебаний [1] (для отдельного элемента источника присоединенная масса определяется точно). Тогда для случая асинхронных колебаний пластин виброисточника присоединенная масса определится следующим образом

$$(1.8) \quad m = -\frac{2\pi\rho R^2}{a} \left[R \int_0^1 F(r)r dr \int_{\Gamma} M_1(u) J_0(ur) J_1(u) du - \int_0^1 T(r)r dr \int_{\Gamma} M_2(u) J_0(ur) J_1(u) du \right]$$

$$(1.9) \quad M_1(u) = \frac{2 \operatorname{ch}(u(H-C)) (u \operatorname{ch}(uC) - \kappa^2 \operatorname{sh}(uC))}{u(\kappa^2 \operatorname{ch}(uH) - u \operatorname{sh}(uH))}$$

$$M_2(u) = \frac{\kappa^2 \operatorname{ch}(u(H-2C)) + u \operatorname{sh}(u(H-2C))}{\kappa^2 \operatorname{ch}(uH) - u \operatorname{sh}(uH)}$$

$$a = \frac{1}{\pi R^2} \int_0^{2\pi} \int_0^R V(r)r dr d\theta$$

Здесь ρ — плотность жидкости.

2. При приближенном решении интегрального уравнения (1.4) проводится аппроксимация функции $K^*(u)$ выражением

$$(2.1) \quad K^*(u) = \prod_{k=1}^n \frac{(u^2 - t_k^2)(u^2 - z_k^2)^{-1}}{\sqrt{u^2 + b^2}}$$

Здесь $b > 0$ — произвольный параметр.

Стремление строить эффективные приближенные решения диктует выбор величины b возможно большей, однако чрезмерно большие значения b ведут к ухудшению погрешности аппроксимации (2.1) и увеличению порядка n . При численных расчетах полагали $b=10$.

Деформируем в (1.5) контур Γ_- вниз до точки ветвления $u=-ib$ и пренебрежем при этом интегралом по деформированному контуру в силу его малости. По теории вычетов находим

$$(2.2) \quad T_j(r) = \int_0^{\infty} J_0(ur) \frac{G_j(u)}{K^*(u)} u du + \sum_{l=1}^n Y(r, t_l) X_j(t_l), \quad j=1, 2$$

Значения $X_j(t_l)$ определяем из алгебраической системы, полученной из (1.6) аналогичной деформацией контуров Γ_0 и Γ_- до точки ветвления $u=-ib$

$$(2.3) \quad X_j(t_s) + \sum_{l=1}^n \sum_{k=1}^n S(t_s, t_l, z_k) X_j(t_l) = D_j(t_s), \quad j=1, 2; \quad s=1, 2, \dots, n$$

Здесь $Y(r, t_l)$, $S(t_s, t_l, z_k)$ — вычеты от соответствующих подынтегральных функций, взятые в нулях t_l и полюсах z_k функции $K_+(u)$, лежащих в нижней полуплоскости. Интегралы по деформированным контурам в (2.2) и (2.3) представляют собой операторы с нормой порядка $O(b^{-2})$ и являются малыми. Вычеты от подынтегральной функции представляют собой вырожденную составляющую оператора N в (1.6).

Рассматривался случай асинхронных колебаний пластин виброисточника, при этом считалось, что

$$V_1(r) = J_0(\gamma_k r), \quad F(r) = 2V_1(r) = 2J_0(\gamma_k r)$$

где γ_k — нули функции Бесселя $J_0(z)$.

В этом случае, используя свойства преобразований Бесселя и таблицы интегралов от произведений бesselевых функций [8], выражения для $D_j(z)$ ($j=1, 2$) можно представить в виде

$$D_1(z) = \frac{R}{2\pi i} \int_{\Gamma_0} \frac{K_+(t)}{z-t} dt \int_{\Gamma} R_0(u) R_{01}(u, t) du$$

$$D_2(z) = \frac{A}{2\pi i} \int_{\Gamma_0} \frac{K_+(t)}{z-t} \frac{K_1(it)}{tK_0(it)(H-C)} dt$$

$$R_0(u) = \frac{\gamma_k J_1(\gamma_k) J_0(u) - u J_1(u) J_0(\gamma_k)}{(\gamma_k^2 - u^2) u e^{\lambda|u|}}$$

$$R_{01}(u, t) = \frac{u(x^2 \operatorname{ch}(u(H-2C)) + u \operatorname{sh}(u(H-2C))) e^{\lambda|u|}}{\operatorname{sh}(u(H-C)) (x^2 \operatorname{ch}(uC) - u \operatorname{sh}(uC))} \times$$

$$\times \frac{tK_1(it)J_0(u) + iuK_0(it)J_1(u)}{(u^2 - t^2)K_0(it)} + \frac{K_1(it)J_0(u)}{(H-C)tK_0(it)}$$

Здесь контур Γ_0 лежит ниже Γ , параметр λ выбирается следующим образом:

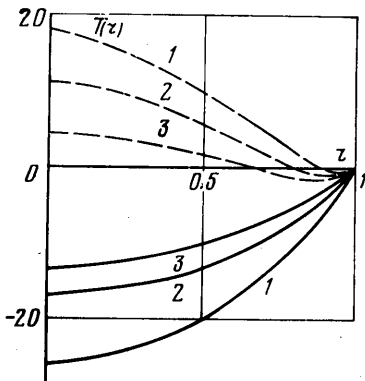
$$\lambda = \begin{cases} 2C, & H \geq 2C \\ 2(H-C), & H < 2C \end{cases}$$

Деформируя контур Γ_0 в D_1 и D_2 вниз до точки ветвления $t = -ib$, пренебрегаем интегралом по деформированному контуру и заменяем далее исходный интеграл суммой вычетов подынтегральной функции в полюсах z_k функции $K_+(t)$, лежащих в нижней полуплоскости.

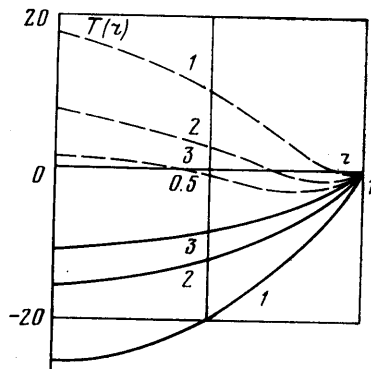
Функция $e^{\lambda|u|}$ в $R_0(u)$ является аналитической во всей комплексной плоскости с разрезами вдоль мнимой оси от 0 до $+i\infty$ и $-i\infty$. Наличие этих разрезов не дает возможности деформировать контур Γ и заменить интеграл по этому контуру суммой вычетов, как это делалось выше. Этот интеграл по криволинейному контуру вычислялся на ЭЦВМ, причем в силу экспоненциального убывания подынтегральной функции процесс вычисления интеграла быстро сходиллся.

Аналогично по квадратурным формулам считаются интегралы в формулах для присоединенной массы (1.8) источника колебаний.

Численный расчет амплитудной функции разности потенциалов для разных частот ω и глубин s погружения источника колебаний в жидкость проведен на ЭЦВМ.



Фиг. 1



Фиг. 2

Характерные графики распределения комплексной разности потенциалов $T(r)$ ($0 \leq r \leq 1$) вдоль приведенного радиуса r источника колебаний приведены на фиг. 1, 2. Графики вещественной части представлены сплошными, мнимой — пунктирными линиями. Цифрам 1–3 на фиг. 1 соответствуют графики $T(r)$ для частот $2\pi\omega = 2, 1.8, 1.6$ гц при глубине погружения источника $c/h = 0.01$. Цифрам 1–3 на фиг. 2 соответствуют графики $T(r)$ для $c/h = 0.01, 0.012, 0.014$ при частоте $2\pi\omega = 2$ гц. Следует отметить, что предложенный метод применим и для низких и для высоких частот.

Автор благодарит В. А. Бабешко за внимание к работе и ценные советы.

Поступила 11 VII 1977

ЛИТЕРАТУРА

1. Лойцянский Л. Г. Механика жидкости и газа. М., «Наука», 1973.
2. Кошляков Н. С., Глинер Э. Б., Смирнов М. М. Уравнения в частных производных математической физики. М., «Высшая школа», 1970.
3. Уфлянд Я. С. Интегральные преобразования в задачах теории упругости Л., «Наука», 1967.
4. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. М., «Наука», 1972.
5. Свеешников А. Г. Принцип предельного поглощения для волновода. Докл. АН СССР, 1951, т. 80, № 3.
6. Бабешко В. А. Об условиях излучения для упругого слоя. Докл. АН СССР, 1973, т. 213, № 3.
7. Бабешко В. А. Новый эффективный метод решения динамических контактных задач. Докл. АН СССР, 1974, т. 217, № 4.
8. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции, т. 2. М., «Наука», 1974.