

К ЗАДАЧЕ ОБТЕКАНИЯ ТЕЛА С ОБРАЗОВАНИЕМ РАЗВИТОЙ СТАЦИОНАРНОЙ ОТРЫВНОЙ ЗОНЫ ПРИ $Re \rightarrow \infty$

В. В. КОЛОСОВ, Э. Г. ШИФРИН

(Москва)

Обсуждается постановка задачи «в целом» об обтекании тела несжимаемой жидкостью с образованием замкнутой стационарной зоны отрыва при $Re \rightarrow \infty$. Используется схема, основанная на методе сращиваемых асимптотических разложений [1]. В соответствии с [1] предполагается, что отрывная зона является развитой (т. е. не дробится бесконечно и не исчезает при $Re \rightarrow \infty$) и течение в ней обладает определенной степенью регулярности по числу Re .

Сделанные предположения позволяют воспользоваться теоремой Прандтля — Бэтчелора [2], согласно которой для области циркуляционного течения при $Re \rightarrow \infty$ предельным является вихревое течение невязкой жидкости с постоянной завихренностью ω . В этой связи основу для построения сращиваемых асимптотических разложений составляет вихрепотенциальная задача (задача определения функции тока ψ , удовлетворяющей уравнению $\Delta\psi=0$ в области поступательного движения и уравнению $\Delta\psi=\omega$ в некоторой, заранее неизвестной области циркуляционного движения).

В общем случае решение вихрепотенциальной задачи зависит от двух параметров: величин полного давления p_0 и завихренности ω в отрывной зоне. Эти же параметры входят в условия сращивания решений первого и второго приближений пограничного слоя (на границе отрывной зоны при конечных числах Re) с соответствующими решениями для невязкого течения. В настоящей работе показано, что условия сращивания циклического пограничного слоя с внешним поступательным потоком являются теми дополнительными связями, которые позволяют замкнуть задачу в целом.

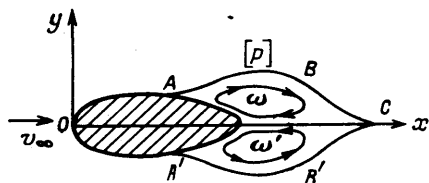
Таким образом, при решении методом сращиваемых асимптотических разложений задачи об обтекании тела с образованием замкнутых стационарных зон отрыва необходимо совместное рассмотрение не менее двух приближений.

Рассмотрим симметричное отрывное обтекание заданного профиля поступательным потоком со скоростью на бесконечном удалении v_∞ . Будем предполагать, что отрывная зона состоит из одной области циркуляционного движения (вообще говоря, их может быть любое конечное число). В силу симметрии ограничимся рассмотрением верхней полуплоскости (фиг. 1. ($\omega' = -\omega$)). Точка отрыва A является точкой ветвления линии тока $\psi=0$ (ветвь ABC разделяет области поступательного и циркуляционного течений). При переходе через разделяющую линию тока ABC скачком меняется завихренность течения, а в общем случае и величина полного давления p_0 . Условие непрерывности давления вдоль ABC совместно с интегралом Бернулли позволяет связать величины тангенциального разрыва скорости и скачка полного давления $[p_0]$. Таким образом, параметрами задачи здесь являются ω , $[p_0]$, а также положения точек «отрыва» A и «присоединения» C поступательного потока.

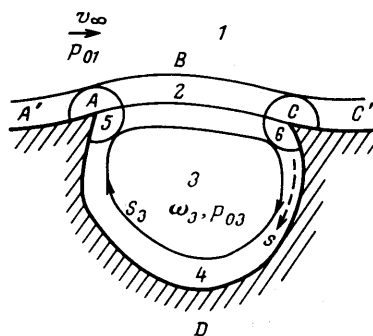
Вихрепотенциальная задача, соответствующая описанному выше случаю обтекания тела, пока еще не изучена. К настоящему времени известно лишь небольшое число работ по вихрепотенциальным течениям. Так, в [3-5] исследовалось обтекание впадины (фиг. 2) в предположении, что полное давление непрерывно во всем поле течения, а концевые точки разделяющей линии тока совпадают с точками излома контура стенки. В [6, 7]

рассматривалось обтекание потенциальным потоком дважды симметричной (относительно горизонтальной и вертикальной осей) области постоянной завихренности, полное давление в которой либо совпадает с полным давлением во внешнем потоке, либо отлично от него.

В этом случае параметрами задачи были величины ω и $\Delta = [p_0]/v_\infty^2$, так как вследствие отсутствия физического характерного размера положения точек A и C (на оси абсцисс) можно задать заранее. Задача решалась численно, методом последовательных приближений. Граничная линия тока $y(x)$ ($\psi=0$) и интенсивность вихревой пелены $\Gamma(x)$ на ней определялись системой двух интегродифференциальных уравнений, параметрически зависящих от ω и Δ . Условия в точках A и C (эти точки являются критическими для вихревого течения) использовались для установления связи между параметрами: $\omega=f(\Delta)$. Следует отметить, что вследствие симметрии вихревой области относительно вертикальной оси условие в точке C не



Фиг. 1



Фиг. 2

давало новой информации. (Как указывалось в [7], в случае несимметричной области условие в точке C играет роль условия разрешимости задачи.)

Решение в [7] удалось получить лишь до некоторого значения Δ° . Для $\Delta < \Delta^\circ$ все неизвестные находятся однозначно (при заданном Δ), а при $\Delta > \Delta^\circ$ итерационный процесс расходился при любых начальных приближениях $y(x)$, $\Gamma(x)$. Это означает, что либо Δ° — точка ветвления решений задачи, либо для $\Delta > \Delta^\circ$ решение не существует. Возможно также, что выбранный в [6, 7] метод решения неприменим при $\Delta > \Delta^\circ$.

Таким образом, основной результат [6, 7] состоит в получении однозначных зависимостей вида $y=F_1(x; \omega, \Delta)$, $\Gamma=F_2(x; \omega, \Delta)$, $0 < \Delta < \Delta^\circ$. Подчеркнем еще раз, что заранее известные координаты конечных точек определяют связь $\omega=f(\Delta)$, в силу чего можно сформулировать результаты в однопараметрическом виде: $y=f_1(x; \Delta)$, $\Gamma=f_2(x; \Delta)$, $\omega=f(\Delta)$.

Результаты [6, 7] позволяют в общих чертах проанализировать и вихрепотенциальную задачу, соответствующую симметричному отрывному обтеканию заданного профиля. Путем конформного отображения внешности профиля на плоскость с разрезом вдоль некоторого отрезка можно прийти к задаче, близкой [7]. При этом отображении отрывная зона преобразуется в область (вообще говоря, несимметричную относительно вертикальной оси), опирающуюся на отрезок оси абсцисс. Функция тока внутри этой области должна будет удовлетворять уравнению $\Delta\psi = -\omega J$, где J — якобиан конформного преобразования; J войдет также в условие непрерывности давления на разделяющей линии тока.

Существенным отличием такой задачи от рассмотренной в [7] является то, что положение конечных точек на образе контура профиля не может быть задано. Это, по-видимому, приведет к тому, что решения вихрепотенциальной задачи окажутся функциями уже двух параметров: $y=f_1(x; \omega, \Delta)$, $\Gamma=f_2(x; \omega, \Delta)$. Положения точек A , C также будут предстать как двух-

параметрическими семействами $x_A = f_3(\omega, \Delta)$, $x_C = f_4(\omega, \Delta)$ при $\omega_0 \leq \omega \leq \omega_1$, $\Delta_0 \leq \Delta \leq \Delta_1$. (Постоянные ω_0 , ω_1 , Δ_0 и Δ_1 определяются как условиями разрешимости задачи, так и условиями получения приемлемой формы области: граничная линия тока должна быть кривой без самопересечений, опирающейся на отрезок оси x , начальная точка которого должна лежать внутри образа профиля.)

Величины параметров ω и Δ в функциональных связях f_i , $i=1, \dots, 4$, можно определить, вводя в рассмотрение пограничные слои на поверхности тела и разделяющей линии тока (линии тангенциального разрыва) и предполагая число Re достаточно большим. Как показано ниже, рассмотрение краевой задачи для циклического пограничного слоя в двух приближениях дает принципиальную возможность замкнуть задачу.

Впервые, по-видимому, попытка использовать информацию из теории пограничного слоя для замыкания задачи в целом была предпринята в [1], где в качестве примера рассматривалось обтекание произвольной впадины в стенке двумерным потоком вязкой несжимаемой жидкости. Эта же задача послужила основой данной работы. (Следует отметить, что краевые задачи для циклического пограничного слоя для случаев обтекания тела или обтекания впадины различаются несущественно. Поэтому качественные результаты, полученные ниже, могут быть применены и к задаче обтекания тела.)

Следуя [1], картину обтекания впадины представим следующим образом (фиг. 2). Линия тока ABC отделяет внешний поступательный поток (область 1) от циркуляционного течения во впадине (область 3), причем предполагается, что линия ABC опирается на «кромки» впадины A и C . Кроме того, предполагается, что полные давления в областях 1 и 3 различны, так что разделяющая линия тока касается стенок $A'A$ и CC' (т. е. точки A и C являются критическими только для течения в циркуляционной зоне).

На стенках впадины нарастает пограничный слой (область 4), а возникающий на линии ABC тангенциальный разрыв скорости размывается в слое смещения (область 2). Течение в областях 2 и 4 описывается уравнениями первого приближения теории пограничного слоя. Наконец, особо выделяются малые окрестности угловых точек (области 5 и 6), течение в которых должно описываться системой полных уравнений Навье — Стокса.

Для отыскания величины завихренности ω_3 в [1] используется теорема сохранения количества движения в кольцевом слое L вязкого течения, ограниченного контуром $ABCD$ и границей S_3 области 3. В результате получается интегральное условие, выражающее баланс сил трения на границах области L , которое, по мнению авторов, и позволяет определить ω_3 .

Однако это интегральное условие можно рассматривать как результат применения формулы Грина к уравнениям пограничного слоя в области L , и, следовательно, ему должны удовлетворять все решения этих уравнений (при любых ρ_{03} и ω_3 из диапазона существования решений). Это легко проследить на следующем примере.

Пусть по известному решению задачи для некоторого $\omega_3 \neq 0$ ищется решение для $\omega_3' = \omega_3 + \omega$, где $\omega \ll \omega_3$. Тогда регулярные разложения тангенциальной и нормальной компонент скорости в областях 2 и 4 по параметру ω имеют соответственно вид

$$(1) \quad u(s, N) = u_1(s, N) + \omega u_2(s, N) + \dots$$

$$V(s, N) = V_1(s, N) + \omega V_2(s, N) + \dots, \quad N = n/\varepsilon$$

(здесь s — текущая длина контура $ABCD$, отсчитываемая от произвольной начальной точки, n — длина текущей нормали к этому контуру, внешней по отношению к области 3, $\varepsilon = Re^{-1/2}$).

Подставляя (1) в интегральное условие работы [1]

$$(2) \quad \oint_{ABCD A} u_N ds + \oint_{S_3} u_3(s, 0) \lim_{N \rightarrow -\infty} (V - Nu_s) ds = 0$$

получим

$$(3) \quad \begin{aligned} & \oint_{ABCD A} u_{1N} ds + \oint_{S_3} u_{31}(s, 0) \lim_{N \rightarrow -\infty} (V_1 - Nu_{1s}) ds + \\ & + \omega \left\{ \oint_{ABCD A} u_{2N} ds + \oint_{S_3} [u_{31}(s, 0) \lim_{N \rightarrow -\infty} (V_2 - Nu_{2s}) + \right. \\ & \left. + u_{32}(s, 0) \lim_{N \rightarrow -\infty} (V_1 - Nu_{1s})] ds \right\} = 0 \end{aligned}$$

Первые два интеграла (члены главного приближения) зависят только от решения задачи при $\omega_3' = \omega_3$. В силу (2) их сумма должна быть равна нулю. Отсюда следует, что равенство (3) справедливо при любом $\omega \neq 0$.

Отметим, что для случая $\omega_3 \ll 1$ применять метод регулярного разложения по малому параметру нельзя, поскольку основное решение при $\omega_3 = 0$ соответствует покою жидкости во впадине, что в свою очередь возможно лишь при бесконечной длине дуги CDA [1]. Таким образом, в окрестности $\omega_3 = 0$ бесконечно малым изменениям параметра ω соответствует бесконечно большое изменение длины контура CDA , и следовательно, разложение (1) становится нерегулярным.

Приведенные выше соображения сделали необходимым более подробно исследовать течение во впадине, чтобы выявить связи между параметрами задачи, обусловленные вязкостью жидкости.

Введем на фиг. 2 координаты пограничного слоя $s, N = n/\epsilon$ (s — текущая длина дуги контура $ABCD A$, отсчитываемая от точки A , n — длина текущей нормали к этому контуру, внешней по отношению к области \mathcal{Z} , $\epsilon = Re^{-1/2}$). В этих координатах вследствие цикличности течения во впадине области 2 соответствуют полосы $\{ks_A \leq s \leq ks_A + s_c, -\infty \leq N \leq +\infty, k=0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$, области 4 — полуполосы $\{ks_A + s_c < s < (k+1)s_A, -\infty \leq N \leq 0\}$, а стенке впадины — полуполосы $\{ks_A + s_c < s < (k+1)s_A, 0 < N \leq +\infty\}$ заштрихованы на фиг. 3). Получившуюся в итоге плоскость (s, N) с выброшенными (заштрихованными) вертикальными полуполосами назовем областью σ .

Представим безразмерные касательную u , нормальную v составляющие скорости и давление p в виде асимптотических разложений по ϵ

$$\begin{aligned} u(s, n; \epsilon) &= u_1(s, N) + \epsilon u_2(s, N), & v(s, n; \epsilon) &= \epsilon v_1(s, N) + \epsilon^2 v_2(s, N), \\ p(s, n; \epsilon) &= p_1(s, N) + \epsilon p_2(s, N) \end{aligned}$$

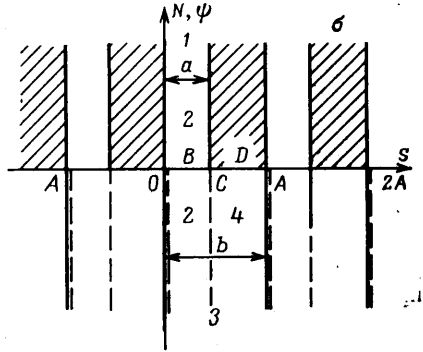
Подставляя эти разложения в уравнения движения и отбрасывая члены порядка ϵ^2 и выше, получим [8]

$$(4) \quad u_1 u_{1s} + v_1 u_{1N} + p_{1s} - u_{1NN} + \epsilon (u_2 u_{1s} + u_1 u_{2s} - \kappa N u_1 u_{1s} + v_2 u_{1N} + v_1 u_{2N} + \kappa u_1 v_1 - \kappa N p_{1s} + p_{2s} - u_{2NN} - \kappa u_{1N}) = 0$$

$$(5) \quad \epsilon p_{2N} = \epsilon \kappa u_1^2$$

$$(6) \quad u_{1s} + v_{1N} + \epsilon (u_{2s} + v_{2N} + \kappa N v_{1N} + \kappa v_1) = 0$$

где $\kappa(s)$ — кривизна линий тока невязкого течения (контура $ABCD A$).



Фиг. 3

Заметим, что равенства нулю в (4)–(6) — это равенства нулю сумм членов разложения уравнений Навье — Стокса по степеням ε , имеющим порядок ε^2 и выше. Учтявая это, добавим в (6) внепорядковые члены $\kappa \varepsilon^2 N v_{2N}$ и $\kappa \varepsilon^2 v_2$ и обозначим $u_1 + \varepsilon u_2 = U$, $(1 + \kappa \varepsilon N)(v_1 + \varepsilon v_2) = V$. Тогда (6) преобразуется в $U_s + V_N = 0$. Если ввести теперь функцию тока ψ : $\psi_N = U$, $-\psi_s = V$ и перейти к переменным Мизеса (s, ψ) , то (4)–(6) сведется к одному уравнению в частных производных второго порядка параболического типа

$$(7) \quad \frac{\partial (u_1^2/2)}{\partial s} + \varepsilon \frac{\partial u_2}{\partial s} = u_1 \frac{\partial^2 (u_1^2/2)}{\partial \psi^2} + f_1(s) + \\ + \varepsilon \left[u_1 \frac{\partial^2 u^2}{\partial \psi^2} + b(u_{1\psi}) \frac{\partial u^2}{\partial \psi} + d(u_1, u_{1\psi}, u_{1\psi\psi}) u_2 + g(s, \psi, u_{1\psi}) \kappa + f_2(s) \right]$$

где $f_1(s)$, $f_2(s)$ определяются лишь параметрами течения при $\psi \rightarrow +\infty$. Члены порядка единицы в полученном уравнении — хорошо известная форма Мизеса уравнений пограничного слоя, поэтому (7) можно рассматривать как обобщение уравнения Мизеса на случай двух приближений теории пограничного слоя.

Особенности постановки краевой задачи для уравнения (7) в области σ изучим на следующем примере.

Пусть в σ ищется ограниченное решение модельной краевой задачи

$$(8) \quad w_s = w_{\psi\psi}$$

$$(9) \quad w(k s_A, \psi) = f(\psi), \quad \psi \geq 0; \quad w(s, 0) = 0, \quad k s_A + s_C \leq s \leq (k+1) s_A$$

$$(10) \quad w[(k+1) s_A, \psi] = w(k s_A, \psi), \quad \psi < 0; \quad |w(s, \psi)| < \infty$$

где $f(\psi)$ — известная, ограниченная при $\psi \rightarrow +\infty$ функция.

Сведем (8)–(10) к интегральному уравнению. Обозначим длины отрезков $[k s_A, k s_A + s_C]$ и $[k s_A, (k+1) s_A]$ соответственно a и b . (Здесь величина $(b-a)$ — длина контура твердой стенки, величина a определяется в главном приближении как длина свободной границы в невязкой жидкости.)

Для значений $\psi < 0$ воспользуемся решением уравнения теплопроводности (8), удовлетворяющим граничным условиям, заданным для всех $s > -\infty$ (задача без начальных условий)

$$(11) \quad w(s, \psi) = (4\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^s \psi (s-\tau)^{-1/2} \exp \left[-\frac{\psi^2}{4(s-\tau)} \right] w(\tau, 0) d\tau$$

В рассматриваемом случае

$$(12) \quad w(\tau, 0) = 0, \quad k b + a \leq \tau < (k+1) b; \quad w(\tau, 0) = \mu(\tau), \quad k b < \tau < a + k b, \\ k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

граничное условие с неизвестной пока ограниченной функцией $\mu(s)$, которую будем предполагать непрерывной на интервале $(k b, k b + a)$. Воспользуемся периодичностью граничного условия и, положив $s=0$, представим (11) в виде

$$(13) \quad \varphi(\psi) \equiv w(0, \psi) = (4\pi)^{-1/2} \psi \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^a \mu(\tau) \Phi_k(\tau; \psi) d\tau = \\ = (4\pi)^{-1/2} \psi \int_0^a \mu(\tau) \sum_{k=1}^{\infty} \Phi_k(\tau; \psi) d\tau \\ \Phi_k(s) \equiv (k b - s)^{-1/2} \exp \left[-\frac{\psi^2}{4(k b - s)} \right]$$

(перемена порядка суммирования и интегрирования оправдана предположением о непрерывности $\mu(s)$ и оценкой, равномерной относительно τ ,

$$(14) \quad |\mu(s) \Phi_k(\tau; \psi)| \leq M_1 (kb-a)^{-1/2} \exp \left[-\frac{\psi^2}{4(kb-a)} \right], \quad M_1 = \max_{s \in [0, a]} |\mu(s)|$$

Из граничных условий $w(0, \psi) = f(\psi)$ при $\psi \geq 0$. Поэтому по формуле Пуассона в полосе $\{0 \leq s \leq a, |\psi| < \infty\}$ решение (8) - (10) имеет вид

$$(15) \quad w(s, \psi) = (4\pi s)^{-1/2} \left(\int_{-\infty}^0 \exp \left[-\frac{(\psi-\xi)^2}{4s} \right] \varphi(\xi) d\xi + \right. \\ \left. + \int_0^{+\infty} \exp \left[-\frac{(\psi-\xi)^2}{4s} \right] f(\xi) d\xi \right)$$

В силу определения функции $\varphi(\psi)$ и оценки (14) первый из интегралов в (15) сходится равномерно относительно τ и ψ . Меняя порядок интегрирования по ξ и τ и суммирования по ξ , получаем из (15) при $\psi=0$ искомое интегральное уравнение

$$(16) \quad w(s, 0) = \mu(s) = (4\pi)^{-1} \int_0^a K(s, \tau; b) \mu(\tau) d\tau + q(s)$$

$$(17) \quad K(s, \theta; b) \equiv \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^{+\infty} s^{-1/2} \xi (kb-\theta)^{-1/2} \exp \left[-\frac{\xi^2}{4} \left(\frac{1}{s} + \frac{1}{kb-\theta} \right) \right] d\xi \\ q(s) \equiv (4\pi s)^{-1} \int_0^{+\infty} f(\xi) \exp \left[-\frac{\xi^2}{4s} \right] d\xi$$

Из (17) ясно, что

$$(18) \quad K(s, \theta; b) = 2\sqrt{s} \sum_{k=1}^{\infty} (kb-\theta)^{-1/2} (kb-\theta+s)^{-1} < M_2 \sqrt{s}$$

т.е. интегральный оператор (16) - непрерывен, а следовательно на полуинтервале $[kb, kb+a]$ непрерывна и функция $\mu(s)$. В силу (18) норма ядра $K(s, \theta; b)$ ограничена в $L_2(\sigma)$, поэтому (16) - уравнение Фредгольма второго рода.

Покажем, что уравнение (16) имеет единственное решение при любых a и b . Для этого оценим величину спектрального радиуса $\rho(K)$ оператора K , задаваемого ядром (18). Воспользуемся оценкой [9] ($K^{(m)}$ - m -е итерированное ядро)

$$\rho(K) \leq \max_{s \in [0, a]} \sqrt[m]{\int_0^a K^{(m)}(s, \tau) d\tau} \\ K^{(m)}(s, \tau) \equiv \int_0^a \dots \int_0^a K(s, \tau_1) K(\tau_1, \tau_2) \dots K(\tau_{m-1}, \tau) d\tau_1 \dots d\tau_{m-1}$$

Отметим прежде всего, что

$$\sqrt{\tau} \int_0^a \sum_{k=1}^{\infty} (kb-\tau_p)^{-1/2} (kb-\tau_p+\tau)^{-1} d\tau_p = \\ = 2 \sum_{k=1}^{\infty} \left[\arctg \sqrt{\frac{kb}{\tau}} - \arctg \sqrt{\frac{kb-a}{\tau}} \right] \leq \\ \leq 2 \sum_{k=1}^{\infty} \left[\arctg \sqrt{\frac{kb}{a}} - \arctg \sqrt{\frac{kb-a}{a}} \right]$$

Поэтому функция $K^{(m)}(s, \tau)$ допускает оценку

$$\begin{aligned} K^{(m)}(s, \tau) &= 2^m \sqrt{s} \int_0^a \dots \int_0^a \left[\sum_{h=1}^{\infty} (kb - \tau_h)^{-1/2} (kb - \tau_h + s)^{-1} \right] \times \\ &\times \sqrt{\tau_1} \left[\sum_{h=1}^{\infty} (kb - \tau_2)^{-1/2} (kb - \tau_2 + \tau_1)^{-1} \right] \times \dots \\ &\times \sqrt{\tau_{m-1}} \left[\sum_{h=1}^{\infty} (kb - \tau)^{-1/2} (kb - \tau + \tau_{m-1})^{-1} \right] d\tau_1 \dots d\tau_{m-1} \leq \\ &\leq 8^m F(s) [F(a)]^{m-2} \sum_{h=1}^{\infty} (kb - \tau)^{-1/2} (kb - \tau + a)^{-1} \\ F(t) &\equiv \sum_{h=1}^{\infty} \left(\operatorname{arc} \operatorname{tg} \sqrt{\frac{kb}{t}} - \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{kb-a}{t}} \right) \end{aligned}$$

Используя это неравенство, будем иметь

$$\rho(K) \leq \max_{s \in [0, a]} \sqrt[2m]{8^m F(s) [F(a)]^{m-2} \int_0^a \left[\sum_{h=1}^{\infty} (kb - \tau)^{-1/2} (kb - \tau + a)^{-1} \right] d\tau} = 8F(a)$$

В предельном случае при $a=b$ отсюда получаем ($\zeta(\alpha)$ — дзета-функция Римана)

$$\rho(K) \leq 8 \sum_{h=1}^{\infty} (\operatorname{arc} \operatorname{tg} \sqrt{h} - \operatorname{arc} \operatorname{tg} \sqrt{h-1}) < 4\zeta(3/2) < 4\pi$$

поскольку $\zeta(3/2) \approx 2.612$ и

$$\operatorname{arc} \operatorname{tg} \sqrt{h} - \operatorname{arc} \operatorname{tg} \sqrt{h-1} = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\sqrt{h} - \sqrt{h-1}}{1 + \sqrt{h(h-1)}} < \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{1}{2k\sqrt{k-1}} < \frac{1}{2} k^{-1/2}$$

Полученная оценка $\rho(K)$ показывает, что значение параметра $\lambda=1/4\pi$ не является собственным [8] при любых a и b и уравнение (16) разрешимо единственным образом при любой правой части. Следовательно, задача (8) — (10) всегда имеет единственное решение на множестве конечных значений a и b .

Таким образом, решение задачи (8) — (10) для отрицательных значений ψ (уравнение (11)) однозначно определяется его значениями на положительных полупрямых $s=ks_A$ и условием периодичности (10). В случае задачи об обтекании впадины (фиг. 2) полученный результат означает, что течение в области 2 отличается от течения в слое смещения ([10], стр. 180) отсутствием граничного условия при $\psi \rightarrow -\infty$. Действительно, в задаче о ламинарном слое на границе раздела двух потоков необходимо задание полных давлений в каждом из них и распределения статического давления $p(s)$ на линии раздела $\psi=0$ невязкого течения. Эти данные позволяют поставить задачу о продолжении пограничного слоя. В противоположность этому при исследовании обтекания впадины в рамках аналогии с задачей (8) — (10) по известному начальному профилю скорости $U(0, \psi)$, $\psi > 0$ в набегающем пограничном слое из уравнения (11) однозначно (вследствие цикличности течения) определяется ограниченный при $\psi \rightarrow -\infty$ начальный профиль $U(0, \psi)$, $\psi < 0$ вязкого течения во впадине. Асимптоти-

ка этого профиля $U(0, -\infty)$ и статическое давление $p(0)$ позволяют найти полное давление p_{03} невязкого течения во впадине. Подробнее это будет показано ниже.

Таким образом, граничные условия для уравнения (7) имеют вид

$$(19) \quad u_1(ks_A, \psi) + \varepsilon u_2(ks_A, \psi) = \alpha_1(\psi) + \varepsilon \alpha_2(\psi), \quad \psi \geq 0$$

$$(20) \quad u_1(s, 0) + \varepsilon u_2(s, 0) = 0, \quad ks_A + s_c < s < (k+1)s_A$$

(правая часть (19) — профиль пограничного слоя на стенке $A'A$ в начальном сечении (в точке A), причем при $\psi \rightarrow -\infty$ $\alpha_1(\psi)$ ограничена, а $\alpha_2(\psi)$ растет не быстрее ψ ; (20) — условие прилипания).

Граничное условие для $\psi < 0$ (условие периодичности) аналогично (10). (Это условие позволяет перейти от задачи с двумя пограничными слоями (2) и (4) к задаче о едином пограничном слое.) При его выводе необходимо учесть изменения профиля скоростей $U = u_1 + \varepsilon u_2$ в ε -окрестностях угловых точек A и C . Эти изменения можно характеризовать разностями значений U на выходе из каждой из окрестностей и входе в нее, т. е. разностями

$$U(ks_A + s_c + \varepsilon, \psi) - U(ks_A + s_c - \varepsilon, \psi) = \beta_c(\psi) + \varepsilon \gamma_c(\psi) \\ \text{и } U(ks_A + \varepsilon, \psi) - U(ks_A - \varepsilon, \psi) = \beta_A(\psi) + \varepsilon \gamma_A(\psi)$$

Согласно [11] члены первого приближения $\beta_c(\psi) = \beta_A(\psi) = 0$. Кроме того, в соответствии с результатами [12] будем считать, что полная асимптотика уравнений Навье — Стокса в угловой точке такова, что функции $\gamma_c(\psi)$ и $\gamma_A(\psi)$ ограничены и полностью определяются локальной задачей о течении в областях 5 и 6, а, следовательно, по выходе из этих областей можно поставить задачу о продолжении пограничного слоя. (Очевидно, что использование какой-либо конкретной асимптотики в окрестности угловой точки, например [11, 12], не является определяющим в общем анализе. Здесь существенно лишь предположение о локальном характере этой асимптотики.)

Таким образом, если $U^0(s, \psi)$ — непрерывная в σ часть решения рассматриваемой задачи, то

$$(21) \quad u_1(ks_A, \psi) + \varepsilon u_2(ks_A, \psi) = U^0[(k+1)s_A, \psi] + \varepsilon [\gamma_c(\psi) + \gamma_A(\psi)]$$

При $\psi \rightarrow \pm\infty$ решение уравнения (7) должно непрерывным образом сращиваться с соответствующими решениями задач о невязком течении в областях 1 и 3. Обозначим эти решения u_{ij}, p_{ij} ($i=1, 3; j=1, 2$). Тогда условия сращивания можно записать в виде [13]

$$(22) \quad \lim_{\psi \rightarrow +\infty} u_1(s, \psi) + \varepsilon u_2(s, \psi) = u_{11}(s, +0) + \varepsilon [\psi \omega_1(s, +0) + u_{12}(s, +0)] \\ \lim_{\psi \rightarrow -\infty} u_1(s, \psi) + \varepsilon u_2(s, \psi) = u_{31}(s, +0) + \varepsilon [\psi \omega_3(s, -0) + u_{32}(s, -0)]$$

где ω_1 и ω_3 — значения завихренности в областях 1 и 3. В результате сращивания решений первого приближения находим (учитывая, что $p_{1\psi} = 0$)

$$(23) \quad \text{const} = p_{03} = 1/2 u_{13}^2(s, -0) + p_{11}(s, +0)$$

В силу ограниченности функции $u_1(s, \psi) \lim_{\psi \rightarrow -\infty} u_{1\psi} = 0$. Поэтому, дифференцируя по ψ равенства (22), получим ($U = u_1 + \varepsilon u_2$)

$$(24) \quad \lim_{\psi \rightarrow +\infty} U_\psi = \omega_1(s, +0), \quad \lim_{\psi \rightarrow -\infty} U_\psi = \omega_3(s, -0)$$

Отметим теперь, что последовательность построения приближений в методе асимптотических сращиваемых разложений такова, что функции $u_{12}(s, +0)$, $u_{32}(s, -0)$ известны до решения задачи о течении в пограничном слое во втором приближении. Следовательно, условия (22) эквивалентны условиям (24). А поскольку по теореме Бэтчелора $\omega_3(s, \psi) \equiv \text{const}$, то (24) означает, что асимптотика решения $u_2(s, \psi)$ второго приближения позволяет определить эту константу. Таким образом, произвольное задание граничного условия при $\psi \rightarrow -\infty$ (т. е. постоянных p_{03} , ω_3) возможно лишь в случае неединственности решения (7), (19)–(21).

Исследование сформулированной краевой задачи показало, что ее решение единственно [14]. Теорему единственности для двух приближений теории пограничного слоя удалось строго доказать в предположении, что внутри области σ функция $U(s, \psi) > 0$ (а именно такие решения задачи и представляют интерес в данном случае), а вместо (20) на стенке впадины выполняется условие $U(s, 0) = \delta > 0$, где δ произвольно мало. Возможность такой замены следует из замечания, сделанного при выводе (4)–(6), согласно которому равенства $U(s, 0) = 0$ и $U(s, 0) = O(\varepsilon^p)$, $p \geq 2$, в асимптотическом смысле эквивалентны.

Отметим, что эта замена в принципе не нарушает заключения о единственности решения задачи (7), (19)–(21), поскольку с эвристической точки зрения условие (20) сужает область определения дифференциального оператора (7) и поэтому важно лишь при изучении условий разрешимости рассматриваемой краевой задачи. В случае квазилинейного уравнения типа теплопроводности вопрос о влиянии вырождения на части границы области σ на однозначную разрешимость задачи нетрудно исследовать полностью.

Теорема. Решение $w(s, \psi)$ уравнения

$$(25) \quad w_s = \sqrt{2w} w_{\psi\psi}$$

тождественно равно нулю в σ , если

- 1) $w(s, \psi) \in C_{s\psi}^{1,2}(\sigma) \cup C(\bar{\sigma})$, $\max_{\bar{\sigma}} (|w|, |w_s|, |w_{\psi\psi}|) < M_s$
- 2) $w(0, \psi) = w(s_A, \psi) = 0$, $\psi \geq 0$; $w(s, 0) = 0$, $s_C \leq s \leq s_A$
- 3) $w(0, \psi) = w(s_A, \psi)$, $\psi < 0$

Доказательство. Рассмотрим тождество, справедливое для любого решения (25)

$$(26) \quad \iint_{\sigma} \frac{w_s}{\sqrt{2w}} (\sqrt{2w} w_{\psi\psi} - w_s) ds d\psi = 0$$

В конечной подобласти $\sigma_{H,\delta} = \{0 \leq s \leq s_A, 0 < \delta \leq |\psi| < H < \infty\}$ (H, δ – постоянные) области σ равенство (26) можно преобразовать по формуле Грина ($\Gamma_{H,\delta}$ – граница $\bar{\sigma}_{H,\delta}$)

$$\frac{1}{2} \oint_{\Gamma_{H,\delta}} w_{\psi}^2 d\psi + 2w_s w_{\psi} ds + \iint_{\sigma_{H,\delta}} \frac{w_s^2}{\sqrt{2w}} ds d\psi = 0$$

Согласно условию 1) теоремы задача рассматривается на множестве решений (25), ограниченных в $\bar{\sigma}$ вместе со своими первыми производными (применительно к краевой задаче (7), (19)–(21) такими свойствами обладают решения первого приближения теории пограничного слоя [10]). Поэтому $\lim_{\psi \rightarrow \infty} |\psi w_{\psi}| = 0$, $|w_s w_{\psi}| < M_s$

в $\bar{\sigma}$ и, следовательно, предельным переходом $H \rightarrow \infty$, $\delta \rightarrow 0$ можно распространить преобразование Грина на всю область σ

$$(27) \quad \oint_{\Gamma} \frac{w_{\psi}^2}{2} d\psi + w_s w_{\psi} ds + \iint_{\sigma} \frac{w_s^2}{\sqrt{2w}} ds d\psi = 0$$

В силу особенностей строения границы Γ и условий 2), 3) теоремы, соотношение (27) преобразуется к виду

$$\int_0^{+\infty} \frac{w_\psi^2}{2} \Big|_{s=s_c} d\psi + \iint_{\sigma} \frac{w_s^2}{\sqrt{2w}} ds d\psi = 0$$

откуда непосредственно следует $w_\psi = w_s = w = 0$ в $\bar{\sigma}$. Следовательно, задача (25), (9), (10), так же как и задача (8) — (10), имеет единственное решение в области $\bar{\sigma}$.

Возвращаясь к общему случаю, можно утверждать, что граничные условия (19) — (21), однозначно определяя решение краевой задачи (7), (19) — (21) в области σ , позволяют найти и неизвестные константы p_{03} и ω_3 как асимптотики решений при $\psi \rightarrow -\infty$ соответственно первого и второго приближений. Следовательно, если задать заранее положение концевых точек A и C разделяющей линии тока (как это было сделано в [1] и повторено на фиг. 2), то задача окажется переопределенной, так как единственным свободным является параметр Δ , определяемый первым приближением пограничного слоя. Если же кривую ABC считать неизвестной, включая и ее концы, то условия срачивания (22), (23) (содержащие функции $u_{12}(s, 0)$, $u_{32}(s, 0)$ и $p_{11}(s, 0)$), зависящие только от формы линии тока $ABCD$, позволят замкнуть задачу в целом, т. е. определить те значения параметров p_{03}^* , ω_3^* , при которых все внутренние связи задачи удовлетворяются одновременно. Этот вывод, очевидно, сохраняет силу и в случае стационарного отрывного обтекания заданного профиля.

Таким образом, можно считать установленным, что при исследовании задачи стационарного отрывного обтекания тела методом срачиваемых асимптотических разложений необходимо совместно рассмотреть не менее двух приближений.

Авторы признательны Г. Ю. Степанову за обсуждение статьи и ценные замечания.

Поступила 21 X 1976

ЛИТЕРАТУРА

1. Нейланд В. Я., Сычев В. В. К теории течений в стационарных срывных зонах. Уч. зап. ЦАГИ, 1970, т. 1, № 1.
2. Batchelor G. K. On steady laminar flow with closed streamlines at large Reynolds number. J. Fluid Mech., 1957, vol. 1, pt 2.
3. Гольдштик М. А. Математическая модель отрывных течений несжимаемой жидкости. Докл. АН СССР, 1962, т. 147, № 6.
4. Шабат А. Б. Об одной схеме плоского движения жидкости при наличии на дне траншеи. ПМТФ, 1962, № 4.
5. Шабат А. Б. О двух задачах на склеивание. Докл. АН СССР, 1963, т. 150, № 6.
6. Садовский В. С. Область постоянной завихренности в плоском потенциальном потоке. Уч. зап. ЦАГИ, 1970, т. 1, № 4.
7. Садовский В. С. О вихревых зонах в потенциальном потоке со скачком постоянной Бернулли на границе. ПММ, 1971, т. 35, вып. 5.
8. Ван-Дайк М. Теория сжимаемого пограничного слоя во втором приближении с применением к обтеканию затупленных тел гиперзвуковым потоком. В сб. «Исследование гиперзвуковых течений». М., «Мир», 1964.
9. Интегральные уравнения. М., «Наука», 1968.
10. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. М., «Мир», 1968.
11. Матвеева Н. С., Нейланд В. Я. Ламинарный пограничный слой вблизи угловой точки тела. Изв. АН СССР, МЖГ, 1967, № 4.
12. Рубан А. И. Численный метод решения задачи о свободном взаимодействии. Уч. зап. ЦАГИ, 1976, т. 7, № 2.
13. Чудов Л. А. Высшие приближения в пограничном слое. В сб. «Некоторые применения метода сеток в газовой динамике», вып. 2. Асимптотика по малому параметру вязкости. М., Изд. МГУ, 1971.
14. Колосов В. В., Шифрин Э. Г. Об одной краевой задаче, возникающей при исследовании замкнутых стационарных отрывных зон в несжимаемой жидкости. ПММ, 1975, т. 39, вып. 5.